Unidad 10 – Funciones elementales

PÁGINA 221

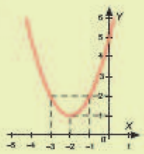
cuestiones iniciales

1. Elige entre las siguientes expresiones algebraicas la que corresponda a cada una de las gráficas:

$y = \frac{1}{2}x$ $\qquad y = -x^2 - 4x - 3$ $\qquad y = -\frac{3}{2x}$

$y = \frac{3x}{2}$ $\qquad y = x^2 + 4x + 5$ $\qquad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

a)



c)

b)

d)

2. Dibuja las gráficas de las funciones y estudia sus propiedades:

a) $f(x) = 4$ $\quad$ c) $h(x) = 3x - 1$ $\quad$ e) $j(x) = 3^x$ $\quad$ g) $l(x) = \frac{1}{x}$

b) $g(x) = -2x$ $\quad$ d) $i(x) = x^2 - 4x$ $\quad$ f) $k(x) = \log_3 x$

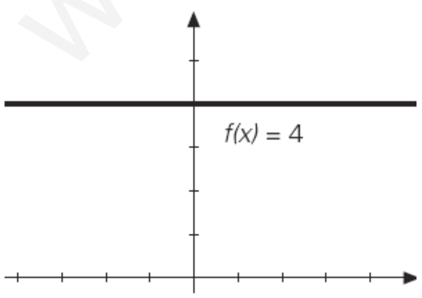
SOLUCIONES

1. Las ecuaciones para estas gráficas son:

a) $y = x^2 + 4x + 5$ $\qquad$ c) $y = -\frac{3}{2x}$ $\qquad$ b) $y = \frac{1}{2}x$ $\qquad$ d) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

2. Las funciones son:

a) $f(x) = 4$



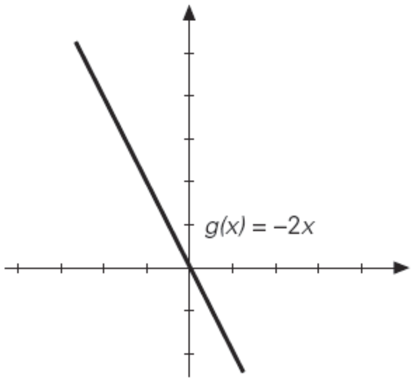
- $f(x)$ es una función constante.

  $\text{Dom} f = \mathbb{R}$

  $\text{Im} f = \{4\}$

  Acotada por 4.

b) $g(x) = -2x$



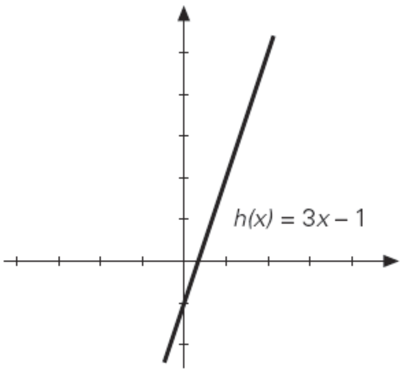
• $g(x)$ es una función lineal.

$\text{Dom}\, g = \mathbb{R}$

$\text{Im}\, g = \mathbb{R}$

Estrictamente decreciente en todo su dominio.

c) $h(x) = 3x - 1$



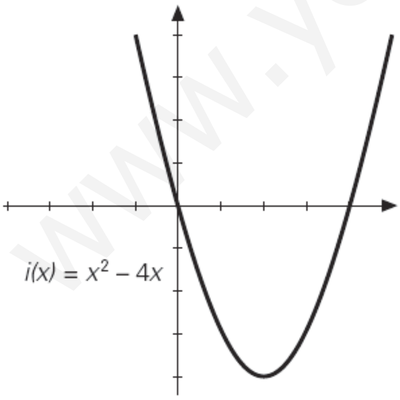
• $h(x)$ es una función afín.

$\text{Dom}\, h = \mathbb{R}$

$\text{Im}\, h = \mathbb{R}$

Estrictamente creciente en todo su dominio.

d) $i(x) = x^2 - 4x$



• $i(x)$ es una función cuadrática.

$\text{Dom}\, i = \mathbb{R}$

$\text{Im}\, i = [-4, +\infty)$

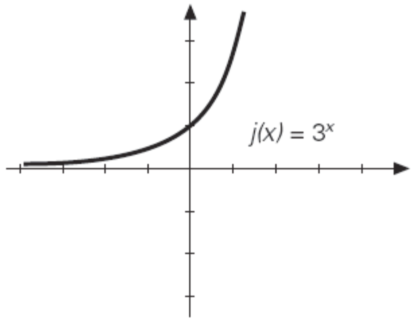
Acotada inferiormente (–4)

Estrictamente decreciente $(-\infty, 2)$

Estrictamente creciente $(2, +\infty)$

Mínimo relativo en $(2, -4)$

e) $j(x)=3^x$



- $j(x)$ es una función exponencial.

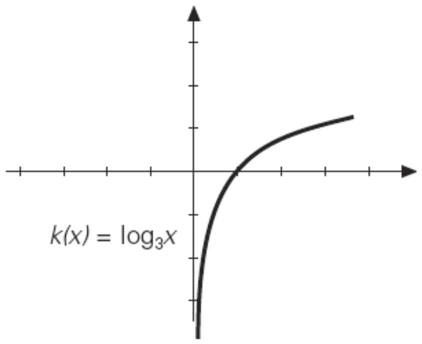
  Dom $j=\mathbb{R}$

  Im $j=(0,+\infty)$

  Acotada inferiormente (0)

  Estrictamente creciente en todo su dominio.

f) $k(x)=\log_3 x$



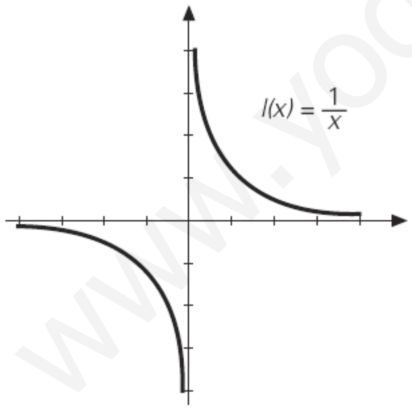
- $k(x)$ es una función logarítmica.

  Dom $k=(0,+\infty)$

  Im $k=\mathbb{R}$

  Estrictamente creciente en todo su dominio.

g) $l(x)=\dfrac{1}{x}$



- $l(x)$ es una función proporcional inversa.

  Dom $l=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

  Im $l=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

  Estrictamente decreciente en todo su dominio.

  Simétrica respecto del origen de coordenadas.

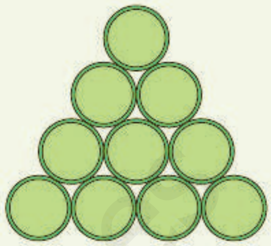
PÁGINA 237

ACTIVIDADES

- Utilizando esta estrategia de marcha atrás, intenta resolver los siguientes problemas:

1. **El caracol.** Un caracol se encuentra en el fondo de un pozo. Cada día asciende 30 m, y por la noche se resbala 20 m hacia abajo. ¿Cuánto tiempo tardará el caracol en salir del pozo? El pozo mide 300 m de profundidad.

2. **Triángulo de monedas.** El triángulo de la figura está formado por 10 monedas iguales. ¿Cuál es el mínimo número de monedas que hay que cambiar de sitio para que el triángulo quede en posición invertida?



3. **Valor desconocido.** Determina el valor de la siguiente expresión:

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1\ldots}}}$$

4. **Pies grandes y sus aves.** El indio Pies Grandes sale de su tienda con un montón de granos de maíz y, cuando regresa de nuevo, no tiene ninguno. Cuando entra en su tienda, su hija Luz de Luna le pregunta qué ha hecho con el maíz. Él le dice: «A cada ave que me encontré le di la mitad de los granos que llevaba más uno. ¿Con cuántas aves te encontraste?», le vuelve a preguntar Luz de Luna. «Me encontré con ocho», responde Pies Grandes. ¿Cuántos granos de maíz llevaba Pies Grandes al principio?

5. **Las pesas.** ¿Cuál es el juego de 4 pesas que es necesario tener para poder pesar en una balanza de dos platos cualquier cantidad entera desde 1 hasta 40 kg?

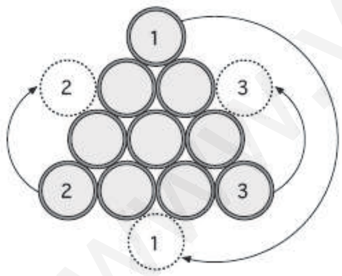
SOLUCIONES

1. Como cada día asciende 30 m y resbala 20 m, en realidad asciende 10 m.

   Luego al cabo de 27 días ha ascendido 270 m, y ya el día 28 asciende a la superficie, pues asciende $30\,\text{m} \Rightarrow 270+30=300\,\text{m}$.

   El caracol tarda 28 días en salir.

2. La solución queda:



   Simplemente cambiando tres monedas, las señaladas con los números 1- 2- 3, el triángulo se invierte.

3. La solución queda:

   Llamamos $x=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$ y elevamos al cuadrado $x^2=1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$

$$\Rightarrow x^2=1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}} \Rightarrow x^2=1+x \Rightarrow x^2-x-1=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \boxed{x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi} = \text{nº áureo.}$$

4. Comenzando el problema desde el final.

Ave 8ª le da $1+1=2$.

Ave 7ª (tiene 6) —le da $3+1=4$ — le quedan 2.

Ave 6ª (tiene 14) —le da $7+1=8$ — le quedan 6.

Ave 5ª (tiene 30) —le da $15+1=16$ — le quedan 14.

Ave 4ª (tiene 62) —le da $31+1=32$ — le quedan 30.

Ave 3ª (tiene 126) —le da $63+1=64$ — le quedan 62.

Ave 2ª (tiene 254) —le da $127+1=128$ — le quedan 126.

Ave 1ª (tiene 510) —le da $255+1=256$ — le quedan 254.

Al principio tenía 510 gramos de maíz.

5. Las pesas que necesitamos han de ser de: 1, 3, 9 y 27 kg.

Así:

1 kg $=1$

2 kg $=3-1$

3 kg $=3$

4 kg $=3+1$

5 kg $=9-3-1$

6 kg $=9-3$

7 kg $=9-3+1$

8 kg $=9-1$

9 kg $=9$

10 kg $=9+1$

Y así sucesivamente.

La suma de los números significa que las pesas se colocan en el mismo plato de la balanza, y la diferencia, que se colocan en platos diferentes.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(1, -3)$ y $B(-2, 6)$.

2. Halla la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(2, 1)$ y $(-5, 3)$.

3. La recta que pasa por los puntos $(1, 2)$ y $(-1, -2)$, ¿es una función constante, lineal o afín?

4. Demuestra que la función $f(x) = 2x + 3$ es estrictamente creciente en todo su dominio, y que la función $g(x) = 5 - 3x$ es estrictamente decreciente en todo su dominio.

5. Averigua si los puntos $(0, -7)$, $(3, -6)$ y $(-3, -8)$ están o no alineados.

6. Halla la función lineal cuya gráfica pasa por el punto $(5, -3)$.

7. Representa gráficamente las siguientes funciones definidas a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -1 \\ 1 - 2x & \text{si } -1 \le x < 1 \\ 3x - 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 5x - 2 & \text{si } x \le 1 \\ -2 & \text{si } x = 2 \\ \frac{1}{2}x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Estudia en cada una de ellas: dominio, recorrido, monotonía, extremos relativos, acotación y simetría.

8. Una determinada empresa nos formula la siguiente oferta por conectarnos a Internet:
   - Cuota mensual de abono: 6 euros.
   - Cada hora de conexión: 1,8 euros.

   a) Encuentra la función que nos indique el precio a pagar mensualmente, según las horas que se haya establecido a conexión.

   b) Representa gráficamente esta función.

   c) La empresa carga un 16% de IVA. ¿Cómo afecta esto a la función anterior y a su gráfica?

9. Encargamos cierta encuadernación de libros, y nos cobran 7 euros cada uno si el número de páginas no supera las 200. A partir de las 200 páginas, por cada página de más se incrementa el precio anterior en 0,02 euros. Responde a las siguientes cuestiones:

   a) Encuentra la función que nos da el precio a pagar por la encuadernación de un libro dependiendo del número de páginas de este.

   b) Represent gráficamente esta función.

1. La recta que pasa por $A(1,-3)$ y $B(-2,6)$ es: $3x+y=0$

2. La pendiente de la recta es: $m=-\dfrac{2}{7}$

3. Es la función lineal $y=2x$

4. Las demostraciones quedan:

   - Sea la relación $x_1<x_2 \Rightarrow 2x_1<2x_2 \Rightarrow 2x_1+3<2x_2+3 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$, luego la función $f(x)$ es estrictamente creciente en todo su dominio.

   - Sea la relación $x_1<x_2 \Rightarrow -3x_1>-3x_2 \Rightarrow -3x_1+5>-3x_2+5 \Rightarrow g(x_1)>g(x_2)$, luego la función $g(x)$ es estrictamente decreciente en todo su dominio.

5. La ecuación de la recta que pasa por $(0,-7)$ y $(3,-6)$ es:

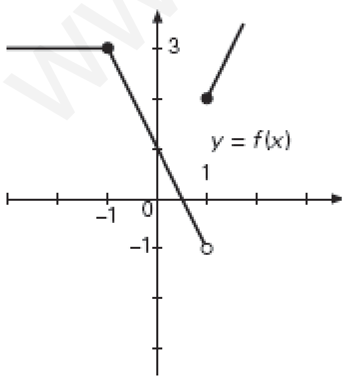
$$y=\frac{1}{3}x-7$$

   El punto $(-3,-8)$ verifica la ecuación, por tanto este punto está en la misma recta que los anteriores, es decir, los puntos están alineados.

6. Una de las posibles ecuaciones es: $y=-\dfrac{3}{5}x$

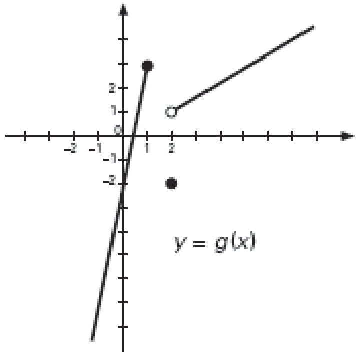
7. Las representaciones quedan:

   a) $y=f(x)$



Dom $f=\mathbb{R}$
Im $f=(-1,+\infty)$
Estrictamente decreciente $(-1,1)$
Estrictamente creciente $(1,+\infty)$
No tiene extremos relativos.
Está acotada inferiormente por (-1).
No es simétrica ni respecto al eje de ordenadas ni respecto al origen.

b) $y = g(x)$



$\text{Dom}\, g = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

$\text{Im}\, g = \mathbb{R}$

Estrictamente creciente $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

No tiene extremos relativos.

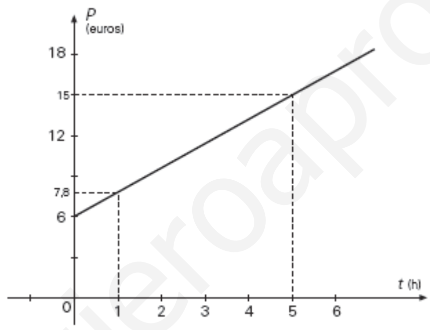
No está acotada.

No es simétrica ni respecto al eje de ordenadas ni respecto al origen.

8. La solución queda:

a) La función es: $P = 6 + 1{,}8 \cdot t$, donde P es el precio a pagar en euros y t el tiempo en horas.

b) Queda:



c) La función será: $f(x) = \dfrac{116}{100} P = \dfrac{116}{100}(6 + 1{,}8t)$.

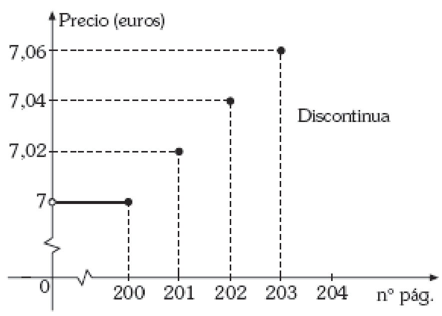
Todas las ordenadas de esta función quedan multiplicadas por 1,16.

9. Queda del siguiente modo:

a) La función que nos da el precio a pagar por encuadernar un libro es:

$$f(x) = \begin{cases} 7 & \text{si } x \leq 200 \\ 7 + 0{,}02x & \text{si } x > 200 \end{cases}$$

b) La gráfica queda:



10. Dibuja, para cada una de las siguientes funciones cuadráticas, sus respectivas gráficas:

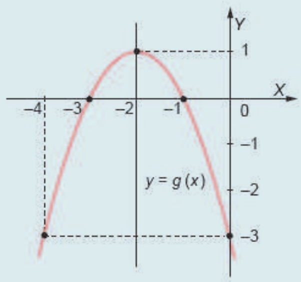
a) $f(x) = x^2 - 8x + 12$ c) $h(x) = x^2 - 2x + 3$ e) $j(x) = -x^2 + 6x - 5$

b) $g(x) = x^2 - 6x + 9$ d) $i(x) = -x^2 + 4x - 6$ f) $k(x) = -x^2 - 4x - 4$

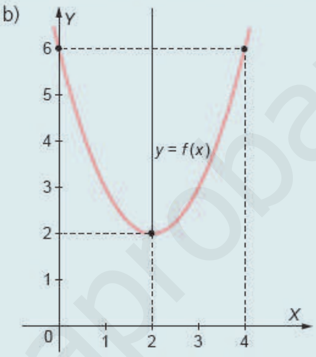
Estudia en cada una de estas funciones: dominio, recorrido, monotonía, extremos relativos, acotación y simetría.

11. Encuentra las ecuaciones o expresiones algebraicas de las funciones cuyas gráficas son las adjuntas.

a)



b)



12. Halla una función cuadrática que se anule, para $x = 1$ y para $x = -1$. ¿Cuántas soluciones hay?

13. Estudia los intervalos en los cuales la función cuadrática $f(x) = x^2 - 6x + 5$ es positiva y los intervalos en los que es negativa. ¿Se anula para algún valor?

14. Halla los intervalos en los cuales las ordenadas de la función $f(x) = x^2 - 5x + 6$ sean iguales o superiores a 2.

15. Un vendimiador ha de recoger 10 000 kg de uva que hoy vendería a 0,30 euros el kilo. Cada día que pasa se estropean 500 kg y el precio aumenta en 0,02 euros el kg. ¿Cuándo ha de vendimiar para obtener el máximo beneficio y cuál será éste?

16. De todos los pares de números que suman 18, ¿cuál es el par cuyo producto es máximo?

17. Para la función cuadrática $f(x) = ax^2$, estudia si son o no ciertas las siguientes igualdades:

a) $f(x + z) = f(x) + f(z)$ b) $f(x \cdot z) = f(x) \cdot f(z)$ c) $f(tx) = tf(x)$

18. Representa, con ayuda de la calculadora, las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^3$ b) $g(x) = -2x^3$ c) $h(x) = \frac{1}{2}x^3$ d) $k(x) = -\frac{1}{2}x^3$

19. Representa, con ayuda de la calculadora, las siguientes funciones:

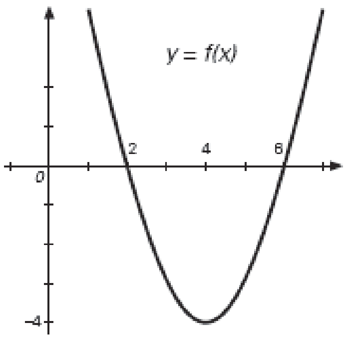
a) $f(x) = 3x^4$ b) $g(x) = -3x^4$ c) $h(x) = \frac{1}{3}x^4$ d) $k(x) = -\frac{1}{3}x^4$

20. Halla los puntos de corte de cada uno de los siguientes pares de funciones:

a) $y = x^2$, $y = x^6$ b) $y = x^5$, $y = x^7$ c) $y = x^2$, $y = x^3$

10. Las gráficas quedan:

a) $f(x)=x^2-8x+12$



$\text{Dom} f=\mathbb{R}$

$\text{Im} f=[-4,+\infty)$

Estrictamente decreciente $(-\infty,4)$.

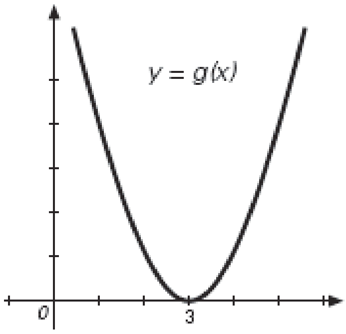
Estrictamente creciente $(4,+\infty)$.

Mínimo relativo en $(4,-4)$.

Está acotada inferiormente por (-4). Mínimo absoluto -4.

Es simétrica respecto a su eje $x=4$.

b) $g(x)=x^2-6x+9$



$\text{Dom} g=\mathbb{R}$

$\text{Im} g=[0,+\infty)$

Estrictamente decreciente $(-\infty,3)$.

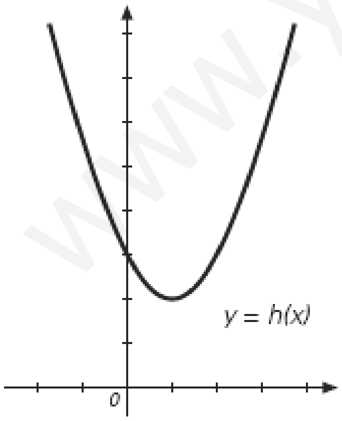
Estrictamente creciente $(3,+\infty)$.

Mínimo relativo en $(3,0)$.

Está acotada inferiormente por (0). Mínimo absoluto en 0.

Es simétrica respecto a su eje $x=3$.

c) $h(x)=x^2-2x+3$



$\text{Dom} h=\mathbb{R}$

$\text{Im} h=[2,+\infty)$

Estrictamente decreciente $(-\infty,1)$.

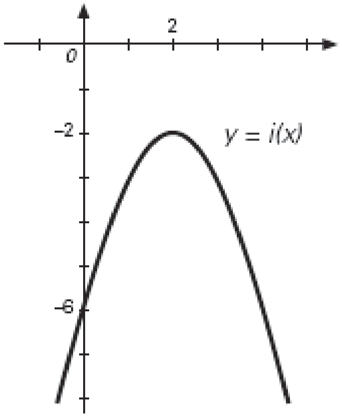
Estrictamente creciente $(1,+\infty)$.

Mínimo relativo en $(1,2)$.

Está acotada inferiormente por (2). Mínimo absoluto en 2.

Es simétrica respecto a su eje $x=1$.

d) $i(x) = -x^2 + 4x - 6$



$\text{Dom}\, i = \mathbb{R}$

$\text{Im}\, i = (-\infty, -2]$

Estrictamente creciente $(-\infty, 2)$.

Estrictamente decreciente $(2, +\infty)$.

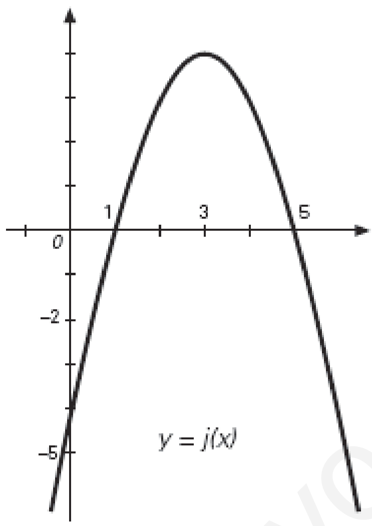
Máximo relativo en $(2, -2)$.

Está acotada superiormente por (-2).

Máximo absoluto en -2.

Es simétrica respecto a su eje $x = 2$.

e) $j(x) = -x^2 + 6x - 5$



$\text{Dom}\, j = \mathbb{R}$

$\text{Im}\, j = (-\infty, 4]$

Estrictamente creciente $(-\infty, 3)$.

Estrictamente decreciente $(3, +\infty)$.

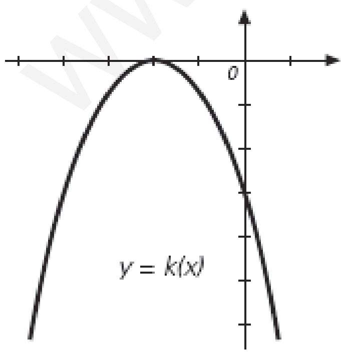
Máximo relativo en $(3, 4)$.

Está acotada superiormente por (4).

Máximo absoluto en 4.

Es simétrica respecto a su eje $x = 3$.

f) $k(x) = -x^2 - 4x - 4$



$\text{Dom}\, k = \mathbb{R}$

$\text{Im}\, k = (-\infty, 0]$

Estrictamente creciente $(-\infty, -2)$.

Estrictamente decreciente $(-2, +\infty)$.

Máximo relativo en $(-2, 0)$.

Está acotada superiormente por (0).

Máximo absoluto en 0.

Es simétrica respecto a su eje $x = -2$.

11. Las soluciones son:

a) $f(x)=ax^2+bx+c$

Imponiendo que pase por el punto (0,6), por el punto (2,2) y tiene en este último su vértice, obtenemos:

$$f(x)=x^2-4x+6$$

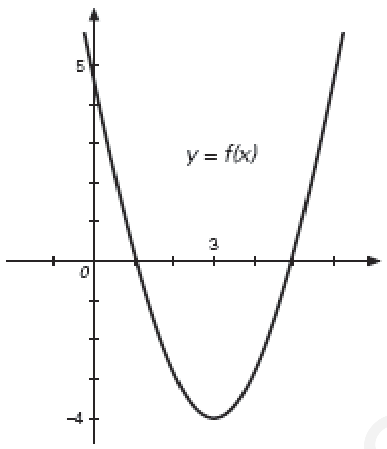
b) $g(x)=ax^2+bx+c$

Imponiendo que pase por el punto $(-1,0)$, $(-3,0)$ y tiene su vértice en $(-2,1)$, obtenemos:

$$g(x)=-x^2-2x-1$$

12. Hay infinitas soluciones. Todas las funciones cuadráticas de la forma: $y=K\left(x^2-1\right)$ con $K\in\mathbb{R}$.

13. La representación queda:



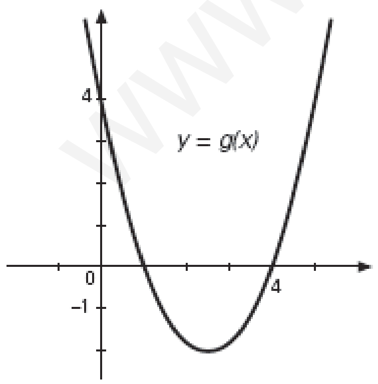
A la vista de la gráfica tenemos que:

$f(x)>0$ en $(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$.

$f(x)<0$ en $(1,5)$.

$f(x)=0$ en $x=1$ y $x=5$.

14. Buscamos $f(x)=x^2-5x+6\geq 2 \Rightarrow x^2-5x+4\geq 0$. Para calcular los intervalos observamos la representación de dicha función:



Veamos los intervalos para los cuales la función $g(x)=x^2-5x+4\geq 0$.

En la gráfica se observa que:

$g(x)>0$ en $(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$.

$g(x)=0$ en $x=1$ y $x=4$.

Luego $f(x)\geq 2$ en $(-\infty,1]\cup[4,+\infty)$

15. La función que da el beneficio P en función del tiempo t en días es:

$$P=(10\,000-500t)\cdot(0{,}3+0{,}02t)=3\,000+50t-10t^2$$

Es una función cuadrática, y el beneficio será máximo en el vértice de la parábola, es decir, en $t=2{,}5$ días, y el beneficio será: $P=3\,062{,}5$ euros.

16. Los números que suman 18 son x y $(18-x)$. Su producto es $P=x(18-x) \Rightarrow P=-x^2+18x$. Este producto será máximo en el vértice de la función, es decir, para $x=9; y=9$ y $P=81$.

17. Se demuestra del siguiente modo:

- $f(x+z)=f(x)+f(z)$

$$\left.\begin{array}{l} f(x+z)=a(x+z)^2=a(x^2+2xz+z^2) \\ f(x)+f(z)=ax^2+az^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Luego } f(x+z)\neq f(x)+f(z)$$

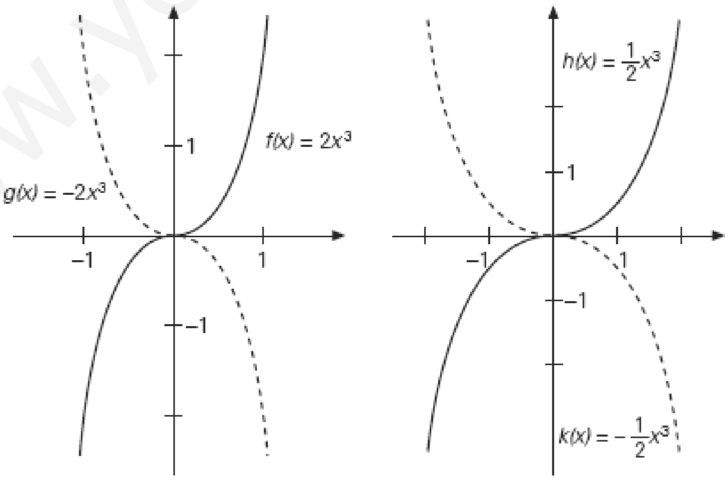
- $f(x\cdot z)=f(x)\cdot f(z)$

$$\left.\begin{array}{l} f(x\cdot z)=a(x\cdot z)^2=a\cdot x^2\cdot z^2 \\ f(x)\cdot f(z)=a^2\cdot x^2\cdot z^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Luego } f(x\cdot z)\neq f(x)\cdot f(z)$$

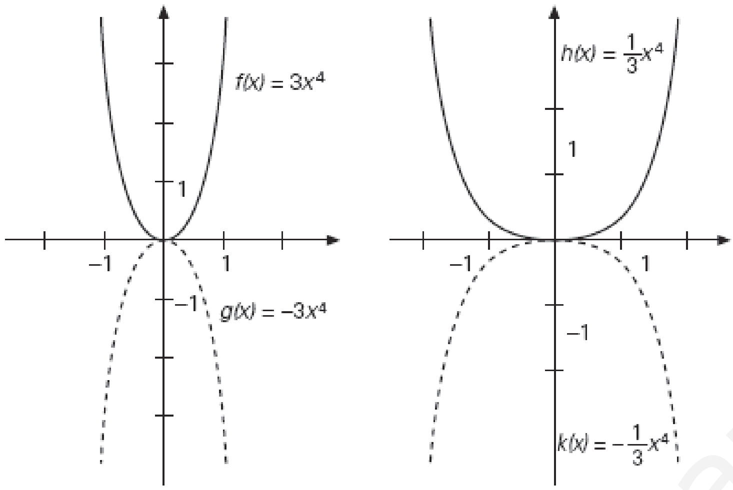
- $f(tx)=t\cdot f(x)$

$$\left.\begin{array}{l} f(tx)=a(tx)^2=a\cdot t^2\cdot x^2 \\ t\cdot f(x)=t\,ax^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Luego } f(tx)\neq t\cdot f(x)$$

18. Las representaciones quedan:



19. Las representaciones quedan:



20. La solución queda:

a) $\left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=x^6 \end{array}\right\} \Rightarrow x^6 - x^2 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Los puntos de corte son: (0,0), (1,1) y (–1,1)

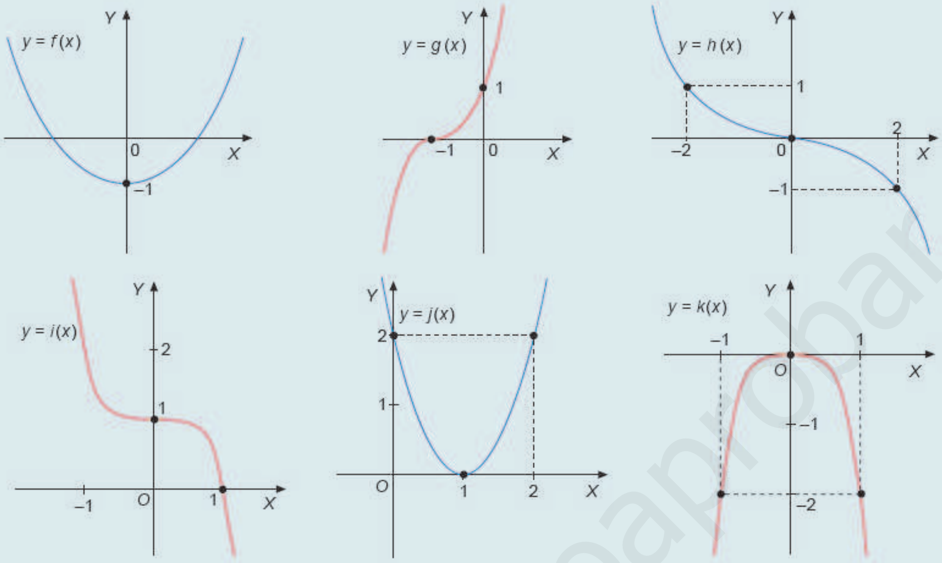
b) $\left.\begin{array}{l} y=x^5 \\ y=x^7 \end{array}\right\} \Rightarrow x^7 - x^5 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Los puntos de corte son: (0,0), (1,1) y (–1,–1)

c) $\left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=x^3 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3 - x^2 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Los puntos de corte son: (0,0), (1,1)

PÁGINA 242

ACTIVIDADES FINALES

■ 21. Asocia cada gráfica con su correspondiente expresión algebraica:



a) $y = -\dfrac{1}{8}x^3$

c) $y = 2(x-1)^2$

e) $y = (x+1)^7$

b) $y = -2x^4$

d) $y = x^4 - 1$

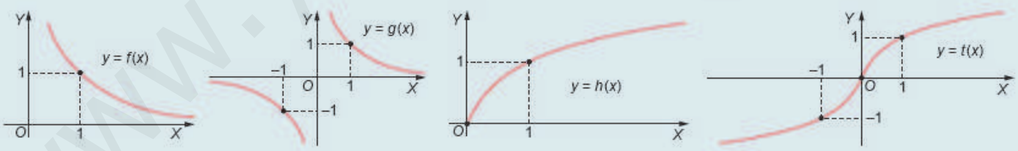
f) $y = -x^5 + 1$

■ 22. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{4}{x^2}$ b) $y = \dfrac{-4}{x^3}$ c) $y = \dfrac{-1}{2x^2}$ d) $y = \dfrac{1}{2x^3}$

■ 23. Asocia cada una de las siguientes gráficas con su expresión algebraica correspondiente:

a) $y = \sqrt[n]{x}$; n impar b) $y = \dfrac{1}{\sqrt[n]{x}}$; n par c) $y = \sqrt[n]{x}$; n par d) $y = \dfrac{1}{\sqrt[n]{x}}$; n impar



Puede serte útil recordar que las gráficas de una función y de su inversa son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

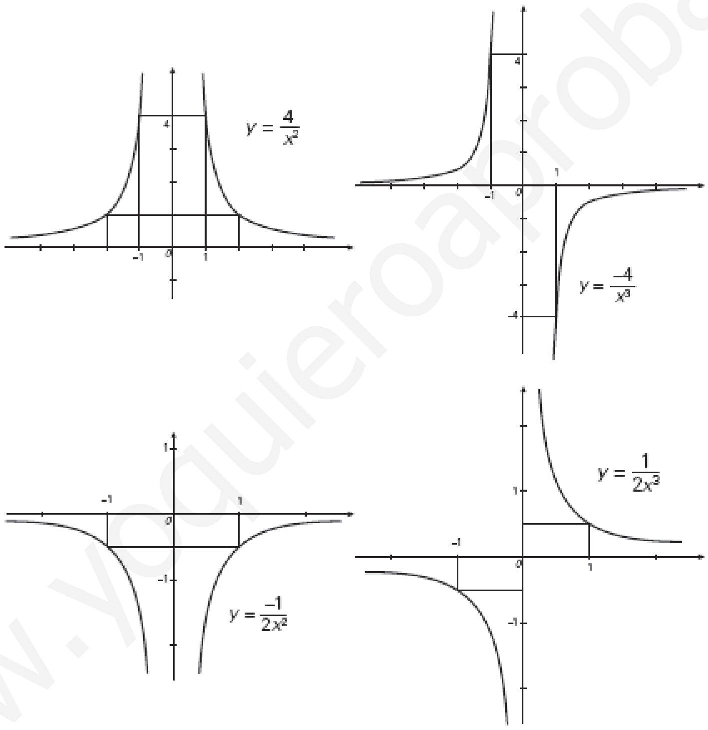
■ 24. Apoyándote en las funciones, potenciales di cuántas soluciones reales tienen las ecuaciones siguientes, sin resolverlas:

a) $\dfrac{1}{x^3} = x^3$ b) $\dfrac{1}{x^4} = x^2$ c) $\dfrac{1}{x^5} = x^2$

21. La correspondencia queda:

$$y = f(x) = x^4 - 1 \quad \Rightarrow \quad (d)$$
$$y = g(x) = (x+1)^7 \quad \Rightarrow \quad (e)$$
$$y = h(x) = -\frac{1}{8}x^3 \quad \Rightarrow \quad (a)$$
$$y = i(x) = -x^5 + 1 \quad \Rightarrow \quad (f)$$
$$y = j(x) = 2(x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad (c)$$
$$y = m(x) = -2x^4 \quad \Rightarrow \quad (b)$$

22. Las representaciones quedan:



23. La correspondencia queda:

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[n]{x}}$; con n par $\qquad g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[n]{x}}$; con n impar

$h(x) = \sqrt[n]{x}$; con n par $\qquad k(x) = \sqrt[n]{x}$; con n impar

24. La solución queda:

a) $x = +1 \quad x = -1$ Dos soluciones
b) $x = +1 \quad x = -1$ Dos soluciones
c) $x = +1$ Una solución

■ 25. Estudia los intervalos en los que se verifican las siguientes desigualdades:

a) $x^4 \leq 1$ b) $x^5 \leq 32$ c) $\frac{1}{x^2} \geq 4$

■ 26. Representa gráficamente, con ayuda de la calculadora, las siguientes funciones:

a) $f(x) = 4^x$ c) $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ e) $h(x) = \log_4 x$

b) $i(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$ d) $j(x) = 4^x + 2$ f) $k(x) = \log_4 x + 4$

■ 27. Usando las propiedades de las funciones exponencial y logarítmica, coloca el signo de desigualdad correspondiente en cada uno de los siguientes casos:

a) $\log_4 2{,}5 \,\square\, \log_4 3$ c) $\log_{\frac{1}{5}} 6 \,\square\, \log_{\frac{1}{5}} 4$ e) $0{,}5^3 \,\square\, 0{,}5^{-3}$

b) $2^3 \,\square\, 2^{-2}$ d) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \square \left(\frac{1}{5}\right)^2$ f) $\log_2 \frac{1}{4} \,\square\, \log_2 \frac{1}{8}$

■ 28. Los controles de calidad de una cadena de montaje de ordenadores han obtenido que el porcentaje de ordenadores que siguen funcionando al cabo de t años viene dado por:

$$p(t) = 100 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t$$

a) Representa gráficamente esta función.

b) ¿Tiene sentido real toda la gráfica obtenida?

c) ¿Qué porcentaje de ordenadores siguen funcionando al cabo de dos años? ¿Y al cabo de cinco años?

d) ¿Qué significado tiene el punto de corte con el eje de ordenadas?

e) ¿Cuánto tiempo ha de pasar para que el porcentaje de ordenadores que sigan funcionando sea del 80%?

■ 29. La cantidad de madera de un bosque aumenta en un 50% cada 100 años. Tomando como punto de partida y como unidad de medida la cantidad de madera que había en este bosque en el año 1600 y como unidad de tiempo el siglo:

a) Determina la cantidad de madera que había o habrá en los años 1800, 2005 y 1900.

b) Encuentra la función correspondiente.

c) ¿Cuánta madera había en los años 1500, 1400, 1450 y 1000?

d) Averigua cuándo habrá una masa de madera doble que en 1600 y cuándo la mitad.

e) Averigua cada cuánto tiempo se triplica la cantidad de madera.

■ 30. Algunas flores como los tulipanes se reproducen por medio de bulbos. Supongamos que un bulbo de tulipán origina otros 5 nuevos que se plantan al año siguiente. Calcula el número de tulipanes que habrá al cabo de 5 años. ¿Cuántos años han de pasar para que haya 15 625 tulipanes? Encuentra la fórmula que describe la multiplicación de los tulipanes.

■ 31. Demuestra que si el punto (m, p) está en la gráfica de la función $y = a^x$, el punto $\left(-m, \frac{1}{p}\right)$ está también en su gráfica.

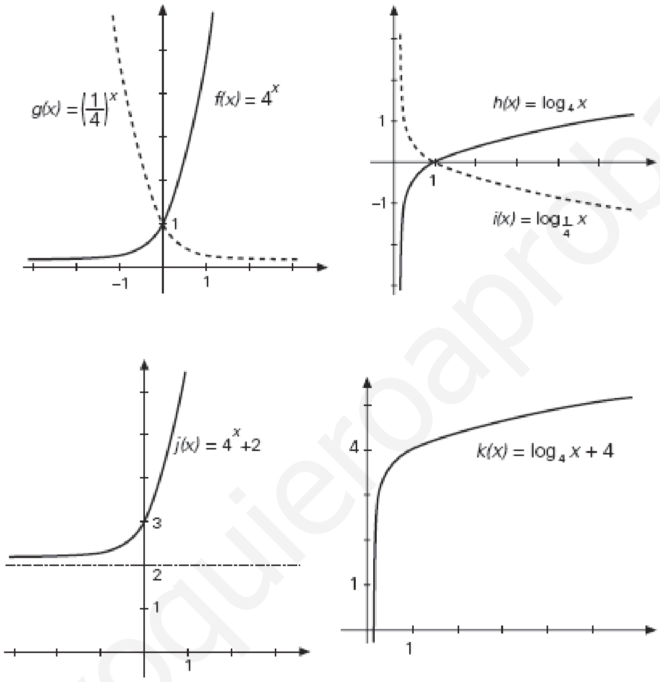
25. La verificación queda:

a) $x^4 \leq 1 \quad \Rightarrow$ Se verifica en $[-1,1]$

b) $x^5 \leq 32 \quad \Rightarrow$ Se verifica en $(-\infty, 2]$

c) $\dfrac{1}{x^2} \geq 4 \quad \Rightarrow$ Se verifica en $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right] - \{0\}$

26. La representación queda:



27. En cada uno de los casos queda:

a) $\log_4 2{,}5 < \log_4 3$

b) $2^3 > 2^{-2}$

c) $\log_{\frac{1}{5}} 6 < \log_{\frac{1}{5}} 4$

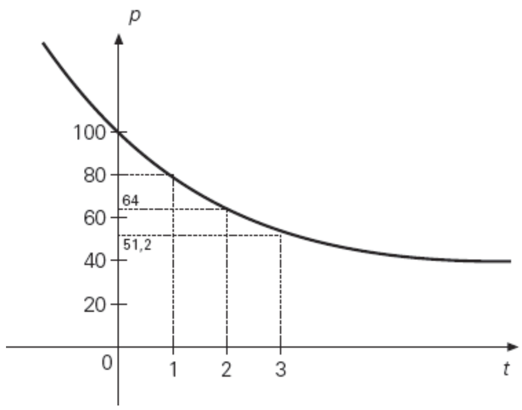
d) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2} > \left(\dfrac{1}{5}\right)^{2}$

e) $0{,}5^3 < 0{,}5^{-3}$

f) $\log_2 \dfrac{1}{4} > \log_2 \dfrac{1}{8}$

28. La solución queda:

a) La gráfica queda:



b) La parte negativa de a gráfica no tiene sentido.

En cada caso:

$t=2 \quad \Rightarrow \quad p=64\%$ siguen funcionando al cabo de 2 años.

$t=5 \quad \Rightarrow \quad p=32,768\%$ siguen funcionando al cabo de 5 años.

c) El punto de corte con el eje de ordenadas significa el 100% de ordenadores que funcionan en el momento de salir de la cadena de montaje.

29. La solución queda:

En el año 1 600 hay una unidad de madera.

En el año 1 800 había $(1+50\% \text{ de } 1)^2 = 1,5^2$ unidades de madera.

En el año 1 900 había $1,5^3$ unidades de madera.

En el año 2 005 había $1,5^{4,05}$ unidades de madera.

a) La función es $y = 1,5^t$, con $t =$ siglos a partir de 1 600.

En el año 1 500 había $1,5^{-1} = 0,667$ unidades de madera (u m).

En el año 1 400 había $1,5^{-2} = 0,444$ u m.

En el año 1 450 había $1,5^{-1.5} = 0,544$ u m.

En el año 1 000 había $1,5^{-6} = 0,087$ u m.

b) Para que haya el doble de madera que en 1 600 se ha de verificar:

$$2=1{,}5^t \;\Rightarrow\; t=\frac{\log 2}{\log 1{,}5}=1{,}710 \text{ siglos} \;\Rightarrow\; \text{Es decir, en el año } 1600+171=1771.$$

Para que haya la mitad de madera que en 1 600 se ha de verificar:

$$\frac{1}{2}=1{,}5^t \;\Rightarrow\; t=\frac{\log 0{,}5}{\log 1{,}5}=-1{,}710 \text{ siglos} \;\Rightarrow\; \text{Es decir, en el año } 1600-171=1429.$$

c) Si consideramos la madera en un tiempo t como $1{,}5^t$ y queremos saber cuánto tiempo $t´$ ha de pasar para que la madera se triplique, $3\cdot 1{,}5^t$, obtenemos:

$$1{,}5^{t´+t}=3\cdot 1{,}5^t \;\Rightarrow\; 1{,}5^{t´}=3 \;\Rightarrow\; t´=2{,}710 \text{ siglos}$$

Es decir, cada 2,710 siglos o 271 años, la madera se triplica.

30. La solución queda:

- La función que da el número de tulipanes al cabo de t años es: $N=5^t$.
- Al cabo de 5 años habrá 3 125 tulipanes.
- Para que haya 15 625 tulipanes han de pasar: $15\,625=5^t \;\Rightarrow\; t=6$ años.

31. La demostración queda:

Si (m, p) está en la gráfica de la función $y=a^x$ entonces:

$$y=a^x \;\Rightarrow\; p=a^m \;\Rightarrow\; \frac{1}{p}=\frac{1}{a^m} \;\Rightarrow\; \frac{1}{p}=a^{-m} \;\Rightarrow\; \left(-m,\frac{1}{p}\right) \text{ pertenece a la misma función } y=a^x$$

PÁGINA 244

ACTIVIDADES FINALES

32. A partir de las gráficas de las funciones circulares halla los valores de x en el intervalo $[0, 2\pi]$ que hagan ciertas las siguientes desigualdades:

a) $\cos x \le -\frac{1}{2}$ b) $\text{tg } x > 1$ c) $2 > \text{sen } x$ d) $\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \ge 0$

33. Utilizando las funciones multiformes adjuntas, calcula:

a) $\text{arcsen } -\frac{\sqrt{3}}{2}$

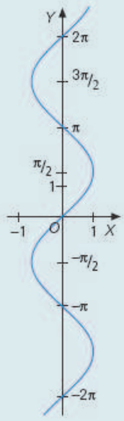
b) $\text{arctg } 1$

c) $\arccos \frac{1}{2}$

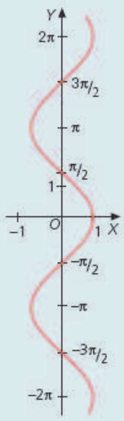
d) $\text{arctg } \sqrt{3}$

e) $\text{arcsen } \frac{1}{2}$

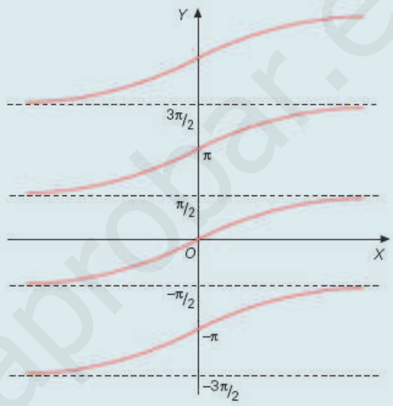
f) $\arccos 0$



$y = \text{arcsen } x$



$y = \arccos x$



$y = \text{arctg } x$

34. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $y = \text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$ b) $y = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ c) $y = \text{arctg }(-1)$

35. A partir de las gráficas de las funciones básicas, explica las gráficas de las siguientes funciones:

a) $y = x^4 - 2$ d) $y = (x-2)^3$ g) $y = \text{sen } x - 3$ j) $y = -2\cos x$

b) $y = \frac{1}{x^3} + 3$ e) $y = \frac{1}{(x+1)^4}$ h) $y = e^{x-1}$ k) $y = \text{sen } \frac{x}{2}$

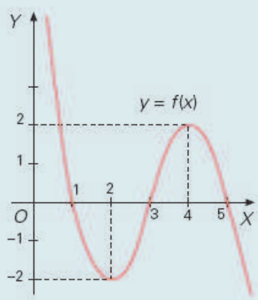
c) $y = \log_2 x + 2$ f) $y = \cos(x - \pi)$ i) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2$ l) $y = \text{sen } 3x$

36. ¿A partir de qué gráficas dibujarías las siguientes funciones? Explica cómo lo harías:

a) $y = (x-1)^2 + 4$ b) $y = \text{sen }(x + \pi) - 3$ c) $y = e^{x+2} - 2$

37. A partir de la gráfica $y = f(x)$ adjunta, dibuja las gráficas de las funciones:

a) $y = f(x+2)$ b) $y = f(x) - 5$ c) $y = -f(x)$ d) $y = |f(x)|$



32. Queda en cada caso:

a) $\cos x \leq -\frac{1}{2}$ en $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$

b) $\operatorname{tg} x > 1$ en $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$

c) $2 > \operatorname{sen} x$ en todo el intervalo $[0, 2\pi]$

d) $\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \geq 0$ en $\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$

33. Queda:

a) $\operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \begin{cases} 240^o + 360^o K \\ 300^o + 360^o K \end{cases}$

b) $\operatorname{arc\,tg} 1 = 45^o + 180^o K$

c) $\operatorname{arc\,cos} \frac{1}{2} = \begin{cases} 60^o + 360^o K \\ 300^o + 360^o K \end{cases}$

d) $\operatorname{arc\,tg} \sqrt{3} = 60^o + 180^o K$

e) $\operatorname{arc\,sen} \frac{1}{2} = \begin{cases} 30^o + 360^o K \\ 150^o + 360^o K \end{cases}$

f) $\operatorname{arc\,cos} 0 = 90^o + 180^o K$

34. Queda:

a) $y = \operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \operatorname{sen} y = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = 210^o + 360^o K \\ y = 330^o + 360^o K \end{cases}$

b) $y = \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = 30^o + 360^o K \\ y = 330^o + 360^o K \end{cases}$

c) $y = \operatorname{arc\,tg}(-1) \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = -1 \Rightarrow y = 135^o + 180^o K$

35. En cada caso queda:

a) Se obtiene de trasladar la gráfica $y = x^4$, 2 unidades hacia abajo.

b) Se obtiene de trasladar la gráfica $y = \frac{1}{x^3}$, 3 unidades hacia arriba.

c) Se obtiene de trasladar la gráfica $y = \log_2 x$, 2 unidades hacia arriba.

d) Se obtiene de trasladar la gráfica $y = x^3$, 2 unidades hacia la derecha.

e) Se obtiene de trasladar la gráfica $y = \frac{1}{x^4}$, 1 unidad hacia la izquierda.

f) Se obtiene de trasladar la gráfica $y = \cos x$, π unidades hacia la derecha.

g) Se obtiene de trasladar la gráfica $y = \operatorname{sen} x$, 3 unidades hacia abajo.

h) Se obtiene de trasladar la gráfica $y = e^x$, 1 unidad hacia la derecha.

i) Se obtiene de trasladar la gráfica $y = \cos x$, $\pi/2$ unidades hacia la izquierda y ésta 2 unidades hacia abajo.

j) Se obtiene a partir de la gráfica $y = \cos x$, multiplicando por -2 sus ordenadas.

k) Se obtiene a partir de la gráfica $y = \operatorname{sen} x$, con período $T = 4\pi$.

l) Se obtiene a partir de la gráfica $y = \operatorname{sen} x$, con período $T = \frac{2\pi}{3}$.

36. Decimos:

a) Se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = x^2$, 1 unidad hacia la derecha y ésta 4 unidades hacia arriba.

b) Se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = \operatorname{sen} x$, π unidades hacia la izquierda y ésta 3 unidades hacia abajo.

c) Se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = e^x$, 2 unidades hacia la izquierda y ésta 2 unidades hacia abajo.

37. Las resultantes quedan: