

Tema 6. Trigonometría (II)

1. Teorema de adición	2
1.1. Razones trigonométricas de la suma de dos ángulos.....	2
1.2. Razones trigonométricas de la diferencia de dos ángulos.	3
2. Razones trigonométricas del ángulo doble y mitad.	5
2.1. Razones trigonométrica del ángulo doble	5
2.2. Razones trigonométrica del ángulo mitad	5
3. Transformaciones de sumas de dos razones trigonométricas en productos.....	7
4. Ecuaciones trigonométricas.....	9
5. Sistemas de ecuaciones trigonométricas	11
5.1. Sistemas resolubles por los cambio de variable o por reducción.	11
5.2. Sistemas donde una ecuación del sistema es resoluble.	11

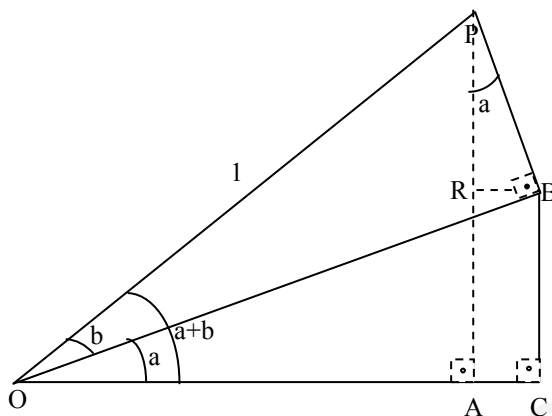
1. Teorema de adición

1.1. Razones trigonométricas de la suma de dos ángulos.

Muchas veces es de utilidad poder calcular las razones trigonométricas de una suma de ángulos a partir de conocer las razones trigonométricas de los ángulos independientes.

El objetivo del apartado es expresar las razones $\text{sen}(a+b)$, $\text{cos}(a+b)$ y $\text{tg}(a+b)$ en función de $\text{sen}(a)$, $\text{sen}(b)$, $\text{cos}(a)$, $\text{cos}(b)$, $\text{tg}(a)$, $\text{tg}(b)$.

Para calcularlo utilizaremos la siguiente figura:



$$\begin{aligned}\text{sen}(a+b) &= AP = AR + RP = CB + RP \\ \text{cos}(a+b) &= OA = OC - AC = OC - RB\end{aligned}$$

Notas: Se cumple que el ángulo $\angle COB = \angle RPB$ al ser sus lados rectas perpendiculares.

$$\text{sen}(a) = \frac{CB}{OB} \rightarrow CB = OB \cdot \text{sen}(a)$$

$$\text{sen}(a) = \frac{RB}{PB} \rightarrow RB = PB \cdot \text{sen}(a)$$

$$\text{cos}(a) = \frac{RP}{PB} \rightarrow RP = PB \cdot \text{cos}(a)$$

$$\text{cos}(a) = \frac{OC}{OB} \rightarrow OC = OB \cdot \text{cos}(a)$$

$$\text{sen}(b) = \frac{PB}{1} \rightarrow PB = \text{sen}(b)$$

$$\text{cos}(b) = \frac{OB}{1} \rightarrow OB = \text{cos}(b)$$

Con estas igualdades fácilmente relacionaremos el seno y coseno de la suma de dos ángulos con las razones simples:

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen}(a) \cdot \text{cos}(b) + \text{cos}(a) \cdot \text{sen}(b)$$

$$\text{cos}(a+b) = \text{cos}(a) \cdot \text{cos}(b) - \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)$$

Para calcular la tangente dividamos seno y coseno:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}(a+b) &= \frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\operatorname{sen}(a)\cdot\cos(b) + \cos(a)\cdot\operatorname{sen}(b)}{\cos(a)\cdot\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\cdot\operatorname{sen}(b)} \stackrel{\substack{\text{dividiendo} \\ \text{num y den por} \\ \cos(a)\cos(b)}}{=} \frac{\frac{\operatorname{sen}(a)\cdot\cos(b) + \cos(a)\cdot\operatorname{sen}(b)}{\cos(a)\cdot\cos(b)}}{\frac{\cos(a)\cdot\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\cdot\operatorname{sen}(b)}{\cos(a)\cdot\cos(b)}} = \\
 &= \frac{\operatorname{tg}(a) + \operatorname{tg}(b)}{1 - \operatorname{tg}(a)\cdot\operatorname{tg}(b)}
 \end{aligned}$$

Reagrupando los resultados:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen}(a)\cdot\cos(b) + \cos(a)\cdot\operatorname{sen}(b) \\
 \cos(a+b) &= \cos(a)\cdot\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\cdot\operatorname{sen}(b) \\
 \operatorname{tg}(a+b) &= \frac{\operatorname{tg}(a) + \operatorname{tg}(b)}{1 - \operatorname{tg}(a)\cdot\operatorname{tg}(b)}
 \end{aligned}$$

1.2. Razones trigonométricas de la diferencia de dos ángulos.

A partir de las razones trigonométricas de la suma es sencillo calcular las razones de la diferencia. Sólo hay que relacionar $\operatorname{sen}(-b)$ y $\cos(-b)$ con $\operatorname{sen}(b)$ y $\cos(b)$. Pero $-b=360-b$, y en el tema anterior vimos (hacer dibujo circunferencia goniométrica):

$$\operatorname{sen}(-b) = \operatorname{sen}(360-b) = -\operatorname{sen}(b)$$

$$\cos(-b) = \cos(360-b) = \cos(b)$$

$$\operatorname{tg}(-b) = \operatorname{tg}(360-b) = -\operatorname{tg}(b)$$

De esta forma:

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a+(-b)) = \operatorname{sen}(a)\cdot\cos(-b) + \cos(a)\cdot\operatorname{sen}(-b) = \operatorname{sen}(a)\cdot\cos(b) - \cos(a)\cdot\operatorname{sen}(b)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a+(-b)) = \cos(a)\cdot\cos(-b) + \operatorname{sen}(a)\cdot\operatorname{sen}(-b) = \cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\cdot\operatorname{sen}(b)$$

$$\operatorname{tg}(a-b) = \operatorname{tg}(a+(-b)) = \frac{\operatorname{tg}(a) + \operatorname{tg}(-b)}{1 - \operatorname{tg}(a)\cdot\operatorname{tg}(-b)} = \frac{\operatorname{tg}(a) - \operatorname{tg}(b)}{1 + \operatorname{tg}(a)\cdot\operatorname{tg}(b)}$$

Resumiendo:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen}(a-b) &= \operatorname{sen}(a)\cdot\cos(b) - \cos(a)\cdot\operatorname{sen}(b) \\
 \cos(a-b) &= \cos(a)\cdot\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\cdot\operatorname{sen}(b) \\
 \operatorname{tg}(a-b) &= \frac{\operatorname{tg}(a) - \operatorname{tg}(b)}{1 + \operatorname{tg}(a)\cdot\operatorname{tg}(b)}
 \end{aligned}$$

Ejercicio1: calcular las razones trigonométricas de 75° y 15° a partir de las razones de 30° , 60° y 45° . Comprueba los resultados calculando las razones trigonométricas de 90° a partir de las razones de 15° y 75° .

$$\operatorname{sen}(75^\circ) = \operatorname{sen}(45^\circ+30^\circ) = \operatorname{sen}(45^\circ)\cdot\cos(30^\circ) + \cos(45^\circ)\cdot\operatorname{sen}(30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos(75^\circ) = \cos(45^\circ+30^\circ) = \cos(45^\circ)\cdot\cos(30^\circ) - \operatorname{sen}(45^\circ)\cdot\operatorname{sen}(30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{tg}(75^\circ) = \operatorname{tg}(45^\circ+30^\circ) = \frac{\operatorname{tg}(45^\circ) + \operatorname{tg}(30^\circ)}{1 - \operatorname{tg}(45^\circ)\cdot\operatorname{tg}(30^\circ)} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\operatorname{sen}(15^\circ) = \operatorname{sen}(45^\circ-30^\circ) = \operatorname{sen}(45^\circ)\cdot\cos(30^\circ) - \cos(45^\circ)\cdot\operatorname{sen}(30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos(15^\circ) = \cos(45^\circ-30^\circ) = \cos(45^\circ)\cdot\cos(30^\circ) + \operatorname{sen}(45^\circ)\cdot\operatorname{sen}(30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{tg}(15^\circ) = \operatorname{tg}(45^\circ-30^\circ) = \frac{\operatorname{tg}(45^\circ) - \operatorname{tg}(30^\circ)}{1 + \operatorname{tg}(45^\circ)\cdot\operatorname{tg}(30^\circ)} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(90^\circ) &= \operatorname{sen}(75^\circ+15^\circ) = \operatorname{sen}(75^\circ)\cdot\cos(15^\circ) + \cos(75^\circ)\cdot\operatorname{sen}(15^\circ) = \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2 = \\ &= \frac{6 + 2 + 2\sqrt{12} + 6 + 2 - 2\sqrt{12}}{16} = \frac{16}{16} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ) &= \cos(75^\circ+15^\circ) = \cos(75^\circ)\cdot\cos(15^\circ) - \operatorname{sen}(75^\circ)\cdot\operatorname{sen}(15^\circ) = \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right) - \\ &- \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ) = \operatorname{tg}(75^\circ+15^\circ) = \frac{\operatorname{tg}(75^\circ) + \operatorname{tg}(15^\circ)}{1 - \operatorname{tg}(75^\circ)\cdot\operatorname{tg}(15^\circ)} = \frac{2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}}{1 - (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \frac{4}{0} = \infty$$

2. Razones trigonométricas del ángulo doble y mitad.

2.1. Razones trigonométrica del ángulo doble

En este apartado buscamos expresar las razones trigonométricas del ángulo doble, $2a$, en función de el ángulo a .

Para calcularlo utilizamos las razones trigonométricas de la suma:

$$\text{sen}(2a) = \text{sen}(a + a) = \text{sen}(a) \cdot \cos(a) + \cos(a) \cdot \text{sen}(a) = 2 \cdot \text{sen}(a) \cdot \cos(a)$$

$$\cos(2a) = \cos(a) \cdot \cos(a) - \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(a) = \cos^2(a) - \text{sen}^2(a)$$

$$\text{tg}(2a) = \frac{\text{tg}(a) + \text{tg}(a)}{1 - \text{tg}(a) \cdot \text{tg}(a)} = \frac{2 \cdot \text{tg}(a)}{1 - \text{tg}^2(a)}$$

Resumiendo:

$$\begin{aligned} \text{sen}(2a) &= 2 \cdot \text{sen}(a) \cdot \cos(a) \\ \cos(2a) &= \cos^2(a) - \text{sen}^2(a) \\ \text{tg}(2a) &= \frac{2 \cdot \text{tg}(a)}{1 - \text{tg}^2(a)} \end{aligned}$$

2.2. Razones trigonométrica del ángulo mitad

En este apartado buscamos expresar las razones trigonométricas del ángulo mitad, $a/2$, en función de el ángulo a .

Para calcularlo utilizaremos la razón trigonométrica del coseno del ángulo doble:

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \text{sen}^2(x) = 1 - \text{sen}^2(x) - \text{sen}^2(x) = 1 - 2\text{sen}^2(x) \rightarrow \text{sen}(x) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(2x)}{2}}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \text{sen}^2(x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1 \rightarrow \cos(x) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(2x)}{2}}$$

Llamando $2x=a \rightarrow x=a/2$

$$\begin{aligned} \text{sen}\left(\frac{a}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(a)}{2}} \\ \cos\left(\frac{a}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(a)}{2}} \\ \text{tg}\left(\frac{a}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(a)}{1 + \cos(a)}} \end{aligned}$$

Ejercicio 2: calcular las razones trigonométricas de 120° a partir de las razones trigonométricas de 60° .

$$\operatorname{sen}(120) = \operatorname{sen}(2 \cdot 60) = 2 \cdot \operatorname{sen}(60) \cdot \cos(60) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{cos}(120) = \operatorname{cos}(2 \cdot 60) = \operatorname{cos}^2(60) - \operatorname{sen}^2(60) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg}(120) = \operatorname{tg}(2 \cdot 60) = \frac{2 \cdot \operatorname{tg}(60)}{1 - \operatorname{tg}^2(60)} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{1 - (\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$$

Ejercicio 3: calcular las razones trigonométricas de 22.5° a partir de las razones trigonométricas de 45° .

$$\operatorname{sen}(22.5) = \operatorname{sen}(45/2) = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} 45}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\operatorname{cos}(22.5) = \operatorname{cos}(45/2) = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{cos} 45}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\operatorname{tg}(22.5) = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}}$$

Nota: hemos cogido las soluciones positivas al pertenece 22.5° al primer cuadrante, y por tanto ser sus razones trigonométricas positivas.

Ejercicio 4:

a) poner $\operatorname{sen}(3a)$ en función de $\operatorname{sen}(a)$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(3a) &= \operatorname{sen}(2a + a) = \operatorname{sen}(2a) \cdot \operatorname{cos}(a) + \operatorname{cos}(2a) \cdot \operatorname{sen}(a) = \\ &= 2 \cdot \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{cos}(a) \cdot \operatorname{cos}(a) + (\operatorname{cos}^2(a) - \operatorname{sen}^2(a)) \operatorname{sen}(a) = \\ &= 2 \cdot \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{cos}^2(a) + \operatorname{cos}^2(a) \cdot \operatorname{sen}(a) - \operatorname{sen}^3(a) = 3 \cdot \operatorname{cos}^2(a) \cdot \operatorname{sen}(a) - \operatorname{sen}^3(a) \\ &= 3 \cdot (1 - \operatorname{sen}^2(a)) \cdot \operatorname{sen}(a) - \operatorname{sen}^3(a) = 3 \cdot \operatorname{sen}(a) - 4 \cdot \operatorname{sen}^3(a) \end{aligned}$$

b) poner $\operatorname{cos}(3a)$ en función de $\operatorname{cos}(a)$

$$\begin{aligned} \operatorname{cos}(3a) &= \operatorname{cos}(2a + a) = \operatorname{cos}(2a) \cdot \operatorname{cos}(a) - \operatorname{sen}(2a) \cdot \operatorname{sen}(a) = \\ &= (\operatorname{cos}^2 a - \operatorname{sen}^2 a) \operatorname{cos}(a) - 2 \cdot \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{cos}(a) \cdot \operatorname{sen}(a) = \\ &= \operatorname{cos}^3 a - 3 \operatorname{sen}^2(a) \cdot \operatorname{cos}(a) = \operatorname{cos}^3 a - 3 \cdot (1 - \operatorname{cos}^2(a)) \cdot \operatorname{cos}(a) = \\ &= -3 \operatorname{cos}(a) + 4 \operatorname{cos}^3(a) \end{aligned}$$

c) poner $\text{sen}(4a)$ en función de $\text{sen}(a)$

$$\begin{aligned} \text{sen}(4a) &= \text{sen}(2 \cdot 2a) = 2 \cdot \text{sen}(2a) \cdot \cos(2a) = 2 \cdot (2\text{sen}(a) \cdot \cos(a)) \cdot (\cos^2(a) - \text{sen}^2(a)) = \\ &= 4\text{sen}(a) \cdot \cos(a) (1 - 2\text{sen}^2(a)) = 4\text{sen}(a) \cdot \sqrt{1 - \text{sen}^2(a)} (1 - 2\text{sen}^2(a)) \end{aligned}$$

3. Transformaciones de sumas de dos razones trigonométricas en productos.

En este apartado vamos a ver como transformar la suma o diferencia de dos razones trigonométricas en un producto de 2 razones trigonométricas. Para este objetivo partimos de las ya conocidas razones trigonométricas del seno y coseno de la suma y diferencia:

$$(1) \text{sen}(a + b) = \text{sen}(a) \cdot \cos(b) + \cos(a) \cdot \text{sen}(b)$$

$$(2) \text{sen}(a - b) = \text{sen}(a) \cdot \cos(b) - \cos(a) \cdot \text{sen}(b)$$

$$(1)+(2) \rightarrow \text{sen}(a + b) + \text{sen}(a - b) = 2 \cdot \text{sen}(a) \cdot \cos(b)$$

$$(1)-(2) \rightarrow \text{sen}(a + b) - \text{sen}(a - b) = 2 \cdot \cos(a) \cdot \text{sen}(b)$$

Como el objetivo es que sean los argumentos de las razones trigonométricas sumadas conocidos se realiza el siguiente cambio de variable:

$$\left\{ \begin{array}{l} a + b = A \\ a - b = B \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{A + B}{2} \\ b = \frac{A - B}{2} \end{array} \right.$$

De esta forma:

$$\begin{aligned} \text{sen}(A) + \text{sen}(B) &= 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{A + B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A - B}{2}\right) \\ \text{sen}(A) - \text{sen}(B) &= 2 \cdot \cos\left(\frac{A + B}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{A - B}{2}\right) \end{aligned}$$

Vamos a ver la suma y diferencia de cosenos:

$$(1) \cos(a + b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)$$

$$(2) \cos(a - b) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)$$

$$(1)+(2) \rightarrow \cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cdot \cos(a) \cdot \cos(b)$$

$$(1)-(2) \rightarrow \cos(a + b) - \cos(a - b) = -2 \cdot \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)$$

Haciendo el cambio de variable:

$$\begin{aligned} \cos(A) + \cos(B) &= 2 \cdot \cos\left(\frac{A + B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A - B}{2}\right) \\ \cos(A) - \cos(B) &= -2 \cdot \text{sen}\left(\frac{A + B}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{A - B}{2}\right) \end{aligned}$$

Ejercicio5: Calcular sin calculadora $\text{sen}(75^\circ)+\text{sen}(15^\circ)$, $\text{sen}(75^\circ)-\text{sen}(15^\circ)$, $\text{cos}(75^\circ)+\text{cos}(15^\circ)$, $\text{cos}(75^\circ)-\text{cos}(15^\circ)$

$$\text{sen}(75) + \text{sen}(15) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{75+15}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{75-15}{2}\right) = 2 \cdot \text{sen}(45) \cdot \cos(30) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{sen}(75) - \text{sen}(15) = 2 \cdot \cos\left(\frac{75+15}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{75-15}{2}\right) = 2 \cdot \cos(45) \cdot \text{sen}(30) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{cos}(75) + \text{cos}(15) = 2 \cdot \cos\left(\frac{75+15}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{75-15}{2}\right) = 2 \cdot \cos(45) \cdot \cos(30) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{cos}(75) - \text{cos}(15) = -2 \cdot \text{sen}\left(\frac{75+15}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{75-15}{2}\right) = -2 \cdot \text{sen}(45) \cdot \text{sen}(30) = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ejercicio 6: Calcular $\text{sen}(45+a)+\text{sen}(45-a)$, $\text{cos}(120+a)+\text{cos}(60+a)$, $\text{cos}(270-a)-\text{cos}(90-a)$:

$$\text{sen}(45+a) + \text{sen}(45-a) = 2 \cdot \text{sen}(45) \cdot \cos(a) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos(a) = \sqrt{2} \cos(a)$$

$$\text{cos}(120+a) + \text{cos}(60+a) = 2 \cdot \cos(90+a) \cdot \cos(30) = 2 \cdot \cos(90+a) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cos(90+a) = -\sqrt{3} \text{sen}(a)$$

$$\text{cos}(270-a) - \text{cos}(90-a) = -2 \cdot \text{sen}(180-a) \cdot \text{sen}(90) = -2 \cdot \text{sen}(180-a) = -2 \cdot \text{sen}(a)$$

Ejercicio 7: Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\frac{\text{sen}(5a) - \text{sen}(3a)}{\text{cos}(5a) + \text{cos}(3a)}$

$$\frac{\text{sen}(5a) - \text{sen}(3a)}{\text{cos}(5a) + \text{cos}(3a)} = \frac{2 \cdot \cos(4a) \cdot \text{sen}(a)}{2 \cdot \cos(4a) \cdot \cos(a)} = \text{tg}(a)$$

b) $\frac{\text{sen}(9a) + \text{sen}(a)}{\text{cos}(9a) - \text{cos}(a)}$

$$\frac{\text{sen}(9a) + \text{sen}(a)}{\text{cos}(9a) - \text{cos}(a)} = \frac{2 \cdot \text{sen}(5a) \cdot \cos(4a)}{-2 \cdot \text{sen}(5a) \cdot \text{sen}(4a)} = -\cot g(4a)$$

c) $\frac{\text{cos}(x-y) - \text{cos}(x+y)}{\text{sen}(x+y) + \text{sen}(x-y)}$

$$\frac{\text{cos}(x-y) - \text{cos}(x+y)}{\text{sen}(x+y) + \text{sen}(x-y)} = \frac{-2 \cdot \text{sen}(x) \cdot \text{sen}(-y)}{2 \cdot \text{sen}(x) \cdot \cos(y)} = \text{tg}(y)$$

4. Ecuaciones trigonométricas

En el tema anterior hemos resuelto ecuaciones trigonométricas en las que los argumentos que aparecían en todas las razones eran el mismo. En este tema resolveremos las ecuaciones cuando aparece en las razones diferentes argumentos. Los objetivos para resolver las ecuaciones son los siguientes:

1. Tendremos que buscar factorizar las razones trigonométricas igualadas a cero. Para esto se utiliza el teorema de la suma o diferencia, y especialmente el teorema de la adición
2. A partir de los teoremas del ángulo doble o mitad y las ecuación $\text{sen}^2(x)+\text{cos}^2(x)=1$ poner todas las razones en función de un única razón trigonométrica con mismo argumento.

Ejemplos:

a) $\text{sen}(2x)+\text{cos}(x)=0$.

No podemos aplicar el teorema de adición, pues no hay para la suma de seno y coseno. Pongamos $\text{sen}(2x)$ con razones trigonométricas de argumento x :

$$2 \cdot \text{sen}(x) \cdot \text{cos}(x) + \text{cos}(x) = 0$$

Como está la ecuación igualada a cero podemos factorizar:

$$\text{cos}(x) \cdot (2\text{sen}(x)+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \text{cos}(x) = 0 \\ 2 \cdot \text{sen}(x) + 1 = 0 \end{cases}$$

$$1) \text{cos}(x)=0 \rightarrow x = \begin{cases} 90 + 360k \\ 270 + 360k \end{cases}$$

$$2) 2 \cdot \text{sen}(x) + 1 = 0 \rightarrow \text{sen}(x) = -1/2 \rightarrow x = \begin{cases} -30 = 330 + 360k \\ 210 + 360k \end{cases}$$

b) $\text{sen}(4x)-\text{sen}(2x)=0$.

Ahora si podemos aplicar el teorema de adición, además como está igualado a cero será fácil resolver la ecuación.

$$\text{sen}(4x)-\text{sen}(2x)=0 \rightarrow 2 \cdot \text{cos}(3x) \cdot \text{sen}(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} \text{cos}(3x) = 0 \\ \text{sen}(x) = 0 \end{cases}$$

$$1) \text{cos}(3x)=0 \rightarrow 3x = \begin{cases} 90 + 360k \\ 270 + 360k \end{cases} \rightarrow x = \begin{cases} 30 + 120k \\ 90 + 120k \end{cases} = \begin{cases} 30^\circ + 360^\circ k \\ 150^\circ + 360^\circ k \\ 270^\circ + 360^\circ k \\ 90^\circ + 360^\circ k \\ 210^\circ + 360^\circ k \\ 330^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

$$2) \text{sen}(x) = 0 \rightarrow x = \begin{cases} 0 + 360k \\ 180 + 360k \end{cases}$$

c) $\cos(2x) - \sin(x) = \sin^2(x)$

Tenemos que buscar tener el mismo argumento, de forma que pondremos $\cos(2x)$ como razones trigonométricas de argumento x :

$$\cos(2x) - \sin(x) = \sin^2(x) \rightarrow \cos^2(x) - \sin^2(x) - \sin(x) = \sin^2(x) \rightarrow \cos^2(x) - 2\sin^2(x) - \sin(x) = 0$$

Para que la ecuación esté en función de una misma razón trigonométrica podremos $\cos^2 x$ en función del seno: $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$

$$1 - \sin^2(x) - 2\sin^2(x) - \sin(x) = 0 \rightarrow -3 \cdot \sin^2(x) - \sin(x) + 1 = 0 \rightarrow \sin(x) = \begin{cases} 0,43 \\ -0,77 \end{cases}$$

$$1) \sin(x) = 0,43 \rightarrow x = \begin{cases} 25,7 + 360k \\ 154,3 + 360k \end{cases}$$

$$2) \sin(x) = -0,77 \rightarrow x = \begin{cases} -50,1 = 309,9 + 360k \\ 230,1 + 360k \end{cases}$$

d) $\sin(x) + \cos(x) = 1$

Pongamos $\sin(x)$ en función de $\cos(x)$ (o al revés) $\rightarrow \sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x}$

$$\sqrt{1 - \cos^2 x} + \cos(x) = 1 \rightarrow \text{cambio variable } \cos(x) = y \rightarrow \sqrt{1 - y^2} + y = 1 \rightarrow \sqrt{1 - y^2} = 1 - y \rightarrow (\text{elevando al cuadrado}) 1 - y^2 = 1 - 2y + y^2 \rightarrow 2y^2 - 2y = 0 \rightarrow y = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$1) \cos(x) = 0 \rightarrow x = \begin{cases} 90 + 360k \\ 270 + 360k \end{cases}$$

$$2) \cos(x) = 1 \rightarrow x = 0 + 360k$$

Tenemos que comprobar que solución es válida (al elevar al cuadrado):

- $x = 90 \rightarrow \sin(90) + \cos(90) = 1$ **válida**
- $x = 270 \rightarrow \sin(270) + \cos(270) = -1$, no válida
- $x = 0 \rightarrow \sin(0) + \cos(0) = 1$, **válida**

5. Sistemas de ecuaciones trigonométricas

Un sistema de ecuaciones trigonométricas cuando al menos en una de las ecuaciones que la forman es una ecuación trigonométrica.

Para resolver los sistemas trigonométricos no siempre sencillo, veamos los tipos de sistemas más frecuentes:

Nota: en las funciones trigonométricas donde aparezcan las incógnitas en ecuaciones no trigonométricas se suponen que están expresadas en radianes.

5.1. Sistemas resolubles por los cambio de variable o por reducción.

Son sistemas donde aparecen dos razones trigonométricas, tal que podemos hacer el cambio de variable y obtener un sistema de ecuaciones no trigonométricas. **Ejemplos:**

$$1) \begin{cases} \text{sen}(2x) + \cos(3y) = 1 \\ 2 \cdot \text{sen}(2x) + 4 \cdot \cos(3y) = 3 \end{cases} \rightarrow X = \text{sen}(2x), Y = \cos(3y) \rightarrow \begin{cases} X + Y = 1 \\ 2 \cdot X + 4 \cdot Y = 3 \end{cases} \rightarrow X = 1/2, Y = 1/2.$$

$$X = 1/2 \rightarrow \text{sen}(2x) = 1/2 \rightarrow x = 15^\circ + 360^\circ k, x = 75^\circ + 360^\circ k, x = 195^\circ + 360^\circ k, x = 255^\circ + 360^\circ k$$

$$Y = 1/2 \rightarrow \cos(3Y) = 1/2 \rightarrow y = 100^\circ + 360^\circ k, y = 220^\circ + 360^\circ k, y = 340^\circ + 360^\circ k, y = 20^\circ + 360^\circ k, y = 140^\circ + 360^\circ k, y = 260^\circ + 360^\circ k$$

$$2) \begin{cases} (1) y + \cos^2(x) = 1 \\ (2) 2 \cdot y + 2 \cdot \text{sen}^2(x) = 0 \end{cases}$$

$$2 \cdot (1) - (2) \rightarrow 2 \cdot \cos^2(x) - 2 \cdot \text{sen}^2(x) = 2 \rightarrow 1 - \text{sen}^2(x) - \text{sen}^2(x) = 1 \rightarrow \text{sen}(x) = 0 \rightarrow x = \begin{cases} 0^\circ + 360^\circ k \\ 180^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

$$y = 1 - \cos^2(x) = 0 \text{ rad} = 0^\circ$$

5.2. Sistemas donde una ecuación del sistema es resoluble.

$$3) \begin{cases} \text{sen}(x) + \cos(y) = 1 \\ x + y = \pi / 2 \end{cases} \rightarrow x = \pi / 2 - y$$

$$\text{sen}(\pi / 2 - y) + \cos(y) = 1 \rightarrow \cos(y) + \cos(y) = 1 \rightarrow \cos(y) = 1/2 \rightarrow y = \begin{cases} 60^\circ + 360^\circ \cdot k = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ 300^\circ + 360^\circ \cdot k = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k \right) = \frac{\pi}{6} - 2\pi k \\ \frac{\pi}{2} - \left(\frac{5\pi}{3} + 2\pi k \right) = \frac{-7\pi}{6} - 2\pi k \end{cases}$$

$$\text{Soluciones, si } x = \frac{\pi}{6} - 2\pi k \rightarrow y = \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \text{ si } x = \frac{-7\pi}{6} - 2\pi k \rightarrow y = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$$

$$4) \begin{cases} \text{sen}(x-y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}(x+y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y = \begin{cases} 45^\circ+360^\circ k \\ 135^\circ+360^\circ k \end{cases} \\ x+y = \begin{cases} 60^\circ+360^\circ k \\ 120^\circ+360^\circ k \end{cases} \end{cases}$$

Tenemos 4 posibles sistemas:

a)

$$\begin{cases} x-y = 45^\circ+360^\circ k \\ x+y = 60^\circ+360^\circ k \end{cases} \rightarrow 2x = 105^\circ+360^\circ k \rightarrow \begin{cases} x = 52,5^\circ+360^\circ k \rightarrow y = 7,5^\circ+360^\circ k \\ x = 232,5^\circ+360^\circ k \rightarrow y = 187,5^\circ+360^\circ k \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x-y = 45^\circ+360^\circ k \\ x+y = 120^\circ+360^\circ k \end{cases} \rightarrow 2x = 165^\circ+360^\circ k \rightarrow \begin{cases} x = 82,5^\circ+360^\circ k \rightarrow y = 37,5^\circ+360^\circ k \\ x = 262,5^\circ+360^\circ k \rightarrow y = 217,5^\circ+360^\circ k \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x-y = 135^\circ+360^\circ k \\ x+y = 60^\circ+360^\circ k \end{cases} \rightarrow 2x = 195^\circ+360^\circ k \rightarrow \begin{cases} x = 97,5^\circ+360^\circ k \rightarrow y = 322,5^\circ+360^\circ k \\ x = 277,5^\circ+360^\circ k \rightarrow y = 142,5^\circ+360^\circ k \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} x-y = 135^\circ+360^\circ k \\ x+y = 120^\circ+360^\circ k \end{cases} \rightarrow 2x = 255^\circ+360^\circ k \rightarrow \begin{cases} x = 127,5^\circ+360^\circ k \rightarrow y = 352,5^\circ+360^\circ k \\ x = 307,5^\circ+360^\circ k \rightarrow y = 172,5^\circ+360^\circ k \end{cases}$$

PROBLEMAS

SISTEMAS

1. Resolver los siguientes sistemas

a)

$$\begin{cases} (1) x + \text{sen}^2 y = 2 \\ (2) x + \text{cos}^2 y = 1 \end{cases} \rightarrow (1)-(2) \rightarrow \text{sen}^2 y - \text{cos}^2 y = 1 \rightarrow 1 - \text{cos}^2 y - \text{cos}^2 y = 1 \rightarrow$$

$$\text{cos } y = 0 \rightarrow y = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2\pi k \rightarrow x = 1 - \text{cos}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \rightarrow x = 1 - \text{cos}^2\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} (1) \text{sen}(x) \cdot \text{cos}(y) = \frac{3}{4} \\ (2) \text{cos}(x) \cdot \text{sen}(y) = \frac{1}{4} \end{cases} \rightarrow (1)+(2) \rightarrow \text{sen}(x) \cdot \text{cos}(y) + \text{cos}(x) \cdot \text{sen}(y) = 1 \rightarrow \text{sen}(x+y) = 1$$

$$(x+y) = 90^\circ \rightarrow x = 90^\circ - y$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \operatorname{sen}(90-y) \cdot \cos(y) = \frac{3}{4} \\ (2) \cos(90-y) \cdot \operatorname{sen}(y) = \frac{1}{4} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} (1) \cos(y) \cdot \cos(y) = \frac{3}{4} \\ (2) \operatorname{sen}(y) \cdot \operatorname{sen}(y) = \frac{1}{4} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} (1) \cos^2(y) = \frac{3}{4} \\ (2) \operatorname{sen}^2(y) = \frac{1}{4} \end{array} \right\} \rightarrow \cos(y) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow y = \begin{cases} 30^\circ + 360^\circ k \rightarrow x = 60^\circ + 360^\circ k \\ 330^\circ + 360^\circ k \rightarrow x = -240^\circ + 360^\circ k = 120^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

$$\cos(y) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow y = \begin{cases} 150^\circ + 360^\circ k \rightarrow x = -60^\circ + 360^\circ k = 300^\circ + 360^\circ k \\ 210^\circ + 360^\circ k \rightarrow x = -120^\circ + 360^\circ k = 240^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

c)

$$\left. \begin{array}{l} (1) \cos(x) + \cos(y) = 1 \\ (2) \cos(x+y) = 1 \end{array} \right\} \rightarrow x+y=0 \rightarrow y=-x \rightarrow \cos(x) + \cos(-x) = 1 \rightarrow 2 \cdot \cos(x) = 1 \rightarrow \cos(x) = \frac{1}{2}$$

$$x = \begin{cases} 60^\circ + 360^\circ k \rightarrow y = -60^\circ + 360^\circ k = 300^\circ + 360^\circ k \\ 300^\circ + 360^\circ k \rightarrow y = -300^\circ + 360^\circ k = 60^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

d)

$$\left. \begin{array}{l} (1) x+y = \frac{\pi}{2} \\ (2) \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{array} \right\} \rightarrow y = \frac{\pi}{2} - x \rightarrow \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} \rightarrow$$

$$\operatorname{sen}(x) + \cos(x) = \frac{\sqrt{6}}{2} \rightarrow \operatorname{sen}(x) + \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(x)} = \frac{\sqrt{6}}{2} \xrightarrow{\operatorname{sen}(x)=X} \sqrt{1 - X^2} = \frac{\sqrt{6}}{2} - X$$

$$1 - X^2 = \frac{6}{4} - \sqrt{6}X + X^2 \rightarrow 2X^2 - \sqrt{6}X + \frac{1}{2} = 0 \rightarrow X = \begin{cases} \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

$$x = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right) = \begin{cases} 15^\circ + 360^\circ k \rightarrow y = 75^\circ + 360^\circ k \\ 165^\circ + 360^\circ k \rightarrow y = -75^\circ + 360^\circ k = 285^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

$$x = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right) = \begin{cases} 75^\circ + 360^\circ k \rightarrow y = 15^\circ + 360^\circ k \\ 105^\circ + 360^\circ k \rightarrow y = -15^\circ + 360^\circ k = 345^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

Haciendo las comprobaciones (al elevar al cuadrado hay que comprobar) sólo son ciertas:

- $x=75^\circ+360^\circ k, y=15^\circ+360^\circ k$
- $x=15^\circ+360^\circ k, y=75^\circ+360^\circ k$

ECUACIONES

2. Resolver las siguientes ecuaciones

a)

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \frac{\pi}{4} + 2x = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \rightarrow 2x = \begin{cases} \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} + 2\pi k \\ \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12} + 2\pi k \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} \frac{\pi}{24} + 2\pi k \\ \frac{25\pi}{24} + 2\pi k \\ \frac{24}{5\pi} + 2\pi k \\ \frac{24}{29\pi} + 2\pi k \end{cases}$$

b)

$$\operatorname{sen}(3x) - \operatorname{sen}(30^\circ) = 0 \rightarrow \operatorname{sen}(3x) = \operatorname{sen}(30^\circ) \rightarrow \operatorname{sen}(3x) = \frac{1}{2} \rightarrow 3x = \begin{cases} 30^\circ + 360^\circ k \\ 150^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} 10^\circ + 120^\circ k \\ 50^\circ + 120^\circ k \end{cases} = \begin{cases} 10^\circ + 360^\circ k \\ 130^\circ + 360^\circ k \\ 250^\circ + 360^\circ k \\ 50^\circ + 360^\circ k \\ 170^\circ + 360^\circ k \\ 290^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

c)

$$\operatorname{sen}(2x) = 2 \cdot \cos(x) \rightarrow 2 \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x) - 2 \cdot \cos(x) = 0 \rightarrow 2 \cdot \cos(x) \cdot (\operatorname{sen}(x) - 1) = 0$$

$$\cos(x) = 0 \rightarrow x = \begin{cases} 90^\circ + 360^\circ k \\ 270^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

$$\operatorname{sen}(x) = 1 \rightarrow x = 90^\circ + 360^\circ k$$

d)

$$\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(3x) = \cos(x) \rightarrow 2 \cdot \operatorname{sen}(2x) \cdot \cos(x) = \cos(x) \rightarrow \cos(x)(2 \cdot \operatorname{sen}(2x) - 1) = 0$$

$$\cos(x) = 0 \rightarrow x = \begin{cases} 90^\circ + 360^\circ k \\ 270^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

$$\operatorname{sen}(2x) = \frac{1}{2} \rightarrow 2x = \begin{cases} 30^\circ + 360^\circ k \\ 150^\circ + 360^\circ k \end{cases} \rightarrow x = \begin{cases} 15^\circ + 180^\circ k \\ 75^\circ + 180^\circ k \end{cases} = \begin{cases} 15^\circ + 360^\circ k \\ 195^\circ + 360^\circ k \\ 75^\circ + 360^\circ k \\ 255^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

e)

$$6 \cdot \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos(x) = 1 \rightarrow 6 \cdot \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \rightarrow 8 \cdot \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2$$

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4} \rightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{x}{2}\right) = \begin{cases} 60^\circ + 360^\circ k \\ 300^\circ + 360^\circ + 360^\circ k \\ 120^\circ + 360^\circ k \\ 240^\circ + 360^\circ k \end{cases} \rightarrow x = \begin{cases} 120^\circ + 720k \\ 600^\circ + 720^\circ k \\ 240^\circ + 720^\circ k \\ 480^\circ + 720k \end{cases} \rightarrow x = \begin{cases} 120^\circ + 720k \\ 240^\circ + 720k \end{cases}$$

f)

$$\operatorname{sen}(x) + \sqrt{3} \cdot \cos(x) = 2 \rightarrow \sqrt{3} \cdot \cos(x) = 2 - \operatorname{sen}(x) \rightarrow 3 \cdot \cos^2 x = 4 - 4 \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}^2(x)$$

$$3 - 3 \operatorname{sen}^2(x) = 4 - 4 \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}^2(x) \rightarrow 4 \operatorname{sen}^2(x) - 4 \operatorname{sen}(x) + 1 = 0 \rightarrow \operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2} \rightarrow x = \begin{cases} 30^\circ + 360^\circ k \\ 150^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

Como hemos elevado al cuadrado tenemos que comprobar las soluciones:

$$x = 30^\circ \rightarrow \operatorname{sen}(30) + \sqrt{3} \cdot \cos(30) = 2 \rightarrow \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \text{ Solución}$$

$$x = 150^\circ \rightarrow \operatorname{sen}(150) + \sqrt{3} \cdot \cos(150) = 2 \rightarrow \frac{1}{2} - \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -1 \text{ No solución}$$

Otra forma (idea feliz):

$$\operatorname{sen}(x) + \sqrt{3} \cdot \cos(x) = 2 \rightarrow \frac{1}{2} \operatorname{sen}(x) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos(x) = 1 \rightarrow \cos(60^\circ) \cdot \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(60^\circ) \cdot \cos(x) = 1$$

$$\operatorname{sen}(x + 60^\circ) = 1 \rightarrow x + 60^\circ = 90^\circ + 360^\circ k \rightarrow x = 30^\circ + 360^\circ k$$

SIMPLIFICACIONES

3. Simplifica las siguientes expresiones:

a)

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}(2a) \cdot \cos(a)}{\operatorname{sen}(a) \cdot (1 + \cos 2a)} &= \frac{2 \cdot \operatorname{sen}(a) \cdot \cos(a) \cdot \cos(a)}{\operatorname{sen}(a) \cdot (1 + \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a)} = \frac{2 \cdot \operatorname{sen}(a) \cdot \cos^2(a)}{\operatorname{sen}(a) \cdot (1 + \cos^2 a - 1 + \cos^2 a)} = \\ &= \frac{2 \cdot \operatorname{sen}(a) \cdot \cos^2(a)}{2 \cdot \operatorname{sen}(a) \cdot \cos^2(a)} = 1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg}(a)}{\operatorname{tg}(2a) - \operatorname{tg}(a)} &= \frac{\operatorname{tg}(a)}{\frac{2\operatorname{tg}(a)}{1 - \operatorname{tg}^2(a)} - \operatorname{tg}(a)} = \frac{\operatorname{tg}(a) \cdot (1 - \operatorname{tg}^2(a))}{\operatorname{tg}(a) + \operatorname{tg}^3(a)} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 a}{1 + \operatorname{tg}^2 a} = \frac{\frac{\cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a}{\cos^2 a}}{\frac{\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a}{\cos^2 a}} = \\ &= \frac{\cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a}{\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a} = \frac{\cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a}{1} = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = \cos(2a) \end{aligned}$$

c)

$$\frac{\operatorname{sen}(x - y) - \operatorname{sen}(x + y)}{\cos(x + y) - \cos(x - y)} = \frac{2 \cdot \cos(x) \cdot \operatorname{sen}(-y)}{-2 \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}(y)} = -\cot g(x) \frac{\operatorname{sen}(-y)}{\operatorname{sen}(y)} = -\cot g(x) \frac{-\operatorname{sen}(y)}{\operatorname{sen}(y)} = \cot g(x)$$