MATEMÁTICAS I

1) Resuelve las ecuaciones:

a) $2^{2x}+2^{x+2}-2^{x-1}=30$ b) $2\cdot\log x-\log(x-2)=\log(3x-4)$

2) Resuelve las ecuaciones:

a) $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}=2$ b) $\dfrac{2x+1}{x^2-4}-\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{x-1}{x^2-4}$

3) Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\left.\begin{array}{l}x^2-4x<0\\ 2\cdot(x-1)+5<7\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l}2x-y>0\\ x+y<3\end{array}\right\}$

4) Sin hacer uso de la calculadora, resuelve un triángulo ABC, siendo:

$$\hat{A}=30^0\ ;\quad \hat{B}=45^0\quad y\quad c=20\text{ cm}.$$

5) Resuelve la ecuación $2\cdot sen^2x+5\cdot\cos x=4$

6) Dadas las rectas $r\equiv\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}$ y $s\equiv\begin{cases}x=1+t\\ y=2-t\end{cases}$, se pide:

a) Averigua su posición relativa.
b) Si se cortan, calcula las coordenadas del punto de corte y el ángulo que forman y, si son paralelas, calcula la distancia entre ellas.

7) Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2+16}{x}$, se pide:

a) Continuidad y asíntotas.
b) Crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos.
c) Representación gráfica.

8) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+9x}-\sqrt{x^2-x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-2x^2-4x+8}$

9) Calcula la derivada de cada una de las funciones siguientes:

$$f(x)=\ln\sqrt{\frac{x+1}{x+8}}\quad ;\qquad g(x)=\text{arctag}\left(x^2-1\right).$$

10) Halla los valores de a y b para que la función $f(x)=ax^2+bx-1$ tenga como recta tangente en el punto de abscisa 1 la recta de ecuación $y=3x-3$.

Nota: Todos los ejercicios tienen la misma puntuación

SOLUCIONES

1) a) $2^{2x}+2^{x+2}-2^{x-1}=30 \rightarrow (2^x)^2+2^x\cdot 2^2-2^x\cdot 2^{-1}=30$

$z=2^x \rightarrow z^2+4z-\dfrac{z}{2}=30 \rightarrow 2z^2+8z-z=60 \rightarrow 2z^2+7z-60=0$

$$z=\frac{-7\pm\sqrt{49+480}}{4}=\frac{-7\pm 23}{4}=\left\langle \begin{array}{l} 4 \rightarrow z=4=2^x \Rightarrow x=2 \\ -\dfrac{15}{2}\ \text{imposible} \end{array}\right.$$

b) $2\cdot\log x-\log(x-2)=\log(3x-4) \rightarrow \log\dfrac{x^2}{x-2}=\log(3x-4) \rightarrow \dfrac{x^2}{x-2}=3x-4$

$x^2=(x-2)(3x-4) \rightarrow x^2=3x^2-6x-4x+8 \rightarrow 2x^2-10x+8=0$

$x^2-5x+4=0 \rightarrow x=\left\langle \begin{array}{l} 1 \\ 4 \end{array}\right.$ la solución x = 1 no es válida (saldría log(-1))

2) a) $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}=2 \rightarrow \sqrt{x+7}=2-\sqrt{x-1} \rightarrow x+7=(2-\sqrt{x-1})^2$

$x+7=4-4\sqrt{x-1}+x-1 \rightarrow 4=-4\sqrt{x-1} \rightarrow 1=x-1 \rightarrow x=2$

Comprobación: $\sqrt{2+7}+\sqrt{2-1}=2 \rightarrow 3+1=2$ NO tiene solución

b) $\dfrac{2x+1}{x^2-4}-\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{x-1}{x^2-4}$ $\quad$ $\text{m.c.m.}=(x+2)(x-2)=x^2-4$

$\dfrac{2x+1}{x^2-4}-\dfrac{(x+2)(x+2)}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{x-1}{x^2-4} \rightarrow 2x+1-(x^2+4x+4)=x-1$

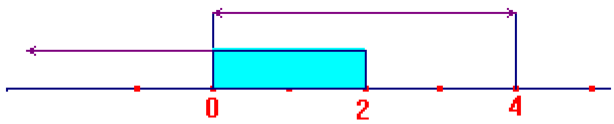
$2x+1-x^2-4x-4=x-1 \rightarrow -x^2-3x-2=0 \rightarrow x^2+3x+2=0$

$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\left\langle \begin{array}{l} -1 \\ -2 \end{array}\right.$ Solución x=-1(la solución -2 no es válida, anula denominador)

3) Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\left.\begin{array}{l} x^2-4x<0 \\ 2\cdot(x-1)+5<7 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x(x-4)<0 \\ 2x-2+5<7 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \\ 2x<4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \text{sol}:(0,4) \\ \text{sol}:(-\infty,2) \end{array}\right\}$

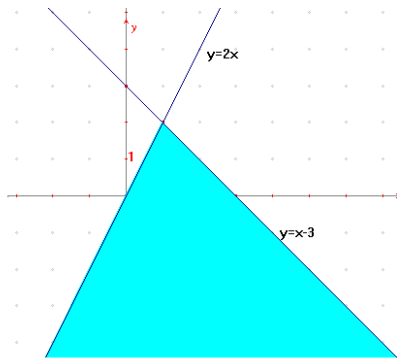
Solución del sistema: la intersección de ambas, es decir (0,2)



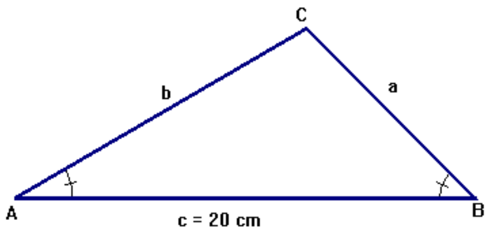
b) $\left.\begin{array}{l} 2x-y>0 \\ x+y<3 \end{array}\right\}$ representamos las rectas:

$\left\{\begin{array}{l} 2x-y=0 \\ x+y=3 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} y=2x \\ y=3-x \end{array}\right.$

y marcamos los semiplanos correspondientes a cada inecuación, la intersección de los dos semiplanos es la solución del sistema, marcada en azul y sin entrar ninguna de las semirrectas.



4) Resuelve el triángulo ABC, siendo: $\hat{A} = 30^0$; $\hat{B} = 45^0$ y $c = 20$ cm.



$$\hat{C} = 180 - 75 = 105^{\circ} \qquad \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 30} = \frac{20}{\operatorname{sen} 105} \to a = \frac{20 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

$$\operatorname{sen} 105^{\circ} = \operatorname{sen}(45+60) = \operatorname{sen} 45 \cos 60 + \operatorname{sen} 60 \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$a = \frac{40}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{40(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = 10(\sqrt{6}-\sqrt{2})\text{cm}; \frac{b}{\operatorname{sen} 45} = \frac{20}{\operatorname{sen} 105}$$

$$b = \frac{20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{40\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{40\sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = 10(\sqrt{12}-2)\text{cm}$$

5) $2 \cdot \operatorname{sen}^2 x + 5 \cdot \cos x = 4 \to 2(1-\cos^2 x) + 5\cos x = 4 \to 2 - 2\cos^2 x + 5\cos x = 4$

$$2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0 \to \cos x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} 2 \text{ no válida} \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 60^{\circ} + 360^{\circ} k \\ 300^{\circ} + 360^{\circ} k \end{cases} \quad k \in Z$$

6) Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \end{cases}$, se pide:

a) Averigua su posición relativa. $\vec{d_r} = (1,1)$, $\vec{d_s} = (1,-1)$ vectores de dirección no paralelos, luego las dos rectas se cortan

b) Si se cortan, calcula las coordenadas del punto de corte y el ángulo que forman y, si son paralelas, calcula la distancia entre ellas.

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv x-1 = y-2 \to x-y = -1 \\ s \equiv t = x-1 = -y+2 \to x+y = 3 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x-y=-1 \\ x+y=3 \end{array}\right\} \to 2x = 2 \to x = 1 \to y = 2 \to P(1,2)$$

Observamos que $\vec{d_r} \cdot \vec{d_s} = (1,1) \cdot (1,-1) = 0 \Rightarrow r$ y s son perpendiculares, luego el ángulo que forman es de 90°

7) Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2+16}{x}$, se pide:

a) Continuidad y asíntotas. Continua en $R-\{0\}$

Asíntota vertical: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+16}{x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+16}{x}=\dfrac{16}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+16}{x}=\dfrac{16}{0^+}=+\infty\end{cases}$ $\quad x = 0$ A.Vertical

Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+16}{x}=\infty$ no tiene

Asíntota oblicua: $y=mx+n\to m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+16}{x^2}=1$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+16}{x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+16-x^2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{16}{x}\right)=0\to y=x \text{ A. Oblicua}$$

b) Crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos.

$$f'(x)=\frac{2x\cdot x-(x^2+16)}{x^2}=\frac{x^2-16}{x^2}=0$$

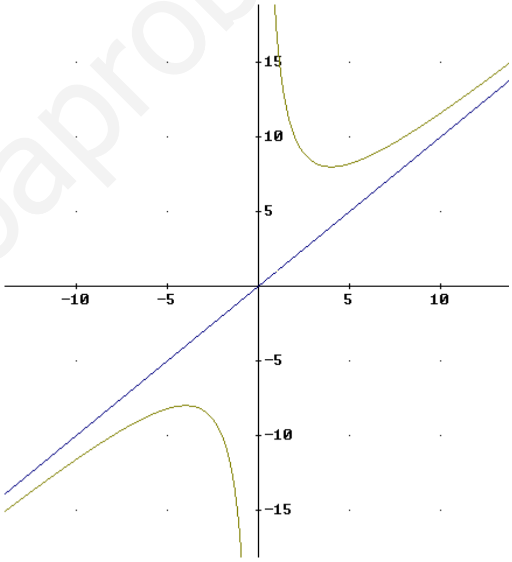
$x=\pm 4$ posibles extremos

Comprobamos:

sg(f')	+	-4	-	0	-	4	+
f es	crec	MÁX	decrec	AV	decrec	MÍN	crec

Máximo (-4,-8) Mínimo(4,8)

c) Representación gráfica.



8)a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+9x}-\sqrt{x^2-x}\right)=(\infty-\infty)=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+9x}-\sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+9x}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\left(\sqrt{x^2+9x}+\sqrt{x^2-x}\right)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+9x-x^2+x}{\left(\sqrt{x^2+9x}+\sqrt{x^2-x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{10x}{x}}{\sqrt{1+\frac{9}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=\frac{10}{2}=5$$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-2x^2-4x+8}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$ factorizamos numerador y denominador:

	1	-1	-8	+12
2		2	+2	-12
	1	+1	-6	0
2		+2	+6	
	1	+3	0	

	1	-2	-4	+8
2		+2	0	-8
	1	0	-4	0
2		+2	+4	
	1	+2	0	

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-2x^2-4x+8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2(x+3)}{(x-2)^2(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+3)}{(x+2)}=\frac{5}{4}$$

9) Calcula la derivada de cada una de las funciones siguientes:

$$f(x)=\ln\sqrt{\frac{x+1}{x+8}}\quad\rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x+8}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x+8}}}\cdot\frac{x+8-(x+1)}{(x+8)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\frac{x+1}{x+8}}\cdot\frac{7}{(x+8)^2}=\frac{7}{2(x+1)(x+8)}$$

$$g(x)=\operatorname{arctag}\left(x^2-1\right)\rightarrow g'(x)=\frac{2x}{1+\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2x}{x^4-2x^2+2}$$

10) Halla los valores de a y b para que la función $f(x)=ax^2+bx-1$ tenga como recta tangente en el punto de abscisa 1 la recta de ecuación

$y=3x-3\rightarrow$ pendiente 3 $\Rightarrow f'(1)=3$

también sabemos que la recta tangente lo es en el punto $x=1\Rightarrow y=3-3=0$

es decir, $f(1)=0\rightarrow f(1)=a+b-1=0$

$f'(x)=2ax+b\rightarrow f'(1)=2a+b=3$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l}a+b=1\\2a+b=3\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}a=1-b\\2(1-b)+b=3\end{array}\right\}\rightarrow 2-2b+b=3\Rightarrow -b=1\Rightarrow b=-1\rightarrow a=2$$

Solución: $a=2,\quad b=-1$