

REPASO DE TRIGONOMETRÍA

1.- Calcula las demás razones trigonométricas del ángulo α utilizando las relaciones fundamentales: (sin calcular el valor del ángulo α y trabajando con valores exactos)

a) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

b) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $270^\circ < \alpha < 360^\circ$

2.- Sabiendo que $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, calcula (sin calcular el valor del ángulo α)

a) $\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha)$

b) $\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha)$

c) $\operatorname{sen}(90^\circ + \alpha)$

d) $\operatorname{tg}(-\alpha)$

3.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\operatorname{sen} 2x - 2 \cos^2 x = 0$

b) $\cos 2x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0$

c) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sqrt{2} \operatorname{sen} x = 0$

d) $\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = 1$

e) $2 \cos^2 x + \operatorname{sen} x = 1$

f) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}$

4.- Demuestra las siguientes igualdades:

a) $\sec x - \cos x = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{sen} x$

b) $\frac{2 \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} 2x} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = \cos x$

c) $\frac{(\operatorname{sen} x + \cos x) \cdot \cos 2x}{\cos x - \operatorname{sen} x} = 1 + \operatorname{sen} 2x$

d) $\frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x$

e) $\cos x + 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = 1$

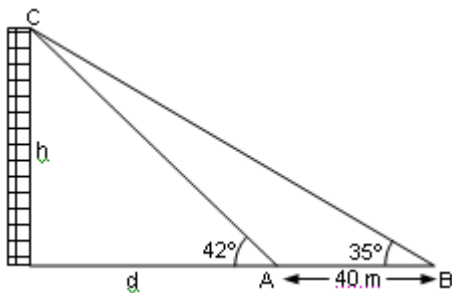
f) $\frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen}(90^\circ - x)}{1 + \operatorname{sen} x}$

g) $\frac{\operatorname{sen}(-x) \cdot \operatorname{ctg}(2\pi - x)}{\operatorname{tg}(\pi + x) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \operatorname{ctg} x$

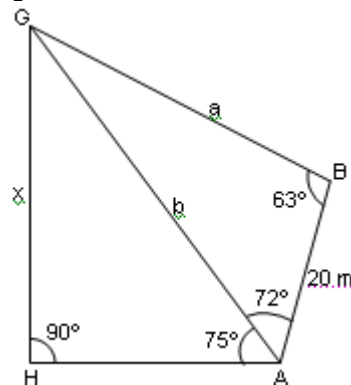
h) $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x} = \cos 2x$

i) $\frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)} = \frac{1}{\operatorname{tga}}$

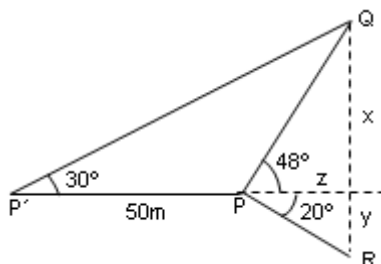
5.- Estamos en A, medimos el ángulo bajo el que se ve el edificio (42°), nos alejamos 40 m y volvemos a medir el ángulo (35°). ¿Cuál es la altura del edificio y a qué distancia nos encontramos de él?



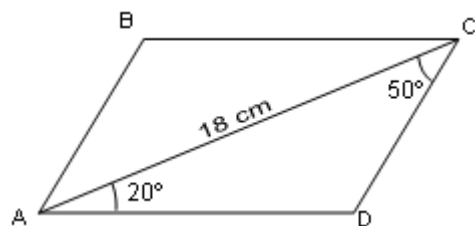
6.- Para hallar la altura de un globo, realizamos las mediciones indicadas en la figura. ¿Cuánto dista el globo del punto A? ¿Cuánto del punto B? ¿A qué altura está el globo?



7.- Halla la altura del árbol QR de pie inaccesible y más bajo que el punto de observación, con los datos de la figura.



8.- Calcula las longitudes de los lados y la otra diagonal del siguiente paralelogramo:



SOLUCIONES

1.- Calcula las demás razones trigonométricas del ángulo α utilizando las relaciones fundamentales: (sin calcular el valor del ángulo α y trabajando con valores exactos)

a) $\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{cos}^2 \alpha = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{cos } \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

b) $\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\text{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\text{cos}^2 \alpha} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\text{cos}^2 \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\text{cos}^2 \alpha} = \frac{3}{9} + 1 = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \Rightarrow \text{cos}^2 \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{cos } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{1}{2}$$

2.- Sabiendo que $\text{cos } \alpha = \frac{1}{2}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, calcula (sin calcular el valor del ángulo α)

a) $\text{sen}(90^\circ - \alpha)$

b) $\text{tg}(180^\circ + \alpha)$

c) $\text{sen}(90^\circ + \alpha)$

d) $\text{tg}(-\alpha)$

$$\text{sen}^2 \alpha = 1 - \text{cos}^2 \alpha \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

a) $\text{cos}(90^\circ - \alpha) = \text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\text{tg}(180^\circ + \alpha) = \text{tg } \alpha = \sqrt{3}$

c) $\text{sen}(90^\circ + \alpha) = -\text{cos } \alpha = -\frac{1}{2}$

d) $\text{tg}(180^\circ + \alpha) = -\text{tg } \alpha = -\sqrt{3}$

3.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\text{sen } 2x - 2 \cos^2 x = 0$

$$2 \text{sen } x \cos x - 2 \cos^2 x = 0 \Rightarrow 2 \cos x (\text{sen } x - \cos x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } x = \cos x \rightarrow x = 45^\circ; x = 225^\circ \\ \cos x = 0 \rightarrow x = 90^\circ; x = 270^\circ \end{cases}$$

b) $\cos 2x - 3 \text{sen } x + 1 = 0$

$$\cos^2 x - \text{sen}^2 x - 3 \text{sen } x + 1 = 0 \Rightarrow 1 - \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x - 3 \text{sen } x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$2 \text{sen}^2 x + 3 \text{sen } x - 2 = 0$$

$$\text{sen } x = \frac{-3 \pm 5}{4} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 30^\circ; x = 150^\circ \\ \text{sen } x = -2 \rightarrow \text{Imposible} \end{cases}$$

c) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sqrt{2} \text{sen } x = 0$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \text{sen} \frac{\pi}{4} \cos x + \cos \frac{\pi}{4} \text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \text{sen } x$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sqrt{2} \text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \text{sen } x - \sqrt{2} \text{sen } x = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{sen } x = 0 \Rightarrow \cos x - \text{sen } x = 0 \Rightarrow \cos x = \text{sen } x \Rightarrow \begin{cases} x = 45^\circ \\ x = 225^\circ \end{cases}$$

d) $\text{sen}^2 x - \cos^2 x = 1$

$$1 - \cos^2 x - \cos^2 x = 1 \Rightarrow -2 \cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 90^\circ \\ x = 270^\circ \end{cases}$$

e) $2 \cos^2 x + \text{sen } x = 1$

$$2(1 - \text{sen}^2 x) + \text{sen } x = 1 \Rightarrow 2 - 2 \text{sen}^2 x + \text{sen } x = 1 \Rightarrow 2 \text{sen}^2 x - \text{sen } x - 1 = 0$$

$$\text{sen } x = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } x = 1 \rightarrow x = 90^\circ \\ \text{sen } x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = 210^\circ; x = 330^\circ \end{cases}$$

f) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \text{sen} \frac{\pi}{6} \cos x - \cos \frac{\pi}{6} \text{sen } x = \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen } x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos x + \text{sen} \frac{\pi}{3} \text{sen } x = \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen } x$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen } x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen } x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 60^\circ \\ x = 300^\circ \end{cases}$$

4.- Demuestra las siguientes identidades

a) $\sec x - \cos x = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{sen} x$

$$\sec x - \cos x = \frac{1}{\cos x} - \cos x = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = \operatorname{sen} x \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} x$$

b) $\frac{2\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} 2x} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = \cos x$

$$\frac{2\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} 2x} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = \frac{2\operatorname{sen} x}{\frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen} x \cdot (1 - \operatorname{tg}^2 x)}{\operatorname{tg} x} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} \stackrel{(1)}{=} \cos x \cdot (1 - \operatorname{tg}^2 x) + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} \stackrel{(2)}{=}$$

$$= \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = \cos x$$

$$(1) \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x} = \cos x$$

$$(2) \cos x (1 - \operatorname{tg}^2 x) = \cos x \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \right) = \cos x \left(\frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \right) = \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$$

c) $\frac{(\operatorname{sen} x + \cos x) \cdot \cos 2x}{\cos x - \operatorname{sen} x} = 1 + \operatorname{sen} 2x$

$$\frac{(\operatorname{sen} x + \cos x) \cdot (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)}{\cos x - \operatorname{sen} x} = (\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x = 1 + \operatorname{sen} 2x$$

d) $\frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x$

$$\frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x$$

e) $\cos x + 2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = 1$

$$\cos x + 2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \cos x + 2 \cdot \left(\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \right)^2 = \cos x + \cancel{2} \cdot \left(\frac{1 - \cos x}{\cancel{2}} \right) = \cos x + 1 - \cos x = 1$$

f) $\frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen}(90^\circ - x)}{1 + \operatorname{sen} x}$

$$\frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen}(90^\circ - x)}{1 + \operatorname{sen} x} \rightarrow (1 - \operatorname{sen} x)(1 + \operatorname{sen} x) = \cos x \cdot \operatorname{sen}(90^\circ - x) \rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 x = \cos x \cdot \cos x \rightarrow$$

$$\cos^2 x = \cos^2 x$$

$$g) \frac{\operatorname{sen}(-x) \cdot \operatorname{ctg}(2\pi - x)}{\operatorname{tg}(\pi + x) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \operatorname{ctg} x$$

Teniendo en cuenta:

$$a) \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \quad b) \operatorname{ctg}(2\pi - x) = -\operatorname{ctg} x \quad c) \operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x \quad d) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cos} x$$

$$\frac{\operatorname{sen}(-x) \cdot \operatorname{ctg}(2\pi - x)}{\operatorname{tg}(\pi + x) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{(-\operatorname{sen} x) \cdot (-\operatorname{ctg} x)}{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cos} x} = \frac{\cancel{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{\operatorname{cos} x}{\cancel{\operatorname{sen} x}}}{\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} \cdot \operatorname{cos} x} = \frac{\operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{ctg} x$$

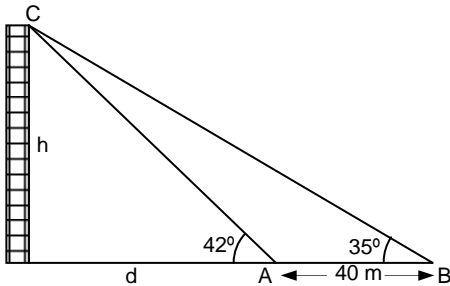
$$h) \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x} = \operatorname{cos} 2x$$

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} - \operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{\cancel{\operatorname{tg} x} \cdot (1 - \operatorname{tg}^2 x)}{\cancel{\operatorname{tg} x} \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x)} = \frac{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{cos}^2 x}}{1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{cos}^2 x}} = \frac{\operatorname{cos}^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{cos}^2 x + \operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{cos} 2x$$

$$i) \frac{\operatorname{cos}(a+b) + \operatorname{cos}(a-b)}{\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)} = \operatorname{tga}$$

$$\frac{\operatorname{cos}(a+b) + \operatorname{cos}(a-b)}{\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)} = \frac{\operatorname{cos} a \cdot \operatorname{cos} b - \cancel{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b} + \operatorname{cos} a \cdot \operatorname{cos} b + \cancel{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b}}{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{cos} b + \cancel{\operatorname{cos} a \cdot \operatorname{sen} b} + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{cos} b - \cancel{\operatorname{cos} a \cdot \operatorname{sen} b}} = \frac{2 \operatorname{cos} a \cdot \operatorname{cos} b}{2 \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{cos} b} = \frac{1}{\operatorname{tga}}$$

5.- Estamos en A, medimos el ángulo bajo el que se ve el edificio (42°), nos alejamos 40 m y volvemos a medir el ángulo (35°). ¿Cuál es la altura del edificio y a qué distancia nos encontramos de él? Observa la ilustración:



1ª forma: Empleando un sistema de ecuaciones:

$$\operatorname{Tg} 35^\circ = \frac{h}{d+40} \Rightarrow h = 0,7(d+40)$$

$$\operatorname{Tg} 42^\circ = \frac{h}{d} \Rightarrow h = 0,9d$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$0,9d = 0,7(d+40) \Rightarrow 0,9d = 0,7d + 28 \Rightarrow 0,2d = 28 \Rightarrow d = 140 \text{ m}$$

$$h = 0,9 \cdot 140 = 126 \text{ m}$$

2ª forma: Empleando el teorema del seno:

Calculamos los ángulos del triángulo ABC: $A = 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$

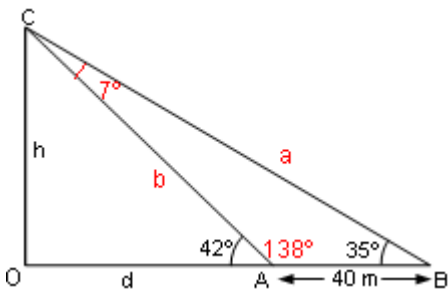
$$C = 180^\circ - 35^\circ - 138^\circ = 7^\circ$$

$$\frac{b}{\operatorname{sen} 35^\circ} = \frac{40}{\operatorname{sen} 7^\circ} \rightarrow b = \frac{40 \cdot \operatorname{sen} 35^\circ}{\operatorname{sen} 7^\circ} = 188,26$$

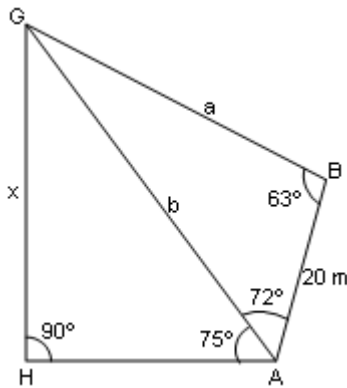
Empleando el triángulo rectángulo OCA:

$$\operatorname{sen} 42^\circ = \frac{188,26}{h} \rightarrow h = 188,26 \cdot \operatorname{sen} 42^\circ = 126 \text{ m}$$

$$\operatorname{cos} 42^\circ = \frac{188,26}{x} \rightarrow x = 188,26 \cdot \operatorname{cos} 42^\circ = 140 \text{ m}$$



6. Para hallar la altura de un globo, realizamos las mediciones indicadas en la figura. ¿Cuánto dista el globo del punto A? ¿Cuánto del punto B? ¿A qué altura está el globo?



$$\hat{G} = 180^\circ - 72^\circ - 63^\circ = 45^\circ$$

Aplicando el teorema del seno al triángulo ABG, calculo a y b:

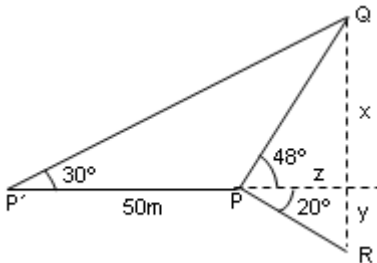
$$\frac{a}{\text{sen}72^\circ} = \frac{20}{\text{sen}45^\circ} \Rightarrow a = \frac{20 \cdot \text{sen}72^\circ}{\text{sen}45^\circ} = 26,9 \text{ m dista del punto B}$$

$$\frac{b}{\text{sen}63^\circ} = \frac{20}{\text{sen}45^\circ} \Rightarrow b = \frac{20 \cdot \text{sen}63^\circ}{\text{sen}45^\circ} = 25,2 \text{ m dista del punto A.}$$

Empleando el triángulo AHG, calculo x mediante la definición de seno de un ángulo:

$$\text{sen } 75^\circ = \frac{x}{b} \Rightarrow x = b \cdot \text{sen } 75^\circ = 24,34 \text{ m altura del globo}$$

7.- Halla la altura del árbol QR de pie inaccesible y más bajo que el punto de observación, con los datos de la figura.



$$\text{Tg } 48^\circ = \frac{x}{z} \Rightarrow x = z \cdot \text{tg } 48^\circ \Rightarrow x = 1,11z$$

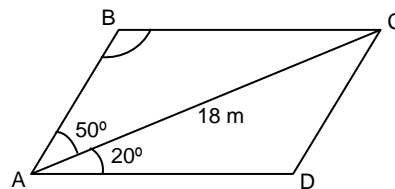
$$\text{Tg } 30^\circ = \frac{x}{50+z} \Rightarrow x = (50+z) \cdot \text{tg } 30^\circ \Rightarrow x = 0,577(50+z)$$

$$1,11z = 28,85 + 0,577z \Rightarrow z = 54,13 \text{ m}$$

$$\text{Tg } 20^\circ = \frac{y}{z} \Rightarrow y = 54,13 \cdot \text{tg } 20^\circ = 19,7 \text{ m}$$

QR = 79,82 m mide la altura del árbol.

8.- Calcula las longitudes de los lados y de la otra diagonal del siguiente paralelogramo:



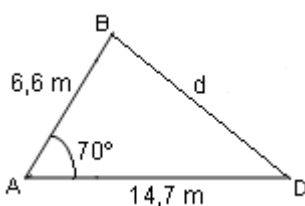
$$\hat{B} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{C} = 110^\circ$$

Aplicando el teorema del seno, calculamos a y c:

$$\frac{a}{\text{sen}20^\circ} = \frac{18}{\text{sen}110^\circ} \Rightarrow a = \frac{18 \cdot \text{sen}20^\circ}{\text{sen}110^\circ} \Rightarrow CD = 14,7 \text{ m}$$

$$\frac{c}{\text{sen}50^\circ} = \frac{18}{\text{sen}110^\circ} \Rightarrow c = \frac{18 \cdot \text{sen}50^\circ}{\text{sen}110^\circ} \Rightarrow AD = 6,6 \text{ m}$$

Para calcular la otra diagonal, consideremos el triángulo ABD:



Aplicando el teorema del coseno:

$$\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 - 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AB} \cdot \cos 70^\circ$$

$$\overline{BD}^2 = 6,6^2 + 14,7^2 - 2 \cdot 6,6 \cdot 14,7 \cdot \cos 70^\circ = 193,28$$

$$\overline{BD} = 13,9 \text{ m}$$