

EXAMEN GLOBAL

1. Resuelve la ecuación: $\frac{3z+1}{5-i} = i$ (en la que i representa a la unidad imaginaria).
2. Con el mínimo número de cálculos posible halla, razonadamente, la altura de un ciprés sabiendo que la longitud de su sombra es de 3 m a una hora en la que el ángulo que forman los rayos del sol con la vertical es de $23^\circ 11' 54''$.
3. Halla razonadamente el valor de α sabiendo que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $90^\circ < \alpha < 360^\circ$.
4. Si $\operatorname{sen}\alpha = k$ y $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ deduce el valor de $\operatorname{sen} 2\alpha$.
5. Expresa el vector $\vec{a} = (-1, 2)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{b} = (2, 3)$ y $\vec{c} = (3, -4)$.
6. Halla, racionalizada y simplificada, la distancia exacta entre las rectas $r \equiv (y = 2x - 3)$ y $s \equiv (6x - 3y + 5 = 0)$.
7. Si $\ln 2 = 0'69$ y $\ln 3 = 1'10$ Halla la función de interpolación lineal que permita aproximar el valor de los logaritmos neperianos de los números comprendidos entre 2 y 3 y aplícala para estimar el valor de $\ln 2'7$.
8. Halla el valor de a para que la función definida por $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 + ax + 6}$ sea discontinua en $x = 3$ y justifica qué clase de discontinuidad sería.
9. Resuelve la ecuación: $1 + 2 \cdot 3^{4x-5} = 67$ dando el resultado redondeado en las centésimas.
10. Sea $g(x) = (2x + 9)^5$ halla la expresión de a) Su derivada $g'(x)$ y b) Su primitiva general $G(x)$.

1.
$$\frac{3z+1}{5-i} = i \xrightarrow{\cdot(5-i)} 3z+1 = 5i - i^2 \xrightarrow{+i^2=-1} 3z = 5i \xrightarrow{\cdot\frac{1}{3}} \boxed{z = \frac{5}{3}i}$$

2. Si unimos el punto más alto del ciprés con el extremo de la sombra este segmento es la hipotenusa que completa un triángulo rectángulo cuyos catetos son la altura, h , del ciprés y la longitud, l , de su sombra. El ángulo, α , que conocemos, es el opuesto a este a este último; por lo tanto:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{l}{h} \Rightarrow h = \frac{l}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{3}{\operatorname{tg} 23^\circ 11' 54''} = 7$$

El ciprés tiene
7m de altura.

3. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $90^\circ < \alpha < 360^\circ$

El ángulo del primer cuadrante cuyo seno vale $\frac{\sqrt{3}}{2}$ es el de 60° . El que nos piden es aquel cuyo punto asociado, en el sistema goniométrico, tiene la misma ordenada; por lo tanto, es el de

$$180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

$$\text{Si } \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ y } 90^\circ < \alpha < 360^\circ \Rightarrow \boxed{\alpha = 120^\circ}$$

4. $\text{sen } 2\alpha = 2\text{sen}\alpha \cos\alpha = *$

Obtenemos $\cos\alpha$ a partir de la ecuación fundamental de la trigonometría, teniendo en cuenta que si $90^\circ < \alpha < 180^\circ \Rightarrow \alpha \in 2^\circ \text{ cuadrante} \Rightarrow \cos\alpha < 0$

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{1 - \text{sen}^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{1 - k^2}$$

$$* \boxed{\text{sen } 2\alpha = -2k\sqrt{1 - k^2}}$$

5. Para expresar $\vec{a} = (-1, 2)$ como combinación lineal de $\vec{b} = (2, 3)$ y $\vec{c} = (3, -4)$ tenemos que hallar dos números reales, x e y que hagan que: $\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c}$ sustituimos \vec{a}, \vec{b} y \vec{c} por sus valores y resolvemos la ecuación:

$$\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c} \Rightarrow (-1, 2) = x(2, 3) + y(3, -4) \Rightarrow (-1, 2) = (2x, 3x) + y(3y, -4y)$$

$$\Rightarrow (-1, 2) = (2x + 3y, 3x - 4y) \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3E1 - 2E2 \quad 17y = -7 \\ 4E1 + 3E2 \quad 17x = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -7/17 \\ x = 2/17 \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{2}{17}\vec{b} + \frac{-7}{17}\vec{c}}$$

6. Distancia entre $r \equiv (y = 2x - 3)$ y $s \equiv (6x - 3y + 5)$

$s \equiv (6x - 3y + 5) \Leftrightarrow y = 2x + \frac{5}{3} \Rightarrow$ Las dos rectas tienen la misma pendiente, $m = 2$ por lo que son paralelas y la distancia entre ambas la obtenemos a partir de la fórmula de la distancia entre un punto $P(x_0, y_0)$ de la recta r y la recta $s \equiv (6x - 3y + 5)$.

$$d(r, s) = d(P, s) = \frac{|6x_0 - 3y_0 + 5|}{\sqrt{6^2 + (-3)^2}}$$

Las coordenadas del punto P de r es cualquiera de las infinitas soluciones de su ecuación por ejemplo $P(0, -3)$. Sustituyendo x_0 por 0 e y_0 por -3 en la ecuación anterior y efectuando las operaciones obtenemos la distancia entre las rectas:

$$d(P, s) = \frac{|6 \cdot 0 - 3(-3) + 5|}{\sqrt{6^2 + (-3)^2}} = \frac{14}{\sqrt{45}} = \frac{14}{3\sqrt{5}} = \frac{14}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{14}{15}\sqrt{5}$$

La distancia entre las rectas es $\boxed{d(r, s) = \frac{14}{15}\sqrt{5} \text{ u.l.}}$

7. $\ln 2 = 0'69$ y $\ln 3 = 1'10$ La función de interpolación lineal pedida es la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2, 0'69)$ y $B(3, 1'10)$. Para obtenerla emplearemos la forma continua de la recta que pasa por el punto $A(a_1, a_2)$ y tiene la dirección del vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2}$$

Como punto tomamos, por ejemplo, $A(2, 0'69)$ y como vector director

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (3, 1'10) - (2, 0'69) = (1, 0'41) \text{ sustituyendo:}$$

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 0'69}{0'41} \Leftrightarrow y = 0'41x - 0'13$$

La función de interpolación es: $f(x) = 0'41x - 0'13$

El valor estimado para $\ln 2'7$ lo obtenemos haciendo $x = 2'7$

$$\ln 2'7 \cong f(2'7) = 0'41 \cdot 2'7 - 0'13 = \boxed{0'977}$$

8. $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 + ax + 6}$ discontinua en $x = 3$

Como f es una función racional, sólo puede ser discontinua en los valores de x que anulen su denominador por lo tanto se ha de cumplir que $3^2 + a \cdot 3 + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{a = -5}$

Para saber el tipo de discontinuidad hallaremos el límite de $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$ en $x = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)}{(x-2)} = 6$$

Si hiciésemos $f(3) = 6$ la función sería continua en $x = 3$ al cumplirse $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$

La discontinuidad es EVITABLE.

9. $1 + 2 \cdot 3^{4x-5} = 67 \xrightarrow{-1} 2 \cdot 3^{4x-5} = 66 \xrightarrow{:2} 3^{4x-5} = 33 \xrightarrow{\log} \log 3^{4x-5} = \log 33 \Rightarrow$
 $(4x - 5)\log 3 = \log 33 \Rightarrow 4x \log 3 - 5 \cdot \log 3 = \log 33 \xrightarrow{+5 \cdot \log 3} 4x \log 3 = \log 33 + 5 \cdot \log 3$
 $\xrightarrow{:4 \cdot \log 3} x = \frac{\log 33 + 5 \cdot \log 3}{4 \cdot \log 3} \Rightarrow \boxed{x = 2'05}$

10. $g(x) = (2x + 9)^5$

a) $g'(x) = 5(2x + 9)^4 \cdot 2 \Leftrightarrow \boxed{g'(x) = 10(2x + 9)^4}$

b) $G(x) = \int g(x) dx = \int (2x + 9)^5 dx = \int \frac{6(2x + 9)^5 \cdot 2}{6 \cdot 2} dx = \frac{1}{12} (2x + 9)^6 + C \text{ (con } C \in \mathfrak{R})$

$G(x) = \frac{1}{12} (2x + 9)^6 + C$