

2

SUCESIONES

Página 51

REFLEXIONA Y RESUELVE

¿Cuántas parejas de conejos?

¿Cuántas parejas de conejos se producirán en un año, comenzando con una pareja única, si cada mes cualquier pareja engendra otra pareja, que se reproduce a su vez desde el segundo mes?

Razonando del modo que se propone, llegamos a que el número de parejas, mes a mes, es:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144

Así, el número total de parejas al final del año es de 144 (la que había al principio y otras 143 nuevas).

La sucesión de Fibonacci y el número Φ

Si dividimos cada dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci, obtenemos:

1	1	2	3	5	8	13	21
$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{21}{13}$	
1	2	1,5	1,66	1,6	1,625	1,615	

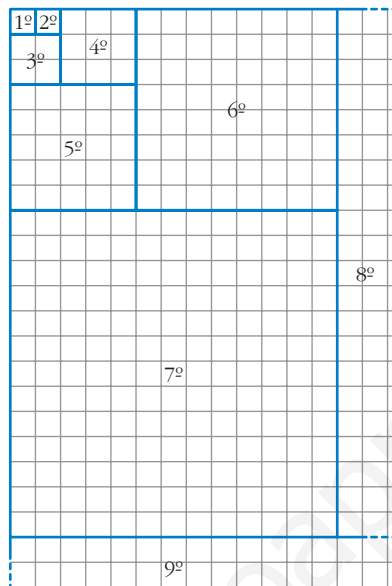
Comprueba, calculando nuevos cocientes, que el número al que se aproximan es el número áureo.

$$\frac{55}{34} = 1,61764\dots; \frac{89}{55} = 1,61818\dots; \frac{144}{89} = 1,61797\dots$$

$$\text{Se aproximan al número áureo } \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803\dots$$

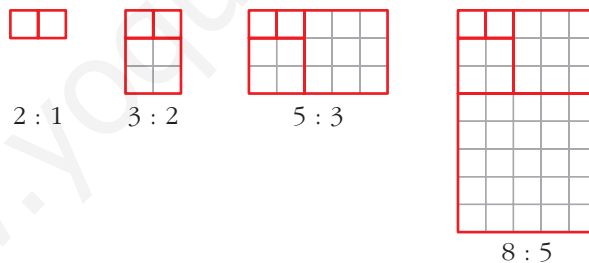
Una representación gráfica

Observa esta composición hecha con cuadrados:



El lado de los cuadrados primero y segundo es 1. A partir del tercero, el lado de cada uno de los siguientes cuadrados que se van formando es igual a la suma de los lados de los dos que le preceden. ¿Cuál es el lado del 8º? ¿Y el del 9º?

Observa también los rectángulos que se forman sucesivamente:



Los cocientes entre sus dimensiones forman la sucesión que estudiamos en el apartado anterior. Se aproximan, por tanto, al número Φ . Esto quiere decir que estos rectángulos se parecen, cada vez más, a rectángulos áureos.

Compruébalo para los cuatro siguientes rectángulos:

$$13 : 8 \quad 21 : 13 \quad 34 : 21 \quad 55 : 34$$

El lado del 8.º cuadrado es 21 y el lado del 9.º cuadrado es 34.

$$\frac{13}{8} = 1,625; \quad \frac{21}{13} = 1,615; \quad \frac{34}{21} = 1,619\dots; \quad \frac{55}{34} = 1,617\dots$$

Se aproximan al número áureo $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803\dots$

Página 52

1. Di el criterio por el que se forman las sucesiones siguientes y añade dos términos a cada una:

a) 3, 8, 13, 18, 23, ...

b) 1, 8, 27, 64, 125, ...

c) 1, 10, 100, 1 000, 10 000, ...

d) 8; 4; 2; 1; 0,5; ...

e) 1, 3, 4, 7, 11, 18, ...

f) 8, 3, 5, -2, 7, -9, ...

g) 1, -2, 3, -4, 5, -6, ...

h) 20, 13, 6, -1, -8, ...

a) Cada término, a partir del segundo, se obtiene sumándole 5 al anterior: $a_6 = 28$, $a_7 = 33$.

b) Cada término es el cubo del lugar que ocupa: $b_6 = 216$, $b_7 = 343$.

c) Cada término, a partir del segundo, se obtiene multiplicando por 10 el anterior:

$$c_6 = 100\,000, \quad c_7 = 1\,000\,000.$$

d) Cada término, a partir del segundo, se obtiene multiplicando por $\frac{1}{2}$ (dividiendo entre 2) el anterior: $d_6 = 0,25$, $d_7 = 0,125$.

e) Cada término, a partir del tercero, se obtiene sumando los dos anteriores: $e_7 = 29$, $e_8 = 47$.

f) Cada término, a partir del tercero, se obtiene restando los dos anteriores: $f_7 = 16$, $f_8 = -25$.

g) Cada término es el número del lugar que ocupa, con signo positivo si es impar, y negativo si es par: $g_7 = 7$, $g_8 = -8$.

h) Cada término, a partir del segundo, se obtiene restandole 7 al anterior: $b_6 = -15$, $b_7 = -22$.

Página 53

2. Forma una sucesión recurrente, a_n , con estos datos:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 3, \quad a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$$

$$2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

3. Escribe los cuatro primeros términos de las sucesiones que tienen como término general:

$$a_n = 3 + 5(n-1)$$

$$b_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$c_n = (-1)^n 2^n$$

$$d_n = (n-1)(n-2)$$

$$e_n = n^2 + (-1)^n n^2$$

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 8, \quad a_3 = 13, \quad a_4 = 18$$

$$b_1 = 3, \quad b_2 = \frac{3}{2}, \quad b_3 = \frac{3}{4}, \quad b_4 = \frac{3}{8}$$

$$c_1 = -2, \quad c_2 = 4, \quad c_3 = -8, \quad c_4 = 16$$

$$d_1 = 0, \quad d_2 = 0, \quad d_3 = 2, \quad d_4 = 6$$

$$e_1 = 0, \quad e_2 = 8, \quad e_3 = 0, \quad e_4 = 32$$

4. Construye una sucesión cuya ley de recurrencia sea $a_n = a_{n-1} + n$.

Si tomamos, por ejemplo, $a_1 = 1$, entonces quedaría: $a_2 = 1 + 2 = 3$, $a_3 = 3 + 3 = 6$, $a_4 = 6 + 4 = 10$, $a_5 = 10 + 5 = 15$, $a_6 = 15 + 6 = 21$, $a_7 = 21 + 7 = 28$, ...

5. Da el término general de las sucesiones siguientes que no sean recurrentes:

a) 3, 8, 13, 18, 23, ...

b) 1, 8, 27, 64, 125, ...

c) 1, 10, 100, 1 000, 10 000, ...

d) 8, 4, 2, 1, ...

e) 1, 3, 4, 7, 11, 18, ...

f) 8, 3, 5, -2, 7, -9, ...

g) 1, -2, 3, -4, 5, -6, ...

h) 20, 13, 6, -1, -8, ...

a) $a_n = 3 + (n - 1) \cdot 5$

b) $b_n = n^3$

c) $c_n = 10^{n-1}$

d) $d_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

e) Es recurrente

f) Es recurrente

g) $g_n = (-1)^{n-1} \cdot n$

h) $h_n = 20 - 7 \cdot (n - 1)$

Página 54

1. ¿Cuáles de las siguientes sucesiones son *progresiones aritméticas*? En cada una de ellas di su diferencia y añade dos términos más:

a) 3, 7, 11, 15, 19, ...

b) 3, 4, 6, 9, 13, 18, ...

c) 3, 6, 12, 24, 48, 96, ...

d) 10, 7, 4, 1, -2, ...

e) 17,4; 15,8; 14,2; 12,6; 11; ...

f) -18; -3,1; 11,8; 26,7; 41,6; ...

a) Es una progresión aritmética con $d = 4$; $a_6 = 23$, $a_7 = 27$.

b) No es una progresión aritmética.

c) No es una progresión aritmética.

d) Es una progresión aritmética con $d = -3$; $d_6 = -5$, $d_7 = -8$.

e) Es una progresión aritmética con $d = 1,6$; $e_6 = 9,4$; $e_7 = 7,8$.

f) Es una progresión aritmética con $d = 14,9$; $f_6 = 56,5$; $f_7 = 71,4$.

2. En la sucesión 1a), halla el término a_{20} y la suma de los 20 primeros términos.

$$a_{20} = a_1 + 19 \cdot d = 3 + 19 \cdot 4 = 3 + 76 = 79$$

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(3 + 79) \cdot 20}{2} = 820$$

- 3. En la sucesión 1d), halla el término d_{40} y la suma de los 40 primeros términos.**

$$d_{40} = d_1 + 39 \cdot (-3) = 10 - 117 = -107$$

$$S_{40} = \frac{(d_1 + d_{40}) \cdot 40}{2} = \frac{(10 - 107) \cdot 40}{2} = -1940$$

- 4. En la sucesión 1e), halla el término e_{100} y la suma de los 100 primeros términos.**

$$e_{100} = e_1 + 99 \cdot (-1,6) = 17,4 - 158,4 = -141$$

$$S_{100} = \frac{(e_1 + e_{100}) \cdot 100}{2} = \frac{(17,4 - 141) \cdot 100}{2} = -6180$$

- 5. En la sucesión 1f), halla los términos f_8 , f_{17} y la suma $f_8 + f_9 + \dots + f_{16} + f_{17}$.**

$$f_8 = f_1 + 7 \cdot 14,9 = -18 + 104,3 = 86,3$$

$$f_{17} = f_1 + 16 \cdot 14,9 = -18 + 238,4 = 220,4$$

En la suma pedida hay 10 sumandos.

$$S = \frac{(f_1 + f_{17}) \cdot 10}{2} = \frac{(86,3 + 220,4) \cdot 10}{2} = 1533,5$$

Página 55

- 6. ¿Cuáles de las siguientes sucesiones son *progresiones geométricas*? En cada una de ellas di su razón y añade dos términos más:**

a) 1, 3, 9, 27, 81, ...

b) 100; 50; 25; 12,5; ...

c) 12, 12, 12, 12, 12, ...

d) 5, -5, 5, -5, 5, -5, ...

e) 90, -30, 10, -10/3, 10/9, ...

a) Es una progresión geométrica con $r = 3$; $a_6 = 243$, $a_7 = 729$.

b) Es una progresión geométrica con $r = \frac{1}{2}$; $b_5 = 6,25$, $b_6 = 3,125$.

c) Es una progresión geométrica con $r = 1$; $c_6 = 12$, $c_7 = 12$.

d) Es una progresión geométrica con $r = -1$; $d_7 = 5$, $d_8 = -5$.

e) Es una progresión geométrica con $r = -\frac{1}{3}$; $e_6 = -\frac{10}{27}$, $e_7 = \frac{10}{81}$.

- 7. Calcula la suma de los 10 primeros términos de cada una de las progresiones geométricas del ejercicio anterior.**

a) $a_{10} = a_1 \cdot r^9 = 1 \cdot 3^9 = 19683$

$$S_{10} = \frac{a_{10} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{19683 \cdot 3 - 1}{3 - 1} = 29524$$

$$b) b_{10} = b_1 \cdot r^9 = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{100}{512} = \frac{25}{128}$$

$$S_{10} = \frac{b_{10} \cdot r - b_1}{r - 1} = \frac{\frac{25}{128} \cdot \frac{1}{2} - 100}{\frac{1}{2} - 1} \approx 199,805$$

$$c) c_{10} = 12; S_{10} = 12 \cdot 10 = 120$$

$$d) d_{10} = -5; S_{10} = 0$$

$$e) e_{10} = e_1 \cdot r^9 = 90 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^9 = \frac{-90}{19\,683} = \frac{-10}{2\,187}$$

$$S_{10} = \frac{e_{10} \cdot r - e_1}{r - 1} = \frac{\frac{10}{6\,561} - 90}{-\frac{1}{3} - 1} \approx 67,499$$

8. ¿En cuáles de las progresiones geométricas del ejercicio anterior puedes calcular la suma de sus infinitos términos? Hállala.

Podemos calcular la suma de sus infinitos términos en las progresiones geométricas con $|r| < 1$:

$$b) S_{\infty} = \frac{b_1}{1 - r} = \frac{100}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{100}{\frac{1}{2}} = 200$$

$$e) S_{\infty} = \frac{e_1}{1 - r} = \frac{90}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{90}{\frac{4}{3}} = 67,5$$

Página 56

9. Calcula: $1^2 + 2^2 + \dots + 30^2$

$$\frac{30 \cdot (30 + 1) \cdot (60 + 1)}{6} = \frac{30 \cdot 31 \cdot 61}{6} = 9\,455$$

10. Calcula: $50^2 + 51^2 + \dots + 60^2$

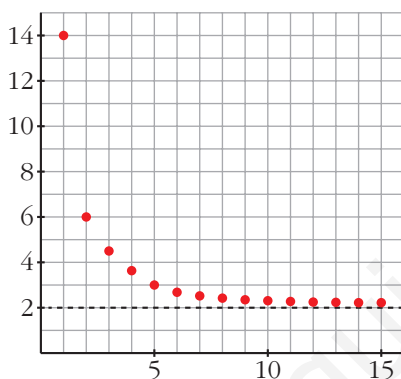
$$\begin{aligned} (1^2 + \dots + 60^2) - (1^2 + \dots + 49^2) &= \frac{60 \cdot 61 \cdot 121}{6} - \frac{49 \cdot 50 \cdot 99}{6} = \\ &= 73\,810 - 40\,425 = 33\,385 \end{aligned}$$

11. Calcula: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 15^3$

$$\frac{15^2 \cdot 16^2}{4} = 14\,400$$

12. Calcula: $2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + 20^3$

$$\begin{aligned}
 2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + 20^3 &= (2 \cdot 1)^3 + (2 \cdot 2)^3 + (2 \cdot 3)^3 + \dots + (2 \cdot 10)^3 = \\
 &= 2^3 \cdot 1^3 + 2^3 \cdot 2^3 + 2^3 \cdot 3^3 + \dots + 2^3 \cdot 10^3 = \\
 &= 2^3(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3) = \\
 &= 8 \cdot \frac{10^2 \cdot 11^2}{4} = 8 \cdot 3025 = 24200
 \end{aligned}$$

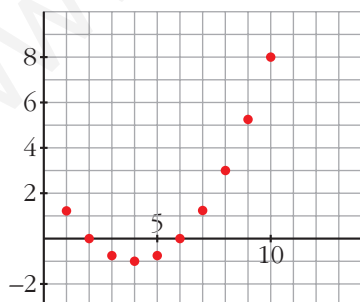
Página 57
1. Representa la sucesión $a_n = \frac{4n + 10}{2n - 1}$ y asigne un valor a su límite.


$$a_1 = 14, a_2 = 6, a_3 = 4,4; a_4 \approx 3,71;$$

$$a_5 \approx 3,33, \dots, a_{10} \approx 2,63, \dots;$$

$$a_{100} \approx 2,06; \dots; a_{1000} \approx 2,006, \dots$$

$$\lim a_n = 2$$

2. Representa la sucesión $b_n = \frac{n^2}{4} - 2n + 3$ y asigna un valor a su límite.


$$b_1 = 1,25; b_2 = 0; b_3 = -0,75;$$

$$b_4 = -1; b_5 = -0,75; b_6 = 0;$$

$$b_7 = 1,25; b_8 = 3; b_9 = 5,25; b_{10} = 8, \dots,$$

$$b_{100} = 2303, \dots$$

$$\lim b_n = +\infty$$

Página 59

3. Estudia el comportamiento de estas sucesiones para términos muy avanzados e indica su límite:

a) $a_n = \frac{2n-3}{6}$

b) $b_n = \frac{2n-3}{n+5}$

c) $c_n = 3 - 2^n$

d) $d_n = 5 - \frac{1}{n^3}$

a) $a_{10} \approx 2,83; a_{100} \approx 32,83; a_{1000} \approx 332,83, \dots$ $\lim a_n = +\infty$

b) $b_{10} \approx 1,133; b_{100} \approx 1,876; b_{1000} \approx 1,987, \dots$ $\lim b_n = 2$

c) $c_{10} = -1\,021; c_{100} \approx -1,27 \cdot 10^3, \dots$ $\lim c_n = -\infty$

d) $d_{10} = 4,999; d_{100} = 4,999999, \dots$ $\lim d_n = 5$

4. Di, razonadamente, cuáles de las siguientes sucesiones tienen límite:

a) $a_n = -\frac{2}{n^2}$

b) $b_n = (-1)^n \frac{n}{n+4}$

c) $c_n = (-1)^n n$

d) $d_n = (-1)^n \frac{2}{n^2}$

a) $a_{10} = -0,02; a_{100} = -0,0002; a_{1000} = -0,000002, \dots$ $\lim a_n = 0$.

b) $b_{10} \approx 0,714; b_{11} \approx -0,733; b_{100} \approx 0,962; b_{101} \approx -0,962, \dots$

Los términos pares son positivos y tienden a 1; los términos impares son negativos y tienden a -1. La sucesión no tiene límite.

c) $c_1 = -1, c_2 = 2, c_3 = -3, \dots c_{1000} = 1\,000, c_{1001} = -1\,001, \dots$

Los términos impares son negativos y tienden a $-\infty$; los términos pares son positivos y tienden a $+\infty$. La sucesión no tiene límite.

d) $d_1 = -2; d_2 = 0,5; \dots; d_{100} = 0,0002; d_{101} = -0,000196, \dots$ $\lim d_n = 0$.

Página 61

1. Obtén los ocho primeros valores de a_n (términos de la sucesión) y de S_n (sumas parciales) en cada una de las progresiones siguientes. Calcula en cada una el $\lim S_n$:

a) 125, 50, 20, ...

b) 125, -50, 20, ...

c) 17, -17, 17, ...

d) 17, 17, 17, ...

e) 10; 12; 14,4; ...

f) 10; -12; 14,4; ...

a) $a_1 = 125, a_2 = 50, a_3 = 20, a_4 = 8, a_5 = \frac{16}{5} = 3,2; a_6 = \frac{32}{25} = 1,28; a_7 = \frac{64}{125} = 0,512;$

$a_8 = \frac{128}{625} = 0,2048.$

$$S_1 = 125; S_2 = 175; S_3 = 195; S_4 = 203; S_5 = 206,2; S_6 = 207,48; S_7 = 207,992;$$

$$S_8 = 208,1968.$$

$$\text{Como } r = \frac{2}{5} = 0,4 < 1; \lim S_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{125}{1-\frac{2}{5}} = \frac{625}{3} = 208,\bar{3}$$

$$\text{b) } b_1 = 125; b_2 = -50; b_3 = 20; b_4 = -8; b_5 = 3,2; b_6 = -1,28; b_7 = 0,512; b_8 = -0,2048.$$

$$S_1 = 125; S_2 = 75; S_3 = 95; S_4 = 87; S_5 = 90,2; S_6 = 88,92; S_7 = 89,432; S_8 = 89,2272.$$

$$\text{Como } r = -\frac{2}{5} = -0,4 < 1; \lim S_n = \frac{b_1}{1-r} = \frac{125}{1+\frac{2}{5}} = \frac{625}{7} \approx 89,286$$

$$\text{c) } c_1 = 17; c_2 = -17; c_3 = 17; c_4 = -17; c_5 = 17; c_6 = -17; c_7 = 17; c_8 = -17.$$

$$S_1 = 17; S_2 = 0; S_3 = 17; S_4 = 0; S_5 = 17; S_6 = 0; S_7 = 17; S_8 = 0.$$

S_n no tiene límite.

$$\text{d) } d_1 = 17; d_2 = 17; d_3 = 17; d_4 = 17; d_5 = 17; d_6 = 17; d_7 = 17; d_8 = 17.$$

$$S_1 = 17; S_2 = 34; S_3 = 51; S_4 = 68; S_5 = 85; S_6 = 102; S_7 = 119; S_8 = 136.$$

$$\lim S_n = +\infty.$$

$$\text{e) } e_1 = 10; e_2 = 12; e_3 = 14,4; e_4 = 17,28; e_5 = 20,736; e_6 = 24,8832; e_7 = 29,85984;$$

$$e_8 = 35,831808.$$

$$S_1 = 10; S_2 = 22; S_3 = 36,4; S_4 = 53,68; S_5 = 74,416; S_6 = 99,2992; S_7 = 129,15904;$$

$$S_8 = 164,99084.$$

$$\text{Como } r = 1,2 > 1; \lim S_n = +\infty.$$

$$\text{f) } f_1 = 10; f_2 = -12; f_3 = 14,4; f_4 = -17,28; f_5 = 20,736; f_6 = -24,8832; f_7 = 29,85984;$$

$$f_8 = -35,831808.$$

$$S_1 = 10; S_2 = -2; S_3 = 12,4; S_4 = -4,88; S_5 = 15,856; S_6 = -9,0272; S_7 = 20,83264;$$

$$S_8 = -14,999168.$$

S_n no tiene límite.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Criterio para formar sucesiones

- 1** Describe el criterio con el que se forman estas sucesiones y añade tres términos a cada una:

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$

b) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \dots$

c) $2, 5, 10, 17, 26, \dots$

d) $0, 3, 8, 15, 24, \dots$

e) $1, 3, 6, 10, 15, \dots$

- a) Cada término lo obtenemos dividiendo 1 entre el lugar que ocupa el término:

$$a_6 = \frac{1}{6}, a_7 = \frac{1}{7}, a_8 = \frac{1}{8}$$

- b) Cada término es la raíz cuadrada del lugar que ocupa: $a_6 = \sqrt{6}, a_7 = \sqrt{7}, a_8 = \sqrt{8}$

- c) Cada término es el cuadrado del lugar que ocupa más 1 unidad: $a_6 = 37, a_7 = 50, a_8 = 65$

- d) Cada término es el cuadrado del lugar que ocupa menos 1 unidad: $a_6 = 35, a_7 = 48, a_8 = 63$

- e) Cada término, a partir del segundo, se obtiene sumándole al lugar que ocupa el término anterior: $a_6 = 21, a_7 = 28, a_8 = 36$

- 2** Escribe los cinco primeros términos de las sucesiones cuyos términos generales son estos:

a) $a_n = 3 + \frac{2}{10^n}$

b) $b_n = \frac{n^2 - 1}{n}$

c) $c_n = \frac{3n - 1}{n + 1}$

d) $d_n = 2^{-n}$

e) $e_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$

f) $f_n = \frac{(-1)^n n - n}{2}$

a) $a_1 = 3,2; a_2 = 3,02; a_3 = 3,002; a_4 = 3,0002; a_5 = 3,00002$

b) $b_1 = 0; b_2 = \frac{3}{2}; b_3 = \frac{8}{3}; b_4 = \frac{15}{4}; b_5 = \frac{24}{5}$

c) $c_1 = 1; c_2 = \frac{5}{3}; c_3 = 2; c_4 = \frac{11}{5}; c_5 = \frac{7}{3}$

d) $d_1 = \frac{1}{2}; d_2 = \frac{1}{4}; d_3 = \frac{1}{8}; d_4 = \frac{1}{16}; d_5 = \frac{1}{32}$

e) $e_1 = 1; e_2 = 2; e_3 = 6; e_4 = 24; e_5 = 120$

f) $f_1 = -1; f_2 = 0; f_3 = -3; f_4 = 0; f_5 = -5$

3 Escribe el término general de estas sucesiones:

a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

b) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$

c) $0, \frac{3}{5}, \frac{8}{10}, \frac{15}{17}, \frac{24}{26}, \dots$

d) $5, 1; 5, 01; 5, 001; 5, 0001; \dots$

a) $a_n = \frac{n}{n-1}$

b) $b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

c) $c_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$

d) $d_n = 5 + \frac{1}{10^n}$

4 Construye dos sucesiones cuyas leyes de recurrencias sean las siguientes:

a) $a_1 = 0 \quad a_2 = 2 \quad a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$

b) $a_1 = 1 \quad a_2 = 2 \quad a_n = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-2}}{2}$

a) $0, 2, 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{21}{16}, \frac{43}{32}, \dots$

b) $1, 2, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{128}, \dots$

5 Busca una ley de recurrencia para definir las siguientes sucesiones:

a) $4, 7, 3, -4, -7, \dots$

b) $2, 3, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$

a) $a_1 = 4, a_2 = 7, a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ para $n > 2$

b) $b_1 = 2, b_2 = 3, b_n = \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}$ para $n > 2$

Progresiones aritméticas**6** De las siguientes sucesiones, di cuáles son progresiones aritméticas y escribe su término general:

a) $1, 2; 2, 4; 3, 6; 4, 8; 6; \dots$

b) $5; 4, 6; 4, 2; 3, 8; 3, 4; \dots$

c) $1, 2, 4, 7, 11, \dots$

d) $14, 13, 11, 8, 4, \dots$

a) Es una progresión aritmética con $a_1 = 1, 2$ y $d = 1, 2$.

$$a_n = 1, 2 + (n - 1) \cdot 1, 2 = 1, 2n.$$

b) Es una progresión aritmética con $b_1 = 5$ y $d = -0, 4$.

$$b_n = 5 + (n - 1) \cdot (-0, 4) = -0, 4n + 5, 4.$$

c) y d) no son progresiones aritméticas.

7 De las sucesiones siguientes, indica cuáles son progresiones aritméticas:

a) $a_n = 3n$

b) $b_n = 5n - 4$

c) $c_n = \frac{1}{n}$

d) $d_n = \frac{8-3n}{4}$

e) $e_n = 5 + \frac{n}{2}$

f) $f_n = n^2 - 1$

a) $a_n - a_{n-1} = 3n - 3(n-1) = 3n - 3n + 3 = 3$

Es una progresión aritmética con $d = 3$.

b) $b_n - b_{n-1} = 5n - 4 - [5(n-1) - 4] = 5n - 4 - 5n + 5 + 4 = 5$

Es una progresión aritmética con $d = 5$.

c) $c_1 = 1, c_2 = \frac{1}{2}, c_3 = \frac{1}{3}, c_4 = \frac{1}{4}, \dots$

$c_2 - c_1 = \frac{-1}{2} \neq c_3 - c_2 = \frac{1}{6}$. No es una progresión aritmética.

d) $d_n - d_{n-1} = \frac{8-3n}{4} - \frac{8-3(n-1)}{4} = \frac{8-3n-8+3n-3}{4} = \frac{-3}{4}$

Es una progresión aritmética con $d = \frac{-3}{4}$.

e) $e_n - e_{n-1} = 5 + \frac{n}{2} - \left(5 + \frac{n-1}{2}\right) = 5 + \frac{n}{2} - 5 - \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Es una progresión aritmética con $d = \frac{1}{2}$.

f) $f_1 = 0, f_2 = 3, f_3 = 8, f_4 = 15, \dots$

$f_2 - f_1 = 3 \neq f_3 - f_2 = 5$. No es una progresión aritmética.

8 Calcula los términos a_{10} y a_{100} de las siguientes progresiones aritméticas:

a) $-4, -2, 0, 2, 4, \dots$

b) $2, -3, -8, -13, -18, \dots$

c) $\frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \dots$

a) $a_{10} = a_1 + 9d = -4 + 9 \cdot 2 = -4 + 18 = 14$

$a_{100} = a_1 + 99d = -4 + 99 \cdot 2 = -4 + 198 = 194$

b) $a_{10} = a_1 + 9d = 2 - 9 \cdot 5 = 2 - 45 = -43$

$a_{100} = a_1 + 99d = 2 - 99 \cdot 5 = 2 - 495 = -493$

$$c) a_{10} = a_1 + 9d = \frac{3}{4} + 9 \cdot \frac{1}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$a_{100} = a_1 + 99d = \frac{3}{4} + 99 \cdot \frac{1}{4} = \frac{102}{4} = \frac{51}{2}$$

9 Calcula la suma de los 25 primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas:

a) 3, 6, 9, 12, 15, ...

b) 5; 4,9; 4,8; 4,7; 4,6; ...

c) $c_n = 4n - 2$

d) $d_n = \frac{1 - 2n}{2}$

a) $a_1 = 3; a_{25} = a_1 + 24d = 3 + 24 \cdot 3 = 75$

$$S_{25} = \frac{(a_1 + a_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(3 + 75) \cdot 25}{2} = 975$$

b) $b_1 = 5; b_{25} = b_1 + 24d = 5 - 24 \cdot 0,1 = 2,6$

$$S_{25} = \frac{(b_1 + b_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(5 + 2,6) \cdot 25}{2} = 95$$

c) $c_1 = 2; c_{25} = 98$

$$S_{25} = \frac{(c_1 + c_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(2 + 98) \cdot 25}{2} = 1250$$

d) $d_1 = \frac{-1}{2}; d_{25} = \frac{-49}{2}$

$$S_{25} = \frac{(d_1 + d_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{\left(-\frac{1}{2} - \frac{49}{2}\right) \cdot 25}{2} = \frac{-625}{2} = -312,5$$

Progresiones geométricas

10 De las siguientes sucesiones, ¿cuáles son progresiones geométricas? Escribe tres términos más en cada una y también su término general.

a) 32, 16, 8, 4, 2, ...

b) 1; 0,1; 0,01; 0,001; ...

c) 1, 4, 9, 16, 25, ...

d) $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \dots$

a) Es una progresión geométrica con $a_1 = 32$ y $r = \frac{1}{2}$.

$$a_6 = 1, a_7 = \frac{1}{2}, a_8 = \frac{1}{4}; a_n = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2^5}{2^{n-1}} = 2^{6-n}$$

b) No es una progresión geométrica; $b_6 = 36, b_7 = 49, b_8 = 64, b_n = n^2$.

c) Es una progresión geométrica con $c_1 = 1$ y $r = 0,1$.

$$c_6 = 0,00001; c_7 = 0,000001; c_8 = 0,0000001; c_n = 1 \cdot 0,1^{n-1} = 0,1^{n-1}$$

d) Es una progresión geométrica con $d_1 = \sqrt{2}$ y $r = \sqrt{2}$.

$$d_6 = 8; d_7 = 8\sqrt{2}; d_8 = 16; d_n = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^{n-1} = (\sqrt{2})^n$$

11 Calcula la suma de los 25 primeros términos de las siguientes progresiones geométricas y halla la suma de los infinitos términos en los casos que sea posible:

a) $a_1 = 32, r = \frac{1}{2}$

b) $a_1 = 10, r = \frac{1}{10}$

c) $a_1 = 2^{-10}, r = 2$

d) $a_1 = -5, r = -\frac{1}{4}$

$$S_{25} = \frac{a_{25} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot r^{25} - a_1}{r - 1}, S_{\infty} = \frac{a_1}{1 - r}$$

a) $S_{25} = \frac{32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{25} - 32}{\frac{1}{2} - 1} = 63,99999809 \approx 64$ $S_{\infty} = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{32}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{32}{\frac{1}{2}} = 64$

b) $S_{25} = \frac{10 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{25} - 10}{\frac{1}{10} - 1} \approx 11,1 \approx \frac{100}{9}$ $S_{\infty} = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{10}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{100}{9} = 11,1$

c) $S_{25} = \frac{2^{-10} \cdot 2^{25} - 2^{-10}}{2 - 1} = 32767,99902 \approx 32768$

No se puede calcular S_{∞} porque $|r|$ no es mayor que 1.

d) $S_{25} = \frac{(-5) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{25} - (-5)}{-\frac{1}{4} - 1} \approx -4$ $S_{\infty} = \frac{-5}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{-5}{\frac{5}{4}} = -4$

Página 65

Suma de potencias

12 a) Demuestra que:

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 = 4(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)$$

b) Calcula la suma de los cuadrados de los 50 primeros números pares.

c) Calcula la suma de los cuadrados de todos los números impares menores que 100.

$$\begin{aligned} \text{a) } 2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 &= (2 \cdot 1)^2 + (2 \cdot 2)^2 + (2 \cdot 3)^2 + (2 \cdot 4)^2 + (2 \cdot 5)^2 = \\ &= 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 98^2 + 100^2 &= 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 49^2 + 50^2) = \\ &= 2^2 \frac{50 \cdot 51 \cdot 101}{6} = 171\,700 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 99^2 &= \\ &= (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 99^2 + 100^2) - (2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 98^2 + 100^2) = \\ &= \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} - 171\,700 = 338\,350 - 171\,700 = 166\,650 \end{aligned}$$

13 Halla la suma siguiente:

$$\begin{aligned} &21^3 + 22^3 + 23^3 + \dots + 37^3 + 38^3 + 39^3 + 40^3 \\ 21^3 + \dots + 40^3 &= (1^3 + 2^3 + \dots + 20^3 + 21^3 + \dots + 40^3) - (1^3 + \dots + 20^3) = \\ &= \frac{40^2 \cdot 41^2}{4} - \frac{20^2 \cdot 21^2}{4} = 672\,400 - 44\,100 = 628\,300 \end{aligned}$$

Límite de una sucesión

14 Calcula los términos a_{10} , a_{100} y a_{1000} , en cada sucesión e indica cuál es su límite:

$$\text{a) } a_n = \frac{1}{n-1}$$

$$\text{b) } a_n = \frac{2n+5}{n}$$

$$\text{c) } a_n = \frac{5}{n} - 1$$

$$\text{d) } a_n = 3 - 7n$$

$$\text{a) } a_{10} = 0,\widehat{1}; a_{100} = 0,\widehat{01}; a_{1000} = 0,\widehat{001}$$

$$\lim a_n = 0$$

$$\text{b) } a_{10} = 2,5; a_{100} = 2,05; a_{1000} = 2,005$$

$$\lim a_n = 2$$

$$\text{c) } a_{10} = -0,5; a_{100} = -0,95; a_{1000} = -0,995$$

$$\lim a_n = -1$$

$$\text{d) } a_{10} = -6,7; a_{100} = -697; a_{1000} = -6997$$

$$\lim a_n = -\infty$$

15 Halla algunos términos muy avanzados de las siguientes sucesiones e indica cuál es su límite:

a) $a_n = 5n - 10$

b) $b_n = 100 - n$

c) $c_n = \frac{n-3}{n+1}$

d) $d_n = \frac{n}{2n+1}$

a) $a_{10} = 40; a_{100} = 490; a_{1000} = 4990$

$\lim a_n = +\infty$

b) $b_{10} = 90; b_{100} = 0; b_{1000} = -900$

$\lim b_n = -\infty$

c) $c_{10} = 0,63; c_{100} \approx 0,9603; c_{1000} \approx 0,996$

$\lim c_n = 1$

d) $d_{10} \approx 0,476; d_{100} \approx 0,498; d_{1000} \approx 0,4998$

$\lim d_n = 0,5 = \frac{1}{2}$

16 Estudia el comportamiento de las siguientes sucesiones para términos muy avanzados e indica cuál es el límite de cada una de ellas:

a) $a_n = 3n^2 - 10$

b) $b_n = 3n - n^2$

c) $c_n = 10 - 5n + n^2$

d) $d_n = (1 - 2n)^2$

e) $e_n = (4 - n)^3$

f) $f_n = 1 - (n + 2)^2$

a) $a_{10} = 290; a_{100} = 29990; a_{1000} = 2999990$

$\lim a_n = +\infty$

b) $b_{10} = -70; b_{100} = -9700; b_{1000} = -997000$

$\lim b_n = -\infty$

c) $c_{10} = 60; c_{100} = 9510; c_{1000} = 995010$

$\lim c_n = +\infty$

d) $d_{10} = 361; d_{100} = 39601; d_{1000} = 3996001$

$\lim d_n = +\infty$

e) $e_{10} = -216; e_{100} = -884736; e_{1000} = -988047936$

$\lim e_n = -\infty$

f) $f_{10} = -143; f_{100} = -10403; f_{1000} = -1004003$

$\lim f_n = -\infty$

17 Estudia el comportamiento de las siguientes sucesiones para términos muy avanzados e indica cuál es el límite de cada una de ellas:

a) $a_n = \frac{1}{3n}$

b) $b_n = \frac{5}{3n+2}$

c) $c_n = \frac{3}{n+1}$

d) $d_n = \frac{3n}{n^2+1}$

e) $e_n = \frac{1}{n^2}$

f) $f_n = \frac{-100}{n^2}$

g) $g_n = (-1)^n$

h) $h_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

a) $a_{10} = 0,0\overline{3}$; $a_{100} = 0,00\overline{3}$; $a_{1000} = 0,000\overline{3}$

$\lim a_n = 0$

b) $b_{10} = 0,15625$; $b_{100} = 0,01656$; $b_{1000} = 0,00167$

$\lim b_n = 0$

c) $c_{10} = 0,2\overline{7}$; $c_{100} = 0,029\overline{7}$; $c_{1000} = 0,00299\overline{7}$

$\lim c_n = 0$

d) $d_{10} = 0,297$; $d_{100} = 0,029997$; $d_{1000} = 0,002999997$

$\lim d_n = 0$

e) $e_{10} = 0,01$; $e_{100} = 0,0001$; $e_{1000} = 0,000001$

$\lim e_n = 0$

f) $f_{10} = -1$; $f_{100} = -0,01$; $f_{1000} = -0,0001$

$\lim f_n = 0$

g) $g_{10} = 1$; $g_{101} = -1$; $g_{1000} = 1$; $g_{10001} = -1$

La sucesión no tiene límite.

h) $h_{10} = 0,0909$; $h_{100} = 0,0099$; $h_{1000} = 0,000999$; $h_{1001} = -0,000999$

$\lim h_n = 0$

PARA RESOLVER

18 Calcula el 15.º término en la siguiente progresión:

$$3; 2,7; 2,4; 2,1; \dots$$

Es una progresión aritmética con $a_1 = 3$ y $d = -0,3$.

Por tanto, $a_{15} = a_1 + 14d = 3 - 0,3 \cdot 14 = 3 - 4,2 = -1,2$.

- 19** Halla el cuarto término de una progresión aritmética en la que $d = 3$ y $a_{20} = 100$.

$$a_{20} = a_4 + 16d \rightarrow a_4 = a_{20} - 16d = 100 - 16 \cdot 3 = 52$$

- 20** Calcula la suma de todos los números impares de tres cifras.

Es la suma de los términos de una progresión aritmética en la que el primer término es 101, el último es 999, y hay 450 sumandos:

$$S = \frac{(101 + 999) \cdot 450}{2} = 247\,500$$

- 21** ¿Cuánto vale la suma de los 100 primeros múltiplos de 7?

Queremos calcular la suma de los 100 primeros términos de una progresión aritmética en la que $a_1 = 7$ y $d = 7$.

$$S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100}) \cdot 100}{2} = \frac{(7 + 700) \cdot 100}{2} = 35\,350$$

- 22** En una progresión aritmética sabemos que $d = 3$, $a_n = 34$ y $S_n = 133$. Calcula n y a_1 .

$$\left. \begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \rightarrow 34 = a_1 + (n-1) \cdot 3 \\ S_n &= \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \rightarrow 133 = \frac{(a_1 + 34) \cdot n}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$34 = a_1 + 3n - 3 \rightarrow a_1 = 37 - 3n$$

$$133 = \frac{(37 - 3n + 34) \cdot n}{2} \rightarrow 266 = (71 - 3n)n$$

$$266 = 71n - 3n^2 \rightarrow 3n^2 - 71n + 266 = 0$$

$$n = \frac{71 \pm \sqrt{5041 - 3192}}{6} = \frac{71 \pm \sqrt{1849}}{6} = \frac{71 \pm 43}{6} = \begin{cases} n = 14/3 \text{ (no vale)} \\ n = 19 \end{cases}$$

$$a_1 = 37 - 3 \cdot 19 = 37 - 57 = -20 \rightarrow a_1 = -20$$

- 23** Los lados de un hexágono están en progresión aritmética. Calcúlalos sabiendo que el mayor mide 13 cm y que el perímetro vale 48 cm.

Llamamos a los lados a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 y a_6 .

Sabemos que $a_6 = 13$ cm y que $S_6 = 48$. Por tanto:

$$\left\{ \begin{aligned} a_6 &= a_1 + 5d \rightarrow 13 = a_1 + 5d \rightarrow a_1 = 13 - 5d \\ S_6 &= \frac{(a_1 + a_6) \cdot 6}{2} \rightarrow 48 = (13 - 5d + 13) \cdot 3 \rightarrow 48 = (26 - 5d) \cdot 3 \end{aligned} \right.$$

$$48 = 78 - 15d \rightarrow 15d = 30 \rightarrow d = \frac{30}{15} = 2 \rightarrow d = 2$$

$$a_1 = 13 - 5 \cdot 2 = 13 - 10 = 3 \rightarrow a_1 = 3$$

Los lados del hexágono miden 3 cm, 5 cm, 7 cm, 9 cm, 11 cm y 13 cm.

- 24** En un cine, la segunda fila de butacas está a 10 m de la pantalla y la séptima fila está a 16 m. ¿En qué fila debe sentarse una persona que le guste ver la pantalla a una distancia de 28 m?

$$a_7 = 16 \rightarrow a_7 = a_2 + 5d = 10 + 5d = 16 \rightarrow d = 1,2$$

(La distancia entre las dos filas consecutivas es de 1,2 metros).

Buscamos n para que $a_n = 28$ m:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d = 8,8 + (n-1) \cdot 1,2 = 28 \rightarrow 8,8 + 1,2n - 1,2 = 28 \\ 1,2n &= 20,4 \rightarrow n = 17 \end{aligned}$$

La fila 17 está a 28 metros.

- 25** Escribe los términos intermedios de una progresión aritmética sabiendo que $a_1 = -3$ y $a_{10} = 18$.

$$a_{10} = a_1 + 9d = -3 + 9d = 18 \rightarrow d = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$$

Los términos son: $a_1 = -3$, $a_2 = -\frac{2}{3}$, $a_3 = \frac{5}{3}$, $a_4 = 4$, $a_5 = \frac{19}{3}$, $a_6 = \frac{26}{3}$, $a_7 = 11$,

$$a_8 = \frac{40}{3}, a_9 = \frac{47}{3}, a_{10} = 18.$$

- 26** Halla los dos términos centrales de una progresión aritmética de 8 términos sabiendo que $S_8 = 100$ y que $a_1 + 2a_8 = 48$.

Tenemos que calcular a_4 y a_5 . Sabemos que:

$$\begin{cases} S_8 = \frac{(a_1 + a_8) \cdot 8}{2} = (a_1 + a_8) \cdot 4 = 100 \rightarrow a_1 + a_8 = 25 \\ a_1 + 2a_8 = 48 \end{cases}$$

Restando a la 2.^a ecuación la 1.^a, queda:

$$a_8 = 23 \rightarrow a_1 = 25 - a_8 = 25 - 23 = 2 \rightarrow a_1 = 2$$

$$a_8 = a_1 + 7d = 2 + 7d = 23 \rightarrow d = 3$$

Por tanto:

$$\begin{cases} a_4 = a_1 + 3d = 2 + 9 = 11 \\ a_5 = a_4 + d = 11 + 3 = 14 \end{cases} \quad \begin{matrix} a_4 = 11 \\ a_5 = 14 \end{matrix}$$

- 27** En una progresión geométrica, $a_1 = 8$ y $a_3 = 0,5$. Calcula a_5 y la expresión de a_n .

$$a_3 = a_1 \cdot r^2 = 8r^2 = 0,5 \rightarrow r^2 = 0,0625 \rightarrow r = \pm 0,25 = \pm \frac{1}{4}$$

1.º caso: $r = 0,25 = \frac{1}{4}$

$$a_5 = a_1 \cdot r^4 = 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{32} = 0,03125$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{2^3}{2^{2n-2}} = \frac{1}{2^{2n-5}}$$

2.º caso: $r = -0,25 = -\frac{1}{4}$

$$a_5 = a_1 \cdot r^4 = \frac{1}{32} = 0,03125$$

$$a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

- 28** En una progresión geométrica de razón $r = 3$ conocemos $S_6 = 1456$. Calcula a_1 y a_4 .

$$S_6 = \frac{a_6 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot r^6 - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot 729 - a_1}{2} = \frac{728a_1}{2} =$$

$$= 364a_1 = 1456 \rightarrow a_1 = 4$$

$$a_4 = a_1 \cdot r^3 = 4 \cdot 27 = 108$$

- 29** La maquinaria de una fábrica pierde cada año un 20% de su valor. Si costó 4 millones de euros, ¿en cuánto se valorará después de 10 años de funcionamiento?

– Al cabo de 1 año valdrá $\rightarrow (4 \cdot 10^6) \cdot 0,8 \text{ €}$

– Al cabo de 2 años valdrá $\rightarrow (4 \cdot 10^6) \cdot 0,8^2 \text{ €}$

...

– Al cabo de 10 años valdrá $\rightarrow (4 \cdot 10^6) \cdot 0,8^{10} \approx 429496,73 \text{ €}$

- 30** El 1 de enero depositamos 5 000 € en una cuenta bancaria a un interés anual del 6% con pago mensual de intereses. ¿Cuál será el valor de nuestro dinero un año después?

☛ Un 6% anual corresponde a $\frac{6}{12} = 0,5\%$ mensual. Cada mes el dinero se multiplica por 1,005.

– Al cabo de 1 mes tendremos $\rightarrow 5000 \cdot 1,005 \text{ €}$

– Al cabo de 2 meses tendremos $\rightarrow 5000 \cdot 1,005^2 \text{ €}$

...

– Al cabo de 12 meses tendremos $\rightarrow 5000 \cdot 1,005^{12} \approx 5308,39 \text{ €}$

Página 66

- 31** La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica es igual a 4 y $a_2 = 1$. Calcula a_1 y la razón.

$$\begin{cases} a_2 = a_1 \cdot r = 1 \rightarrow a_1 = \frac{1}{r} \\ S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1/r}{1-r} = \frac{1}{r-r^2} = 4 \rightarrow 1 = 4r - 4r^2 \end{cases}$$

$$4r^2 - 4r + 1 = 0 \rightarrow r = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \rightarrow r = \frac{1}{2} \rightarrow a_1 = 2$$

- 32** Comprueba, dando a n valores grandes, que las siguientes sucesiones tienden a un número y di cuál es ese número:

a) $a_n = \frac{5n-3}{2n+1}$

b) $b_n = \frac{1-2n^2}{n^2+1}$

c) $c_n = 1 + \frac{1}{2^n}$

d) $d_n = \frac{2n^2-5}{n^3}$

a) $a_{10} = 2,238; a_{100} = 2,473; a_{1000} = 2,497$

$$\lim a_n = 2,5 = \frac{5}{2}$$

b) $b_{10} = -1,970; b_{100} = -1,9997; b_{1000} = -1,999997$

$$\lim b_n = -2$$

c) $c_{10} = 1,000977; c_{20} = 1,00000954$

$$\lim c_n = 1$$

d) $d_{10} = 0,195; d_{100} = 0,019995; d_{1000} = 0,001999995$

$$\lim d_n = 0$$

- 33** Calcula el límite de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = \frac{(n-1)^2}{n^2+3}$

b) $b_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{2n}$

c) $c_n = \frac{3n+1}{\sqrt{n}}$

d) $d_n = \sqrt{\frac{4n-3}{n+2}}$

e) $e_n = \frac{(1+n)^3}{(n-2)^2}$

f) $f_n = \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$

a) $a_{10} = 0,7864; a_{100} = 0,9798; a_{1000} = 0,9980$

$$\lim a_n = 1$$

b) $b_{10} = 0,5025$; $b_{100} = 0,500025$; $b_{1000} = 0,50000025$

$$\lim b_n = 0,5 = \frac{1}{2}$$

c) $c_{10} = 9,80$; $c_{100} = 30,1$; $c_{1000} = 94,90$

$$\lim c_n = +\infty$$

d) $d_{10} = 1,756$; $d_{100} = 1,973$; $d_{1000} = 1,997$

$$\lim d_n = 2$$

e) $e_{10} = 20,797$; $e_{100} = 107,278$; $e_{1000} = 1007,027$

$$\lim e_n = +\infty$$

f) $f_{10} = 0,760$; $f_{100} = 0,909$; $f_{1000} = 0,969$

$$\lim f_n = 1$$

34 Comprueba si tienen límite las siguientes sucesiones:

a) $a_n = (-1)^n \frac{2n+1}{n}$

b) $b_n = 1 + (-1)^n$

c) $c_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$

d) $d_n = \frac{n + (-1)^n}{n}$

a) $a_{100} = 2,01$; $a_{101} = -2,0099$; $a_{1000} = 2,001$; $a_{1001} = -2,000999$

Los términos pares tienden a 2 y los impares a -2.

a_n no tiene límite.

b) $b_1 = 0$; $b_2 = 2$; $b_3 = 0$; $b_4 = 2$, ...

Los términos impares son 0 y los pares son 2.

b_n no tiene límite.

c) $c_1 = 0$; $c_2 = 1$; $c_3 = 0$; $c_4 = 0,5$; ...; $c_{100} = 0,02$

Los términos impares son cero y los pares tienden a cero.

$$\lim c_n = 0.$$

d) $d_1 = 0$; $d_2 = 1,5$; $d_3 = 0,67$; $d_4 = 1,25$; ...; $d_{100} = 1,01$; $d_{101} = 0,99$

$$\lim d_n = 1.$$

35 Dadas las sucesiones $a_n = n^2$ y $b_n = \frac{1}{n^2 + 1}$, estudia el límite de:

a) $a_n + b_n$ b) $a_n \cdot b_n$ c) $\frac{a_n}{b_n}$

a) $A_n = a_n + b_n = n^2 + \frac{1}{n^2 + 1}$

$A_{10} = 100,0099; A_{100} = 10\,000,0001$

$\lim (a_n + b_n) = +\infty$

b) $B_n = a_n \cdot b_n = n^2 \cdot \frac{1}{n^2 + 1} = \frac{n^2}{n^2 + 1}$

$B_{10} = 0,9901; B_{100} = 0,9999$

$\lim (a_n \cdot b_n) = 1$

c) $C_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2}{1/(n^2 + 1)} = n^2(n^2 + 1) = n^4 + n^2$

$C_{10} = 10\,100; C_{100} = 100\,010\,000$

$\lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = +\infty$

36 Durante 5 años depositamos en un banco 2000 € al 4% con pago anual de intereses.

a) ¿En cuánto se convierte cada depósito al final del quinto año?

b) ¿Qué cantidad de dinero hemos acumulado durante esos 5 años?

a) Al final del 5º año:

– Los primeros 2000 € se convierten en $2000 \cdot 1,04^5 \text{ €} \approx 2\,433,31 \text{ €}$

– Los segundos 2000 € se convierten en $2000 \cdot 1,04^4 \text{ €} \approx 2\,339,72 \text{ €}$

– Los terceros 2000 € se convierten en $2000 \cdot 1,04^3 \text{ €} \approx 2\,249,73 \text{ €}$

– Los cuartos 2000 € se convierten en $2000 \cdot 1,04^2 \text{ €} = 2\,163,2 \text{ €}$

– Los quintos 2000 € se convierten en $2000 \cdot 1,04 \text{ €} = 2\,080 \text{ €}$

b) Sumamos las cantidades anteriores:

$$2000 \cdot 1,04^5 + 2000 \cdot 1,04^4 + 2000 \cdot 1,04^3 + 2000 \cdot 1,04^2 + 2000 \cdot 1,04 =$$

$$= 2000(1,04^5 + 1,04^4 + 1,04^3 + 1,04^2 + 1,04) \stackrel{(*)}{=}$$

$$= 2000 \cdot \frac{1,04^6 - 1,04}{1,04 - 1} = 11\,265,95 \text{ €}$$

(*) Suma de una progresión geométrica con $a_1 = 1,04$ y $r = 1,04$.

- 37** Recibimos un préstamo de 2 000 € al 10% de interés anual y hemos de devolverlo en 4 años, pagando cada año los intereses de la parte adeudada más la cuarta parte del capital prestado. Calcula lo que tenemos que pagar cada año.

$$a_1 = 500 + 2000 \cdot 0,1 = 700 \text{ €}$$

$$a_2 = 500 + 1500 \cdot 0,1 = 650 \text{ €}$$

$$a_3 = 500 + 1000 \cdot 0,1 = 600 \text{ €}$$

$$a_4 = 500 + 500 \cdot 0,1 = 550 \text{ €}$$

- 38** Halla el término general de la sucesión: $2, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[5]{2}, \dots$ y estudia su límite.

$$a_n = \sqrt[n]{2} = 2^{1/n}$$

$$a_1 = 2; a_2 = \sqrt{2} \approx 1,4142; a_3 = \sqrt[3]{2} \approx 1,2599; a_4 = \sqrt[4]{2} \approx 1,1892; \dots; a_{10} \approx 1,0718$$

$$a_{100} \approx 1,00696; \lim a_n = 1$$

- 39** Dadas las sucesiones $a_n = n + 3$ y $b_n = 2 - n$, calcula los siguientes límites:

a) $\lim (a_n + b_n)$

b) $\lim (a_n - b_n)$

c) $\lim (a_n \cdot b_n)$

d) $\lim \frac{a_n}{b_n}$

a) $A_n = a_n + b_n = n + 3 + 2 - n = 5$

$$\lim (a_n + b_n) = 5$$

b) $B_n = a_n - b_n = n + 3 - (2 - n) = n + 3 - 2 + n = 2n + 1$

$$B_{10} = 21; B_{100} = 201; B_{1000} = 2001$$

$$\lim (a_n - b_n) = +\infty$$

c) $C_n = a_n \cdot b_n = (n + 3)(2 - n) = 2n - n^2 + 6 - 3n = -n^2 - n + 6$

$$C_{10} = -104; C_{100} = -10094; C_{1000} = -1000994$$

$$\lim (a_n \cdot b_n) = -\infty$$

d) $D_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{n + 3}{2 - n}$

$$D_{10} = -1,625; D_{100} = -1,051; D_{1000} = -1,005$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = -1$$

40 La sucesión $x^2 - x + 1$; $x^2 + 1$; $x^2 + x + 1$, ¿es una progresión aritmética?

Si lo fuese, calcula el quinto término y la suma de los cinco primeros términos.

Llamamos $a_1 = x^2 - x + 1$; $a_2 = x^2 + 1$; $a_3 = x^2 + x + 1$.

Veamos si la diferencia entre cada dos términos consecutivos es la misma:

$$a_2 - a_1 = x^2 + 1 - (x^2 - x + 1) = x^2 + 1 - x^2 + x - 1 = x$$

$$a_3 - a_2 = x^2 + x + 1 - (x^2 + 1) = x^2 + x + 1 - x^2 - 1 = x$$

Por tanto, sí es una progresión aritmética con $a_1 = x^2 - x + 1$ y diferencia $d = x$.

Así, tenemos que:

$$a_5 = a_1 + 4 \cdot d = x^2 - x + 1 + 4x = x^2 + 3x + 1$$

$$S_5 = \frac{(a_1 + a_5) \cdot 5}{2} = \frac{(x^2 - x + 1 + x^2 + 3x + 1) \cdot 5}{2} = \frac{(2x^2 + 2x + 2) \cdot 5}{2}$$

$$= (x^2 + x + 1) \cdot 5 = 5x^2 + 5x + 5$$

41 Halla la siguiente suma:

$$11^3 + 13^3 + 15^3 + 17^3 + \dots + 33^3$$

Llamamos $S = 11^3 + 13^3 + \dots + 31^3 + 33^3$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 + 11^3 + 12^3 + \dots + 32^3 + 33^3 = \frac{33^2 \cdot 34^2}{4} = 314\,721$$

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + 32^3 = 2^3(1^3 + 2^3 + \dots + 16^3) = 8 \cdot \frac{16^2 \cdot 17^2}{4} = 147\,968$$

Por tanto:

$$1^3 + 3^3 + \dots + 9^3 + 11^3 + 13^3 + \dots + 31^3 + 33^3 = 314\,721 - 147\,968 = 166\,753$$

$$S = 166\,753 - (1^3 + 3^3 + \dots + 9^3) = 166\,753 - 1\,225 = 165\,528$$

CUESTIONES TEÓRICAS

42 Sea a_n una progresión aritmética con $d > 0$. ¿Cuál es su límite?

Si $d > 0$, la sucesión se va haciendo cada vez mayor. Por tanto, $\lim a_n = +\infty$.

43 Si a_n es una progresión geométrica con $r = \frac{1}{3}$, ¿cuál es su límite?

Al ir multiplicando por $\frac{1}{3}$ sucesivamente, los términos se van aproximando a cero.

Es decir, $\lim a_n = 0$.

- 44** La sucesión $3, 3, 3, 3, \dots$ puede considerarse una progresión aritmética y también geométrica. ¿Cuál es la diferencia en el primer caso? ¿Y la razón en el segundo?

- Es una progresión aritmética con $d = 0$.
- También es una progresión geométrica con $r = 1$.

- 45** En una progresión geométrica cualquiera, a, ar, ar^2, ar^3, \dots , comprueba que:

$$a_1 \cdot a_6 = a_2 \cdot a_5 = a_3 \cdot a_4$$

¿Se verifica también $a_3 \cdot a_7 = a_4 \cdot a_6$? Enuncia una propiedad que exprese los resultados anteriores.

$$\left. \begin{array}{l} a_1 \cdot a_6 = a \cdot (a \cdot r^5) = a^2 \cdot r^5 \\ a_2 \cdot a_5 = (a \cdot r) \cdot (a \cdot r^4) = a^2 \cdot r^5 \\ a_3 \cdot a_4 = (a \cdot r^2) \cdot (a \cdot r^3) = a^2 \cdot r^5 \end{array} \right\} \text{ Son iguales}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_3 \cdot a_7 = (a \cdot r^2) \cdot (a \cdot r^6) = a^2 \cdot r^8 \\ a_4 \cdot a_6 = (a \cdot r^3) \cdot (a \cdot r^5) = a^2 \cdot r^8 \end{array} \right\} \text{ Son iguales}$$

Propiedad: Si a_n es una progresión geométrica, se verifica que $a_p \cdot a_q = a_m \cdot a_n$ siempre que $p + q = m + n$.

- 46** El número $3,\overline{9}$ podemos considerarlo como la suma de los infinitos términos de la sucesión:

$$3, \frac{9}{10}, \frac{9}{100}, \frac{9}{1000}, \dots$$

Calcula la suma y halla su límite. ¿Te parece razonable el resultado obtenido?

$$3 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots = 3 + 0,9 + 0,99 + 0,999 + \dots = 3,\overline{9}$$

Si consideramos la progresión geométrica $\frac{9}{10}, \frac{9}{100}, \frac{9}{1000}, \dots$ y sumamos todos sus términos, queda:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1$$

Por tanto: $3 + \left(\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots \right) = 3 + 1 = 4$

47 Inventa dos sucesiones cuyo límite sea infinito y que, al dividir las, la sucesión que resulte tienda a 2.

Por ejemplo: $a_n = 2n; b_n = n + 1$

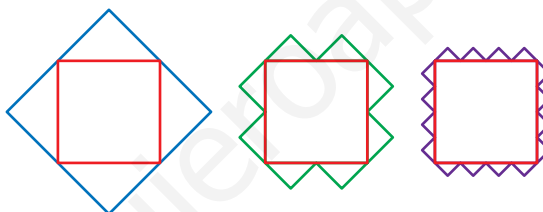
$$\lim a_n = +\infty; \lim b_n = +\infty$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{2n}{n + 1} = 2$$

Página 67

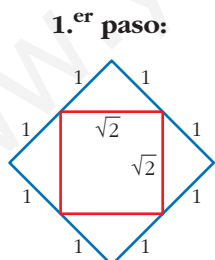
PARA PROFUNDIZAR

48 Dibuja un cuadrado de lado $\sqrt{2}$ cm y sobre cada lado un triángulo rectángulo isósceles; después dos, luego cuatro, como indican las figuras:



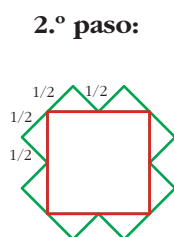
a) Forma la sucesión de los perímetros de las figuras obtenidas. ¿Cuál es su límite?

b) Forma también la sucesión de las áreas. ¿Cuál es su límite?



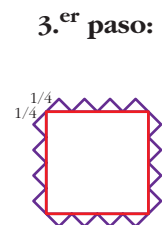
Perímetro = 8 cm

$$\text{Área} = 2 + 2 = 4 \text{ cm}^2$$



Perímetro = 8 cm

$$\text{Área} = 2 + 1 = 3 \text{ cm}^2$$



Perímetro = 8 cm

$$\text{Área} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \text{ cm}^2$$

$$\dots \text{ Paso } n\text{-ésimo: } \begin{cases} \text{Perímetro} = 8 \text{ cm} \\ \text{Área} = 2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ cm}^2 \end{cases}$$

- a) $8, 8, 8, 8, \dots$; $P_n = 8$; $\lim P_n = 8$
 b) $4, 3, \frac{5}{2}, \dots$; $A_n = 2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; $\lim A_n = 2$

(que es el área del cuadrado de lado $\sqrt{2}$).

- 49** Los términos de la sucesión 1, 3, 6, 10, 15 se llaman números triangulares porque se pueden representar así:



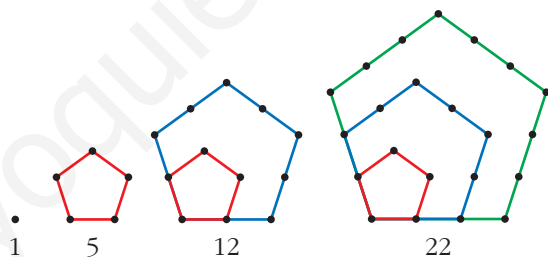
Calcula a_{10} y a_n .

$$a_1 = 1; a_2 = 1 + 2 = 3; a_3 = 1 + 2 + 3 = 6; a_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10;$$

$$a_{10} = 1 + 2 + 3 + \dots + 10 = \frac{(1 + 10) \cdot 10}{2} = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55$$

$$a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(1 + n) \cdot n}{2}$$

- 50** Los términos de la sucesión 1, 5, 12, 22, 35 se llaman números pentagonales porque se pueden representar así:



Calcula a_6 , a_{10} y a_n .

• Esos números se pueden escribir así:

$$1; 1 + 4; 1 + 4 + 7; 1 + 4 + 7 + 10; 1 + 4 + 7 + 10 + 13$$

$$a_1 = 1; a_2 = 1 + 4 = 5; a_3 = 1 + 4 + 7 = 12; a_4 = 1 + 4 + 7 + 10 = 22$$

Observamos que vamos obteniendo las sumas de los términos de una progresión aritmética con $a_1 = 1$ y $d = 3$. En el paso n -ésimo tendremos:

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 4 + 7 + \dots + (1 + (n-1) \cdot 3) = 1 + 4 + 7 + \dots + (3n-2) = \\ &= \frac{(1 + (3n-2)) \cdot n}{2} = \frac{(1 + 3n-2) \cdot n}{2} = \frac{(3n-1) \cdot n}{2} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$a_6 = \frac{17 \cdot 6}{2} = 17 \cdot 3 = 51; a_{10} = \frac{29 \cdot 10}{2} = 145$$

51 Utiliza las propiedades de las progresiones para simplificar la expresión del término general y calcular el límite de las siguientes sucesiones:

$$\text{a) } a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$$

$$\text{b) } b_n = 2n \left(\frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^3} + \frac{3}{n^3} + \dots + \frac{n}{n^3} \right)$$

$$\text{a) } a_n = \frac{1}{n^2} (1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{1}{n^2} \left(\frac{(1+n) \cdot n}{2} \right) = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{n+n^2}{2} \right) = \frac{n^2+n}{2n^2}$$

$$\text{Hallamos el límite: } a_{10} = 0,55; a_{100} = 0,505; a_{1000} = 0,5005; \lim a_n = 0,5 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } b_n &= \frac{2n}{n^3} (1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{2n}{n^3} \left(\frac{(1+n) \cdot n}{2} \right) = \frac{2n}{n^3} \cdot \left(\frac{n+n^2}{2} \right) = \frac{2n^2+2n^3}{2n^3} = \\ &= \frac{2n^3+2n^2}{2n^3} = \frac{2n^2(n+1)}{2n^3} = n+1 \end{aligned}$$

$$b_{10} = 11; b_{100} = 101; b_{1000} = 1001; \lim b_n = +\infty$$

AUTOEVALUACIÓN

1. Halla el término a_{47} de la sucesión cuyo término general es:

$$a_n = \frac{n^2 - 709}{n + 3}$$

$$a_{47} = \frac{47^2 - 709}{47 + 3} = \frac{2209 - 709}{50} = 30$$

2. Halla el término octavo de la sucesión definida así:

$$a_1 = 4, a_2 = 7, a_{n+2} = 2a_n - a_{n+1}$$

$$a_8 = 2a_6 - a_7$$

$$a_1 = 4$$

$$a_3 = 2a_1 - a_2 = 1$$

$$a_5 = 2a_3 - a_4 = -11$$

$$a_7 = 2a_5 - a_6 = -59$$

$$a_2 = 7$$

$$a_4 = 2a_2 - a_3 = 13$$

$$a_6 = 2a_4 - a_5 = 37$$

$$a_8 = 2a_6 - a_7 = 133$$

3. Halla el término general de las sucesiones:

a) 3, 7, 11, 15, 19, 23, ...

b) 1, 2, 5, 10, 17, 26, ...

a) Es una progresión aritmética de diferencia $d = 4$ y primer término $a_1 = 3$.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d = 3 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 1$$

b) El término general de la sucesión 0, 1, 4, 9, 16, 25, ... es $a_n = (n - 1)^2$.

$$\text{Por tanto, } 1, 2, 5, 10, 17, 26, \dots \text{ tiene por término general } a_n = (n - 1)^2 + 1 = n^2 - 2n + 2.$$

4. Halla la ley de recurrencia por la que se forman las siguientes sucesiones:

a) 7, 8, 15, 23, 38, 61, ...

b) 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, ...

c) 0, 1, 2, 3, 6, 11, 20, 37, ...

a) Cada término, a partir del tercero, es la suma de los dos anteriores. Por tanto:

$$a_1 = 7 \quad a_2 = 8 \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

b) Cada término, a partir del cuarto, es la suma de los tres anteriores. Por tanto:

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = 1 \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$$

c) Cada término, a partir del cuarto, es la suma de los tres anteriores. Por tanto:

$$a_1 = 0 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = 2 \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$$

5. Halla las siguientes sumas:

a) $3 + 7 + 11 + \dots + 43$

b) $1000 + 1000 \cdot 1,1 + 1000 \cdot 1,1^2 + \dots + 1000 \cdot 1,1^{15}$

c) $80 + 40 + 20 + 10 + 5 + \dots$

d) $101^2 + 102^2 + 103^2 + \dots + 140^2$

e) $3^3 + 4^3 + 5^3 + \dots + 15^3$

a) Es la suma de los once primeros términos de una progresión aritmética de primer término $a_1 = 3$ y diferencia $d = 4$.

$$a_n = 4n - 1 \quad a_1 = 3 \quad a_{11} = 43$$

$$S_{11} = \frac{a_1 + a_{11}}{2} \cdot 11 = \frac{3 + 43}{2} \cdot 11 = 253$$

b) Es la suma de los quince primeros términos de una progresión geométrica de primer término $a_1 = 1000$ y razón $r = 1,1$.

$$S_n = \frac{a_1 r^n - a_1}{r - 1} \rightarrow S_{15} = \frac{1000 \cdot 1,1^{15} - 1000}{1,1 - 1} = 31772,48$$

- c) Es la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de primer término $a_1 = 80$ y razón $r = 1/2$.

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{80}{1-1/2} = 160$$

d) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\begin{aligned} 101^2 + 102^2 + 103^2 + \dots + 140^2 &= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 140^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2) = \\ &= \frac{140 \cdot 141 \cdot 281}{6} - \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} = \frac{5546940 - 2030100}{6} = 586140 \end{aligned}$$

e) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$$3^3 + 4^3 + 5^3 + \dots + 15^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 15^3) - (1^3 + 2^3) = \frac{15^2 \cdot 16^2}{4} - 9 = 14391$$

6. En una progresión aritmética conocemos $a_{15} = 43$ y $a_{86} = 85,6$.

a) Calcula $a_1 + a_{100}$.

b) Obtén el valor de a_{220} .

$$\left. \begin{aligned} a_{15} &= a_1 + 14d = 43 \\ a_{86} &= a_1 + 85d = 85,6 \end{aligned} \right\} \rightarrow 85d - 14d = 42,6 \rightarrow d = 0,6$$

$$a_1 = 43 - 14 \cdot 0,6 = 34,6$$

a) $a_1 + a_{100} = a_{15} + a_{86} = 43 + 85,6 = 128,6$ pues $1 + 100 = 15 + 86$

(a_{15} y a_{86} "equidistan" de a_1 y a_{100}).

b) $a_{220} = a_1 + 219 \cdot d = 34,6 + 219 \cdot 0,6 = 166$

7. Halla los límites de las siguientes sucesiones:

$$a_n = \frac{5}{n} \quad b_n = \frac{5+3n}{n+1} \quad c_n = \frac{n^2+1}{5n}$$

a) $a_{10} = 0,5$ $a_{100} = 0,05$ $a_{1000} = 0,005 \rightarrow \lim \frac{5}{n} = 0$

b) $b_{10} = 3,18$ $b_{100} = 3,02$ $b_{1000} = 3,002 \rightarrow \lim \frac{5+3n}{n+1} = 3$

c) $c_{10} = 2,02$ $c_{100} = 20,002$ $c_{1000} = 200,0002 \rightarrow \lim \frac{n^2+1}{5n} = +\infty$