1º Demuestra que si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores de igual módulo entonces $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)$ es perpendicular a $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)$.

2º Dado el vector $\vec{u}=(32,-24)$, calcula otro vector que sea ortogonal a él y tenga de módulo 3 unidades.

3º Calcula las bisectrices de las rectas $r:\left.\begin{matrix} x=3-2\lambda \\ y=-4+\lambda \end{matrix}\right\}$ y $s:\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5}=1$.

4º Halla el punto simétrico de P = (−3,0) respecto de la recta $r:4x+y-2=0$.

5º Halla la distancia entre las rectas **r** y **s** según los valores de m. Siendo $r:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{3}$ y $s:6x-my+1=0$.

6º Un punto equidista de los puntos A = (7,1) y B = (1,3). La distancia de ése punto al eje de ordenadas es el doble que la distancia al eje de abscisas. Calcula el punto.

7º Halla el valor de m para que la recta de ecuación $r:4x+my-24=0$ determine con los ejes de coordenadas un triángulo de área 24 unidades cuadradas.

8º En el paralelogramo de vértices ABCD se conocen las coordenadas de los puntos A = (1,4), B = (2,1) y C = (7,2). Calcula el vértice D, la longitud de sus diagonales y el ángulo que forman.

9º Encuentra el baricentro y el ortocentro del triángulo de vértices A = (0,0), B = (4,0) y C = (6,8).

51576

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $|\vec{u}|=|\vec{v}|$.

Recuerda: si $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \to \vec{a}\perp\vec{b}$ (si $\vec{a}\neq 0, \vec{b}\neq 0$)

$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} - \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} - \vec{v}\cdot\vec{v}$.

observaciones: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

$\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos 0^\circ = |\vec{u}|^2$

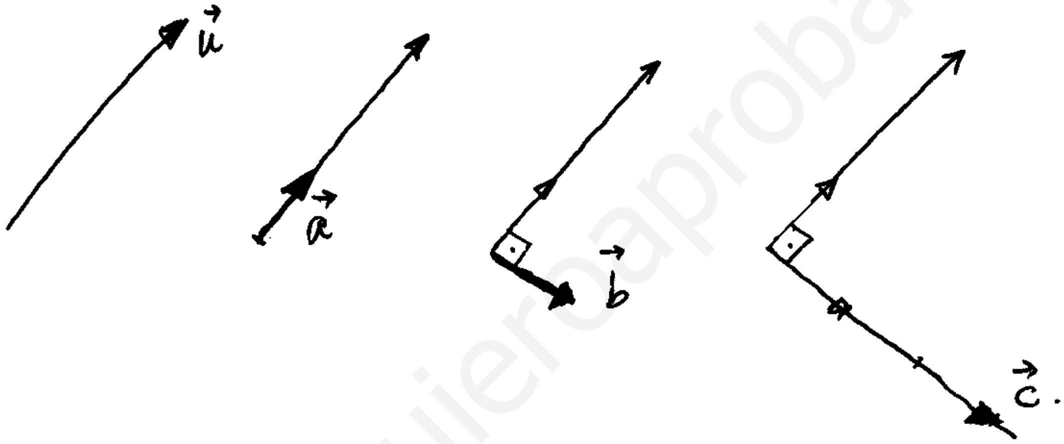
$\vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{v}|^2$.

$\Rightarrow (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = 0 \Rightarrow (\vec{u}+\vec{v}) \perp (\vec{u}-\vec{v})$.

51576

- Método 1: por construcción.
  1º) vector unitario de $\vec{u}$: $\vec{a}$
  2º) vector ortogonal a $\vec{a}$: $\vec{b}$.
  3º) vector de módulo 3 y proporcional a $\vec{b}$: $\boxed{\vec{c}}$ SOLUCIÓN

De modo gráfico.



(1º) $\vec{a} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$, $|\vec{u}| = \sqrt{32^2 + (-24)^2} = \sqrt{1600} = 40. \Rightarrow$

$$\vec{a} = \frac{(32,-24)}{40} = \left(\frac{32}{40}, \frac{-24}{40}\right) = \left(\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\right)$$

(2º) $\vec{b} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

(3º) $\vec{c} = 3\vec{b} = 3 \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \boxed{\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)}$

Otra solución sería $-\vec{c} = \left(\frac{-9}{5}, \frac{-12}{5}\right)$

Método 2: mediante un sistema.

Sea $\vec{v}$ el vector pedido: $\vec{v} = (x, y)$

•) $\vec{u} \perp \vec{v} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow (32, -24) \cdot (x, y) = 0 \Rightarrow$

$$32x - 24y = 0 \longleftrightarrow \boxed{4x - 3y = 0}$$

•) $|\vec{v}| = 3 \longrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 3 \longleftrightarrow \boxed{x^2 + y^2 = 9}$

El problema se reduce a resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{l} 4x - 3y = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{array}\right\} \quad x = \frac{3y}{4} \longrightarrow \left(\frac{3y}{4}\right)^2 + y^2 = 9 \longrightarrow$$

$$\frac{9y^2}{16} + y^2 = 9 \longleftrightarrow 9y^2 + 16y^2 = 144 \longrightarrow 25y^2 = 144$$

$$\longrightarrow y^2 = \frac{144}{25} \longrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{144}{25}} = \pm\frac{12}{5}.$$

si $y = \frac{12}{5} \rightarrow x = \frac{3}{4} \cdot \frac{12}{5} = \frac{9}{5} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)}$

si $y = \frac{-12}{5} \longrightarrow x = \frac{3}{4} \cdot \frac{-12}{5} = -\frac{9}{5} \Rightarrow \boxed{\vec{v}\,' = \left(-\frac{9}{5}, \frac{-12}{5}\right)}$

La bisectriz es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de 2 rectas dadas.

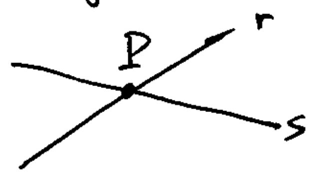
1º se expresan r y s de forma general

$$r:\ \frac{x-3}{-2}=\frac{y+4}{1} \iff x-3=-2y-8 \iff \boxed{x+2y+5=0}$$

$$s:\ \frac{5x+3y}{15}=1 \iff 5x+3y=15 \iff \boxed{5x+3y-15=0}$$

$\vec{v}_r=(-2,1)$ y $\vec{v}_s=(-3,5)$: no son proporcionales, por lo tanto r y s se cortan en un punto.

2º dibujo y condición:



$P \in$ bisectriz de r y s si $dis(P,r)=dis(P,s)$

Si $P=(x,y) \Rightarrow$

$$\frac{|x+2y+5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|5x+3y-15|}{\sqrt{5^2+3^2}} \iff \frac{|x+2y+5|}{\sqrt{5}}=\frac{|5x+3y-15|}{\sqrt{34}}$$

$$\iff \sqrt{34}\,|x+2y+5|=\sqrt{5}\,|5x+3y-15| \Rightarrow$$

$$\boxed{\sqrt{34}\cdot(x+2y+5)=\pm\sqrt{5}\cdot(5x+3y-15)}$$

Agrupando todos los valores en el 1er miembro obtendríamos 2 soluciones.

signo $\oplus$

$$\boxed{(\sqrt{34}-5\sqrt{5})x+(2\sqrt{34}-3\sqrt{5})y+5\sqrt{34}+15\sqrt{5}=0}$$

signo $\ominus$

$$\boxed{(\sqrt{34}+5\sqrt{5})x+(2\sqrt{34}+3\sqrt{5})y+5\sqrt{34}-15\sqrt{5}=0}$$

redondeando a la 1ª cifra decimal:

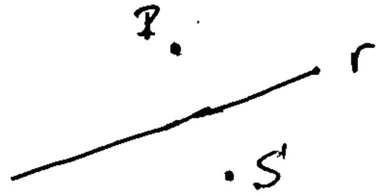
$\oplus$ $\quad 12{,}9x+5y+62{,}7=0$

$\ominus$ $\quad -9{,}4x+18{,}4y-4{,}4=0$

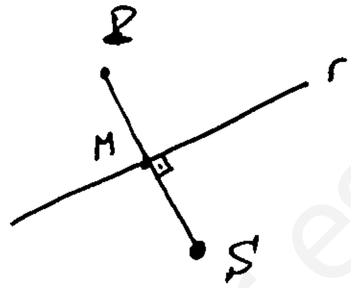
S' es el simétrico de P respecto de r.

¿Qué condición cumple?

$dis(P, r) = dis(S, r)$



$\Leftrightarrow$



$M = \frac{P+S}{2}$.

La idea para la obtención de S se basa en hallar M, que es el punto medio de P y S.

M es la intersección de dos rectas: r y s.

•) r es la recta dato.

•) s es una recta perpendicular a r y que pasa por P.

¿s? $s: \begin{cases} \perp r \to x - 4y + C = 0. \\ P \to -3 - 4 \cdot 0 + C = 0 \to C = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{s: x - 4y + 3 = 0}$

M es la solución del sistema de r y s

$$\begin{rcases} 4x + y - 2 = 0 \\ x - 4y + 3 = 0 \end{rcases} \Leftrightarrow \begin{array}{r} 4x + y - 2 = 0 \\ -4x + 16y - 12 = 0 \\ \hline 17y - 14 = 0 \end{array} \to y = \frac{14}{17} \to$$

$$x = 4y - 3 = 4 \cdot \frac{14}{17} - 3 = \frac{5}{17} \Rightarrow \boxed{M = \left(\frac{5}{17}, \frac{14}{17}\right)}$$

¿S'? $M = \frac{P+S}{2} \Leftrightarrow 2M = P + S \Rightarrow S' = 2M - P$

$$\boxed{S' = 2 \cdot \left(\frac{5}{17}, \frac{14}{17}\right) - (-3, 0) = \left(\frac{61}{17}, \frac{28}{17}\right)}$$

Primero: vamos a expresar ambas rectas en forma general

$r:\ 3(x+1) = 2(y-2) \iff 3x+3 = 2y-4 \iff \boxed{3x-2y+7=0}$

Segundo: veamos las posiciones relativas

$\left.\begin{array}{l} 3x-2y+7=0 \\ 6x-my+1=0 \end{array}\right\}$ ¿ $\frac{3}{6} = \frac{-2}{-m} = \frac{7}{1}$?

Observando la condición:

$\frac{3}{6} = \frac{-2}{-m} \iff 3m = +12 \rightarrow \boxed{m=+4}$

si $m=+4 \rightarrow \frac{3}{6} = \frac{-2}{-4} \neq \frac{7}{1}$ rectas paralelas.

si $m \neq +4 \rightarrow \frac{3}{6} \neq \frac{-2}{-m} \neq \frac{7}{1}$ rectas secantes.

Casos:

- si $m=+4$ rectas paralelas $\Rightarrow \text{dis}(s,r) = \text{dis}(P,r)$ siendo P un punto cualquiera de s.

$s: 6x-4y+1=0$, si $x=0 \rightarrow y = 1/4 \Rightarrow P=(0, 1/4)$

$\Rightarrow \text{dis}(P,r) = \frac{|3\cdot 0 - 2\cdot\frac{1}{4}+7|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}} = \frac{|-\frac{2}{4}+7|}{\sqrt{13}} = \frac{13/2}{\sqrt{13}} = \frac{13}{2\sqrt{13}}$.

racionalizando:

$\boxed{\text{dis}(r,s) = \frac{13}{2\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{2}}$

- si $m \neq +4$ rectas secantes $\rightarrow \boxed{\text{dis}(r,s) = 0}$

Si las rectas son paralelas podremos aplicar la fórmula:

$r: Ax+By+C=0$
$s: Ax+By+C'=0$

$$\rightarrow \quad dis(r,s) = \frac{|C-C'|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Observa que los coeficientes de x e y en r y s son idénticos.

En nuestro caso:

$r: 3x-2y+7=0$
$s: 6x-4y+1=0.$

Hay 2 opciones: $r\cdot 2$ ó $s:2$.

$$r: 2\cdot(3x-2y+7=0) \rightarrow \boxed{r: 6x-4y+14=0} \; \boxed{S: 6x-4y+1=0} \Rightarrow$$

$$dis(r,s) = \frac{|14-1|}{\sqrt{6^2+(-4)^2}} = \frac{13}{\sqrt{52}} = \frac{13\cdot\sqrt{52}}{\sqrt{52}\cdot\sqrt{52}} = \frac{13\cdot\sqrt{52}}{52} = \frac{13\cdot 2\cdot\sqrt{13}}{52} = \boxed{\frac{\sqrt{13}}{2}}$$

$$\sqrt{52} = \sqrt{4\cdot 13} = 2\cdot\sqrt{13}$$

Sea $P=(x,y)$

- 1ª condición: equidista de A y B $\Leftrightarrow$ $|AP|=|BP|$.
- 2ª condición: $dis(P,r) = 2\cdot dis(P,s)$

r: eje de ordenadas: $x=0$.
s: eje de abscisas: $y=0$.

Recuerde:
si $r: Ax+By+C=0$ y $P=(x_0,y_0) \Rightarrow dis(P,r) = \dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

1ª condición:

$$|AP|=|BP| \Leftrightarrow \sqrt{(x-7)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2} \Leftrightarrow$$

$$x^2-14x+49+y^2-2y+1 = x^2-2x+1+y^2-6y+9 \Leftrightarrow$$

$$-12x+4y+40=0 \Leftrightarrow \boxed{-3x+y+10=0}$$

2ª condición.

$$dis(P,r) = \frac{|x|}{\sqrt{1^2+0^2}} = |x|$$

$$dis(P,s) = \frac{|y|}{\sqrt{0^2+1^2}} = |y|$$

$$\Rightarrow |x| = 2|y| \Leftrightarrow x=\pm 2y.$$

Tendremos 2 sistemas:

Signo $\oplus$

$$\left.\begin{array}{l} -3x+y+10=0 \\ x=2y \end{array}\right\} \Leftrightarrow -3\cdot 2y+y+10=0 \rightarrow -5y+10=0 \Rightarrow y=2$$

$$\rightarrow x = 2\cdot 2 = 4$$

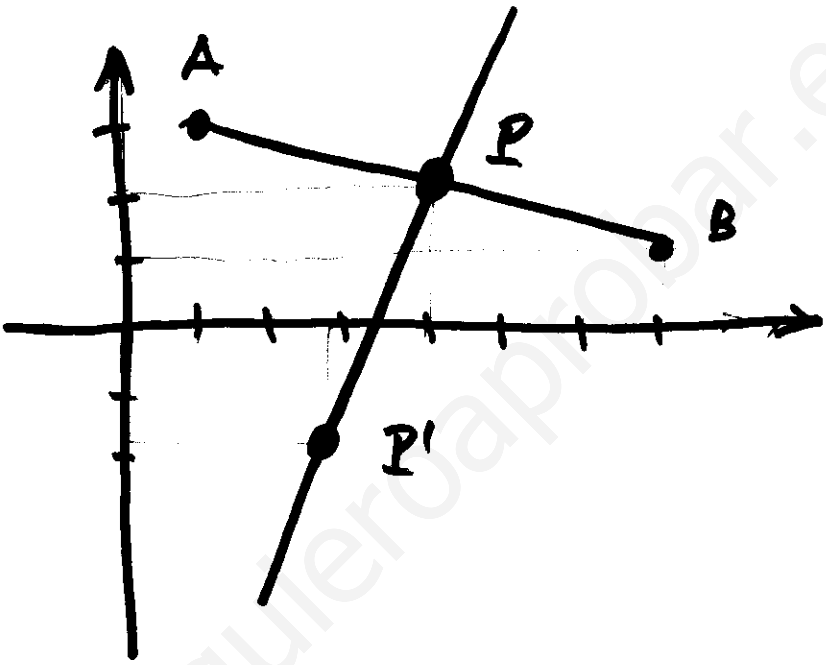
$$\Rightarrow \boxed{P=(2,4)}$$

51576

Signo $\ominus$

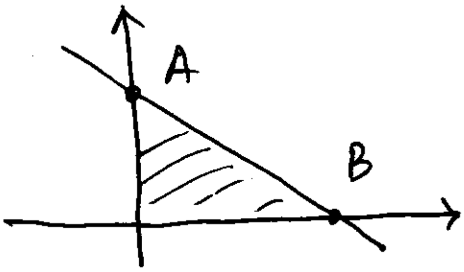
$$\left.\begin{array}{l} -3x+y+10=0 \\ x=-2y \end{array}\right\} -3\cdot(-2y)+y+10=0 \rightarrow 7y+10=0 \rightarrow y=\frac{-10}{7}$$

$$\rightarrow x=-2\cdot\frac{-10}{7}=\frac{20}{7} \Rightarrow \boxed{P'=\left(\frac{20}{7},\frac{-10}{7}\right)}$$



51576

Los puntos de corte con los ejes determinan un triángulo rectángulo cuyos catetos son los segmentos sobre los ejes.



$¿A?\quad x=0 \longrightarrow my-24=0 \rightarrow y=\frac{24}{m} \Rightarrow A=\left(0,\frac{24}{m}\right)$

$¿B?\quad y=0 \rightarrow 4x-24=0 \rightarrow x=\frac{24}{4}=6 \Rightarrow B=(6,0)$

El área de un triángulo rectángulo es el producto de los catetos entre 2.

$S=\frac{6\cdot\left|\frac{24}{m}\right|}{2}$ se pone valor absoluto porque A puede estar "debajo" del eje de abscisas.

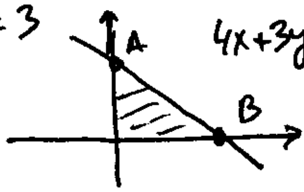
Condición:

$$\frac{6\cdot\left|\frac{24}{m}\right|}{2}=24 \Leftrightarrow \frac{6\cdot\pm\frac{24}{m}}{2}=24$$

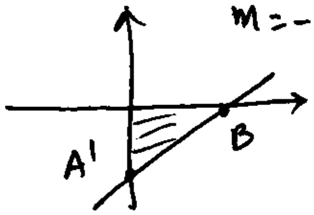
signo $\oplus$: $\frac{6\cdot\frac{24}{m}}{2}=24 \leftrightarrow \frac{144}{2m}=24 \Rightarrow m=\frac{144}{2\cdot 24}=3$

signo $\ominus$: $\frac{6\cdot\frac{-24}{m}}{2}=24 \Leftrightarrow -\frac{144}{2m}=24 \Rightarrow m=\frac{-144}{2\cdot 24}=-3$

$m=3$



$4x+3y-24=0$

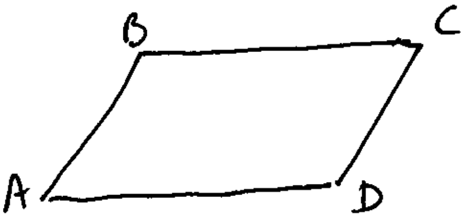


$m=-3$

$4x-3y-24=0$

51576

Como ABCD es un paralelogramo



$AB = DC \Leftrightarrow B - A = C - D \rightarrow$

$D = C - B + A$

$\boxed{D = (7,2) - (2,1) + (1,4) = (6,5)}$

diagonales:

•) longitud

$|AC| = |C-A| = \sqrt{(7-1)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{40}$.

$|BD| = |D-B| = \sqrt{(6-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}$.

El ángulo que forman las diagonales $\Leftrightarrow$ ángulo que forman las rectas sobre las que se apoyan $\Leftrightarrow$ ángulo de sus vectores directores.

$AC = C - A = (6,-2)$

$BD = D - B = (4,4)$

El ángulo entre vectores se halla mediante el producto escalar.

$AC \cdot BD = |AC| \cdot |BD| \cdot \cos\alpha \longrightarrow$

$\cos\alpha = \dfrac{AC \cdot BD}{|AC| \cdot |BD|} = \dfrac{(6,-2)\cdot(4,4)}{\sqrt{40}\cdot\sqrt{32}} = \dfrac{16}{\sqrt{1280}} \rightarrow \boxed{\alpha \simeq 63,4^\circ}$

BARICENTRO

$$G = \frac{A+B+C}{3} = \frac{(0,0)+(4,0)+(6,8)}{3} = \left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

ORTOCENTRO.

Punto de corte de las alturas. La altura es la recta perpendicular a un lado que pasa por el vértice opuesto.

Notación:

$$h_A \equiv \begin{cases} \perp BC \\ \text{pasa por } A. \end{cases}$$

Procedimiento:

•) se obtendrán 2 alturas (de las 3 posibles) cualesquiera.

•) se calculará el punto de corte de ambas alturas.

•) se calculará la 3ª altura y se comprobará que el punto obtenido en el paso 2 está en la recta. Dicho punto es el ORTOCENTRO.

$$h_A : \begin{cases} \perp BC = C - B = (6,8) - (4,0) = (2,8) \equiv (1,4) \\ \quad \rightarrow \text{su vector director sería: } \vec{v} = (4,-1). \\ A = (0,0) \end{cases}$$

En forma continua: $\frac{x-0}{4} = \frac{y-0}{-1} \Leftrightarrow -x = 4y \Rightarrow \boxed{x+4y=0}$

$$h_B : \begin{cases} \perp AC = C - A = (6,8) - (0,0) = (6,8) \equiv (3,4) \\ B = (4,0) \qquad \rightarrow \text{su vector director sería } \vec{v} = (4,-3) \end{cases}$$

En forma continua

$$\frac{x-4}{4} = \frac{y-0}{-3} \Leftrightarrow -3(x-4) = 4y \Rightarrow -3x+12 = 4y$$

$$\Leftrightarrow \boxed{-3x-4y+12=0}$$

51576

Sistema

$$\left.\begin{array}{l} x+4y=0 \\ -3x-4y+12=0 \end{array}\right\} \quad x=-4y$$

$$-3\cdot(-4y)-4y+12=0 \iff 12y-4y+12=0 \rightarrow y=\frac{-12}{8}=\frac{-3}{2}$$

$$x=-4\cdot\frac{-3}{2}=6$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Ortocentro}=\left(6,-\frac{3}{2}\right)}$$

Comprobación:

$$h_c:\left\{\begin{array}{l} \perp AB = B-A=(4,0)-(0,0)=(4,0)\equiv(1,0) \\ C=(6,8) \qquad\qquad \rightarrow \vec{v}=(0,1) \end{array}\right.$$

$$\frac{x-6}{0}=\frac{y-1}{8} \iff 8\cdot(x-6)=0 \rightarrow \boxed{x-6=0}$$

$\left(6,-\frac{3}{2}\right)\in x-6=0$. evidentemente.!!