

1. Utiliza el Binomio de Newton para desarrollar la potencia $\left(2x - \frac{1}{x^3}\right)^5$ y simplifica en lo posible el resultado. **(1 punto)**

2. Resuelve la siguiente ecuación y el siguiente sistema de ecuaciones:

a) $\sqrt{1-x} + \sqrt{7-x} = \sqrt{16-2x}$ **(1 punto)**

b)
$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = \frac{10}{9} \\ \frac{1}{x} + y = \frac{15}{4} \end{cases} \quad \text{(1 punto)}$$

3. Para resolver el siguiente problema es obligatorio declarar la o las incógnitas y plantear una ecuación o un sistema de ecuaciones:

Un padre reparte entre sus hijos cierta cantidad de dinero. Si hubiera dos hijos menos, a cada uno le corresponderían 13000 euros, y si hubiera cuatro hijos más, a cada uno le tocarían 10000 euros. Determinar el número de hijos y la cantidad repartida. **(1 punto)**

4. Contesta a las siguientes cuestiones:

a) Utilizando que $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, y las relaciones entre ángulos de distintos cuadrantes, halla $\operatorname{tg} 2835^\circ$. **(0,5 puntos)**

b) Sabiendo que el ángulo α se encuentra en el segundo cuadrante y que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, calcular $\operatorname{cos} \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$ (hacer el ejercicio con fracciones y dar el resultado en forma de fracción). **(0,5 puntos)**

c) Sabiendo que $\operatorname{cos} \alpha = 0,32$ y que α es agudo, halla de manera razonada y sin calcular previamente el ángulo α :

• $\operatorname{cos}(180^\circ - \alpha)$. **(0,5 puntos)**

• $\operatorname{sen}(180^\circ + \alpha)$. **(0,5 puntos)**

5. Desde un punto situado a ras de suelo, los ángulos de elevación que presentan la base y la punta de un mástil de 6 metros de altura, colocado en lo alto de un acantilado, son 38° y 46° . Realiza un dibujo de la situación y halla la altura aproximada del acantilado. **(2 puntos)**

6. Desde el punto A donde me encuentro, deseo hallar la distancia a otro punto B separado del primero por un río que no puedo cruzar. Para ello me voy a otro punto C que está a una distancia del punto A de 50 metros. Con mis aparatos hago las siguientes mediciones: desde A mido el ángulo $\alpha = \widehat{BAC} = 50^\circ$ y desde C el ángulo $\beta = \widehat{BCA} = 60^\circ$. Realiza un dibujo de la situación, halla la distancia del punto A al punto B y el área del triángulo ABC . **(2 puntos)**

Soluciones

$$1. \left(2x - \frac{1}{x^3}\right)^5 = (2x)^5 - 5(2x)^4 \left(\frac{1}{x^3}\right)^1 + 10(2x)^3 \left(\frac{1}{x^3}\right)^2 - 10(2x)^2 \left(\frac{1}{x^3}\right)^3 + 5(2x) \left(\frac{1}{x^3}\right)^4 - \left(\frac{1}{x^3}\right)^5 = \\ 32x^5 - 5 \cdot 16x^4 \frac{1}{x^3} + 10 \cdot 8x^3 \frac{1}{x^6} - 10 \cdot 4x^2 \frac{1}{x^9} + 5 \cdot 2x \frac{1}{x^{12}} - \frac{1}{x^{15}} = 32x^5 - 80x + \frac{80}{x^3} - \frac{40}{x^7} + \frac{10}{x^{11}} - \frac{1}{x^{15}}$$

$$2. \text{ a) } \sqrt{1-x} + \sqrt{7-x} = \sqrt{16-2x} \Rightarrow (\sqrt{1-x} + \sqrt{7-x})^2 = (\sqrt{16-2x})^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 1-x + 2\sqrt{1-x}\sqrt{7-x} + 7-x = 16-2x \Rightarrow 2\sqrt{7-8x+x^2} = 8 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{7-8x+x^2} = 4 \Rightarrow (\sqrt{7-8x+x^2})^2 = 4^2 \Rightarrow 7-8x+x^2 = 16 \Rightarrow x^2 - 8x - 9 = 0 \Rightarrow \\ x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9)}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{8 \pm 10}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{18}{2} \Rightarrow x_1 = 9 \\ x_2 = \frac{-2}{2} \Rightarrow x_2 = -1 \end{cases}$$

La solución $x_1 = 9$ hay que descartarla pues $\sqrt{1-9} + \sqrt{7-9} = \sqrt{-8} + \sqrt{-2}$, que no son valores reales.

$$\text{b) } \begin{cases} x + \frac{1}{y} = \frac{10}{9} \\ \frac{1}{x} + y = \frac{15}{4} \end{cases}$$

$$\text{De la primera ecuación } x = \frac{10}{9} - \frac{1}{y} \Rightarrow x = \frac{10y-9}{9y} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{9y}{10y-9}$$

$$\text{Sustituyendo en la segunda ecuación: } \frac{9y}{10y-9} + y = \frac{15}{4}$$

Multiplicando todos los términos por $4(10y-9)$ se eliminan los denominadores y queda una ecuación de segundo grado:

$$4 \cdot 9y + 4 \cdot (10y-9) \cdot y = 15 \cdot (10y-9) \Rightarrow 36y + 40y^2 - 36y = 150y - 135 \Rightarrow 40y^2 - 150y + 135 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{150 \pm \sqrt{(-150)^2 - 4 \cdot 40 \cdot 135}}{2 \cdot 40} = \frac{150 \pm \sqrt{900}}{80} = \frac{150 \pm 30}{80} = \begin{cases} y_1 = \frac{180}{80} = \frac{9}{4} \\ y_2 = \frac{120}{80} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Si } y_1 = \frac{9}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{10 \cdot \frac{9}{4} - 9}{9 \cdot \frac{9}{4}} = \frac{\frac{90}{4} - 9}{\frac{81}{4}} = \frac{\frac{54}{4}}{\frac{81}{4}} = \frac{54}{81} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Si } y_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{10 \cdot \frac{3}{2} - 9}{9 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{15 - 9}{\frac{27}{2}} = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$$

3. Llamemos x al número de hijos e y a la cantidad repartida, en euros. Entonces, teniendo en cuenta que al dividir la cantidad de dinero entre el número de hijos se obtiene la cantidad que le corresponde a cada uno, es posible plantear el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{y}{x-2} = 13000 \\ \frac{y}{x+4} = 10000 \end{cases}$$

Despejando y de ambas ecuaciones e igualando se obtiene:

$$\begin{cases} y = 13000(x-2) \\ y = 10000(x+4) \end{cases} \Rightarrow 13000(x-2) = 10000(x+4) \Rightarrow 13000x - 26000 = 10000x + 40000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3000x = 66000 \Rightarrow x = \frac{66000}{3000} = 22$$

$$y = 13000(x-2) \Rightarrow y = 13000(22-2) = 13000 \cdot 20 = 260000$$

Por tanto se han de repartir 260000 euros entre 22 hijos.

4. a) Al dividir 2835 entre 360 se obtiene 7 de cociente y 315 de resto. Por tanto $2835^\circ = 360^\circ \cdot 7 + 315^\circ$.
Entonces $\operatorname{tg} 2835^\circ = \operatorname{tg} 315^\circ = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1$.

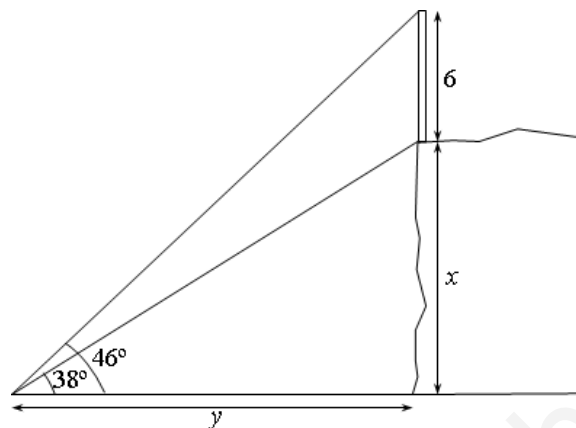
$$\text{b) } \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{3}{4} + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2} \text{ (se toma la solución negativa porque el ángulo está en el segundo cuadrante).}$$

$$\text{te). Por otro lado: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}.$$

- c)
- α y $180^\circ - \alpha$ son suplementarios, por tanto $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha = -0,32$.
 - $\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 \Rightarrow 0,32^2 + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 \Rightarrow 0,1024 + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = 0,8976 \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = 0,95$ (al ser el ángulo agudo se toma el valor positivo de la raíz). Como α y $180^\circ + \alpha$ se diferencian en 180° , entonces $\operatorname{sen}(180^\circ + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha = -0,95$.

5. Hagamos un dibujo con los datos que nos proporciona el enunciado:

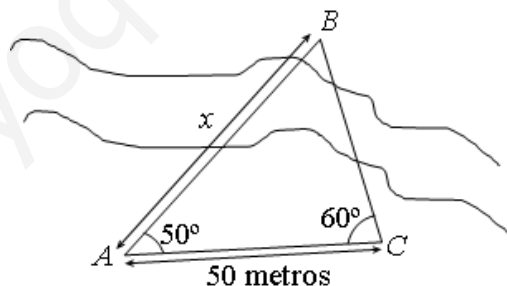


Entonces:
$$\begin{cases} \operatorname{tg} 46^\circ = \frac{x+6}{y} \\ \operatorname{tg} 38^\circ = \frac{x}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x+6}{\operatorname{tg} 46^\circ} \\ y = \frac{x}{\operatorname{tg} 38^\circ} \end{cases} \Rightarrow \frac{x+6}{\operatorname{tg} 46^\circ} = \frac{x}{\operatorname{tg} 38^\circ} \Rightarrow \operatorname{tg} 46^\circ x = \operatorname{tg} 38^\circ (x+6) \Rightarrow$$

$$1,036x = 0,781(x+6) \Rightarrow 1,036x = 0,781x + 4,686 \Rightarrow 0,255x = 4,686 \Rightarrow x = \frac{4,686}{0,255} \Rightarrow x = 18,38$$

Por tanto la altura del acantilado es, aproximadamente, 18,38 metros.

6. Un dibujo aproximado de la situación puede ser el siguiente (en él se ha llamado x a la distancia de A a B , que es lo que se pide hallar):



Es claro que $\widehat{B} = 180^\circ - 60^\circ - 50^\circ = 70^\circ$, puesto que los tres ángulos de un triángulo suman 180° .

Utilizando ahora el teorema de los senos:

$$\frac{x}{\operatorname{sen} 60^\circ} = \frac{50}{\operatorname{sen} 70^\circ} \Rightarrow x = \frac{50 \operatorname{sen} 60^\circ}{\operatorname{sen} 70^\circ} \Rightarrow x = \frac{50 \cdot 0,87}{0,94} \Rightarrow x = 46,28.$$

Por tanto la distancia del punto A al punto B es de 46,28 metros.

Para hallar el área del triángulo, obsérvese que conocemos ya dos lados, el \overline{AB} y el \overline{AC} (que miden, respectivamente, 46,28 y 50 metros). Además conocemos el ángulo que forman ambos lados (50°).

Utilizando la fórmula del área del triángulo según la cual ésta es igual a la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo que forman, se tiene:

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2} \cdot 46,28 \cdot 50 \cdot \operatorname{sen} 50^\circ = 886,31 m^2.$$