1º Calcula los lados y el área de un paralelogramo de diagonales 70 y 50 cm sabiendo que el ángulo que forman es de 40º.
(Observación: las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.)

2º Calcula de forma exacta sen75º y tg105º.

3º Sabiendo que $tg\alpha = -3$ y $\alpha \in IV$ calcula $\cos\frac{\alpha}{2}$.

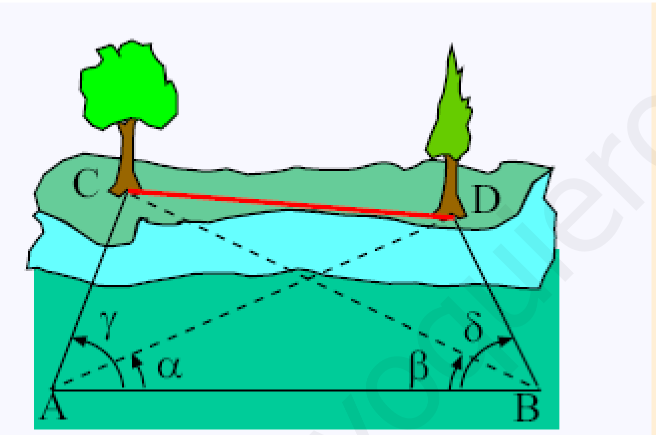
4º Resuelve: $tgx + 4\cot gx = 5$, expresa las soluciones en radianes.

5º Resuelve: $\cos\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = sen\left(-x + \frac{\pi}{3}\right)$

6º Para calcular la distancia CD entre dos árboles inaccesibles se efectúan las siguientes mediciones:

AB = 400m

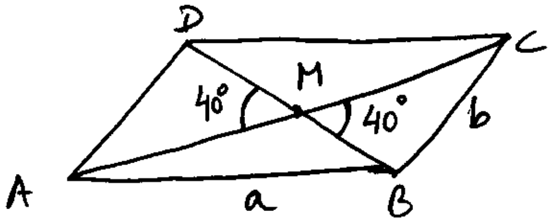
$\alpha = 26º34'$, $\beta = 59{,}45º$, $\gamma = 75{,}26º$ y $\delta = 80º$



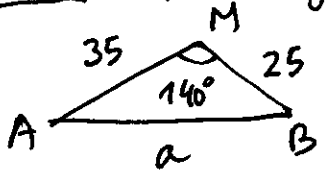
7º Comprueba la siguiente igualdad trigonométrica $\frac{sen2a}{1+\cos 2a} = tga$

8º Resuelve el triángulo a = 9, b = 11 y B = 50º. Calcula asimismo su área y el radio de la circunferencia circunscrita.

Sea el paralelogramo

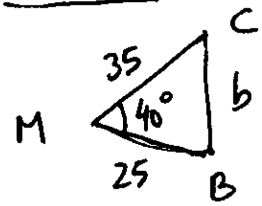


• lado a → triángulo $\widehat{AMB}$



teorema del coseno: $a^2 = 35^2 + 25^2 - 2 \cdot 35 \cdot 25 \cdot \cos 140° \Rightarrow \boxed{a \simeq 56{,}49 \text{ cm}}$

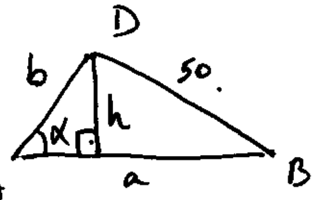
• lado b → triángulo $\widehat{MBC}$



teorema del coseno: $b^2 = 35^2 + 25^2 - 2 \cdot 35 \cdot 25 \cdot \cos 40° \Rightarrow \boxed{b \simeq 22{,}57 \text{ cm}}$

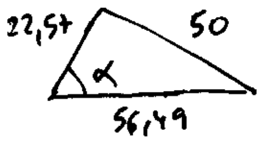
• área de ABCD.

Consideremos el triángulo $\widehat{ABD}$



Si obtuviéramos h el área del paralelogramo sería $S = a \cdot h$.

¿α?



$\rightarrow 50^2 = 56{,}49^2 + 22{,}57^2 - 2 \cdot 22{,}57 \cdot 56{,}49 \cdot \cos\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha \simeq 61{,}91°}$

$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{h}{22{,}57} \rightarrow \boxed{h \simeq 19{,}91 \text{ cm}}$

$\Rightarrow \boxed{S = 1124{,}84 \text{ cm}^2}$

$\text{sen}\, 75^\circ = \text{sen}\,(30^\circ + 45^\circ)$.

- fórmula del seno de la suma

$$\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \text{sen}\,\beta$$

- razones trigonométricas de 30° y 45°.

$$\text{sen}\, 30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

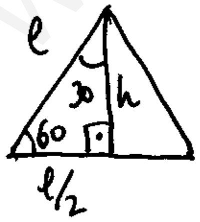
$$\text{sen}\, 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{sen}\, 75^\circ} = \text{sen}\,(30^\circ+45^\circ) = \text{sen}\, 30^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \cdot \text{sen}\, 45^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$$

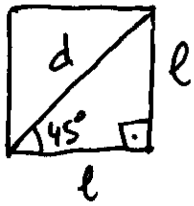
RECUERDA.

¿30°? triángulo equilátero



$$h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2 \rightarrow h = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

¿45°? cuadrado



$$d^2 = l^2 + l^2 \rightarrow d = l\sqrt{2}.$$

$tg\,105^\circ$

$$105^\circ = 45^\circ + 60^\circ$$

$$tg\,105^\circ = tg\,(45^\circ + 60^\circ) = \frac{tg\,45^\circ + tg\,60^\circ}{1 - tg\,45^\circ \cdot tg\,60^\circ} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - 1 \cdot \sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}.$$

Racionalizando:

$$\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{1 + 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2}{1 - (\sqrt{3})^2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{1-3} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} = -2-\sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow \boxed{tg\,105^\circ = -2-\sqrt{3}}$$

$$\cos \alpha/2 = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

- signo de $\cos \alpha/2$.

$\alpha \in \text{IV} \Leftrightarrow 270^\circ < \alpha < 360^\circ \Rightarrow \frac{270^\circ}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{360^\circ}{2} \Leftrightarrow$

$135^\circ < \frac{\alpha}{2} < 180^\circ \Rightarrow \alpha/2 \in \text{II}. \rightarrow \cos\alpha/2$ será NEGATIVO.

- ¿$\cos\alpha$?

empleamos la relación: $1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1+(-3)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{10}} = +\frac{1}{\sqrt{10}} = +\frac{\sqrt{10}}{10}$.

se toma la solución POSITIVA porque $\alpha \in \text{IV}$ y en él $\cos\alpha > 0$.

$$\Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{10}}{10}}{2}}$$

operando en el radicando:

$$\frac{1+\frac{\sqrt{10}}{10}}{2} = \frac{10+\sqrt{10}}{20} \Rightarrow \boxed{\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{10+\sqrt{10}}{20}}}$$

$$\boxed{tg\,x + 4\,cotg\,x = 5}$$

$$\Leftrightarrow \quad tg\,x + \frac{4}{tg\,x} = 5$$

cambio de variable : $tg\,x = y$

$$y + \frac{4}{y} = 5 \Leftrightarrow y^2 + 4 = 5y \Leftrightarrow \boxed{y^2 - 5y + 4 = 0}$$

$$\Rightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1. \end{cases} \Rightarrow$$

$tg\,x = 4 \rightarrow x_1 = arctg\,4 = 1{,}33 + 2\pi k$

$x_2 = = 1{,}33 + \pi + 2\pi k.$, $k \in \mathbb{Z}$

$tg\,x = 1 \rightarrow x_3 = 45^\circ + 360\,k = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$

$x_4 = 45^\circ + 180 + 360\,k. = \frac{\pi}{4} + \pi + 2\pi k.$, $k \in \mathbb{Z}.$

Recuerda que $tg\,\alpha = tg\,(\alpha + 180^\circ)$

$$\boxed{\cos\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)=\operatorname{sen}\left(-x+\frac{\pi}{3}\right).}$$

- recuerda que $\cos\alpha=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$$\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}-\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)\right]=\operatorname{sen}\left(-x+\frac{\pi}{3}\right)\Longleftrightarrow\boxed{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{10}-2x\right)=\operatorname{sen}\left(-x+\frac{\pi}{3}\right)}$$

Hay 2 opciones

(1) $$\frac{3\pi}{10}-2x=-x+\frac{\pi}{3}+2\pi k\Longleftrightarrow -2x+x=\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{10}+2\pi k$$

$$\Longleftrightarrow -x=\frac{\pi}{30}+2\pi k\Longrightarrow\boxed{x=-\frac{\pi}{30}+2\pi k}\quad k\in\mathbb{Z}.\quad(*)$$

(2) $$\frac{3\pi}{10}-2x=\pi-\left(-x+\frac{\pi}{3}\right)+2\pi k\Longleftrightarrow -2x-x=\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{10}+2\pi k$$

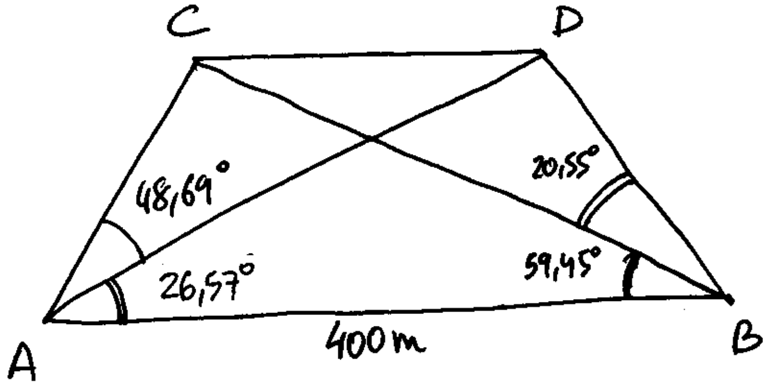
$$\Longleftrightarrow -3x=\frac{11\pi}{30}+2\pi k\Longrightarrow\boxed{x=\frac{-11\pi}{90}+\frac{2\pi}{3}k.}\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Observaciones:

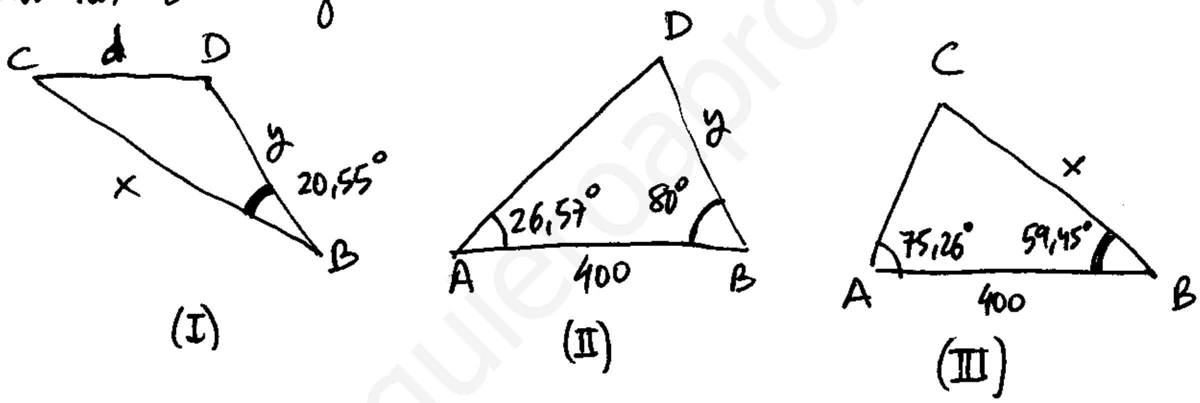
- $$\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}\beta\Longleftrightarrow\begin{cases}\alpha=\beta\\ \alpha=180^{\circ}-\beta.\quad \text{ó}\quad \alpha=\pi-\beta\ \text{(radianes)}\end{cases}$$

- (*) $$-x=\frac{\pi}{30}+2\pi k\Longleftrightarrow x=-\frac{\pi}{30}-2\pi k=-\frac{\pi}{30}+\underbrace{2\pi k}_{k\in\mathbb{Z}.}$$

Con los datos que nos da el problema



Observa los 3 triángulos



Argumentos:

- con el teorema del seno se calculan x e y en (II) y (III).
- con el teorema del coseno se calcula d en (I).

$\widehat{ABD}$ $\quad \dfrac{y}{\operatorname{sen} 26{,}57^\circ} = \dfrac{400}{\operatorname{sen} D}$ $\qquad D = 180^\circ - 80^\circ - 26{,}57^\circ = 73{,}43^\circ$

$$\Rightarrow y = \frac{400 \cdot \operatorname{sen} 26{,}57^\circ}{\operatorname{sen} 73{,}43^\circ} \Rightarrow \boxed{y \simeq 187 m}$$

$\widehat{ABC}$ $\quad \dfrac{x}{\operatorname{sen} 75{,}26^\circ} = \dfrac{400}{\operatorname{sen} C}$ $\qquad C = 180^\circ - 75{,}26^\circ - 59{,}45^\circ = 45{,}29^\circ$

$$\Rightarrow x = \frac{400 \cdot \operatorname{sen} 75{,}26^\circ}{\operatorname{sen} 45{,}29^\circ} \Rightarrow \boxed{x \simeq 544 m}$$

En $\widehat{CDB}$

$$d^2 = x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \cos 20{,}55^\circ \simeq$$

$$= 544^2 + 187^2 - 2 \cdot 544 \cdot 187 \cdot \cos 20{,}55^\circ \Rightarrow$$

$$\boxed{d \simeq 375 \text{ m}}$$

Observaciones:

- Se podría haber elegido el triángulo $\widehat{ACD}$, en él aparece la incógnita $d = CD$
- Los triángulos $\widehat{ABD}$ y $\widehat{ABC}$ son auxiliares: se necesitan resolver para resolver $\widehat{BCD}$.

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \frac{2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}{1+\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}{\underbrace{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1}+\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}{2\cdot\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

$$\leftarrow \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}{2\cos\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}{\underbrace{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}+\underbrace{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha}}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}2\alpha}{\cos 2\alpha+1} = \frac{\operatorname{sen}2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

Se trata de un triángulo del que conocemos 2 lados y un ángulo no comprendido.

$a = 9 \quad A =$

$b = 11 \quad B = 50^\circ. \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{ll} a=9 & A=38{,}81^\circ \\ b=11 & B=50^\circ \\ c=14{,}4 & C=91{,}19^\circ \end{array}}$ SOLUCIÓN.

$c = \quad C =$

¿A? Teorema del seno.

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \Leftrightarrow \frac{9}{\operatorname{sen} A} = \frac{11}{\operatorname{sen} 50^\circ} \Rightarrow \operatorname{sen} A = \frac{9 \cdot \operatorname{sen} 50^\circ}{11} = 0{,}62\ldots$$

$$\Rightarrow A = \operatorname{arc\,sen}(0{,}62\ldots)$$

RECUERDA que la calculadora SÓLO da UNA solución.

$\boxed{A_1 = 38{,}81^\circ}$

$A_2 = 180 - 38{,}81^\circ = 141{,}19^\circ. \rightarrow$ incompatible con el triángulo pues $141{,}19^\circ + 50^\circ > 180^\circ$.

¿C? $C = 180^\circ - A - B$

$$\boxed{C = 180^\circ - 38{,}81^\circ - 50^\circ = 91{,}19^\circ}$$

¿c? Teorema del seno.

$$\frac{c}{\operatorname{sen} C} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \Leftrightarrow \frac{c}{\operatorname{sen} 91{,}19^\circ} = \frac{11}{\operatorname{sen} 50^\circ} \Rightarrow \boxed{c = \frac{11 \cdot \operatorname{sen} 91{,}19^\circ}{\operatorname{sen} 50^\circ} \simeq 14{,}4}$$

¿Radio?

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R \Rightarrow \boxed{R = \frac{b}{2 \operatorname{sen} B} = \frac{11}{2 \cdot \operatorname{sen} 50^\circ} \simeq 7{,}2}$$

¿Área?

$$\boxed{S = \frac{1}{2} ab \cdot \operatorname{sen} C = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 11 \cdot \operatorname{sen} 91{,}19^\circ \simeq 49{,}5\,u^2}$$