Problema 1:

Dado el sistema de ecuaciones con un parámetro real λ e incógnitas x, y, z

$$\begin{cases} (\lambda+2)x - y + z = 0 \\ 3x + (\lambda+6)y - 3z = 0 \\ 5x + 5y + (\lambda-2)z = 0 \end{cases}$$

se pide:
a) Calcular para qué valores de λ el sistema sólo admite la solución (x, y, x) = (0, 0, 0)
b) Para cada valor de λ que hace indeterminado el sistema, obtener todas sus soluciones.
c) Explicar la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las ecuaciones del sistema cuando λ = – 3

Problema 2:

Contesta a las siguientes cuestiones:
a) Obtén la derivada de la función f(x) = ax + b + sen x. Calcula **a** y **b** si O(0, 0) es un punto de la curva y = ax + b + sen x, cuya recta tangente en O(0, 0) es el eje X
b) Justifica que la función $g(x) = -\frac{2}{\pi}x + \operatorname{sen} x$ se anula en dos puntos del intervalo [0, π]

Problema 3:

Dada la siguiente matriz A

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

calcula A^{183}

Problema 4:

En el mercado podemos encontrar tres alimentos preparados para gatos que se fabrican poniendo, por kilo, las siguientes cantidades de carne, pescado y verdura:
- Alimento Migato: 600 g de carne, 300 g de pescado y 100 g de verdura.
- Alimento Catomeal: 300 g de carne, 400 g de pescado y 300 g de verdura.
- Alimento Comecat: 200 g de carne, 600 g de pescado y 200 g de verdura.

Si queremos ofrecer a nuestro gato 470 g de carne, 370 g de pescado y 160 g de verdura por kilo de alimento, ¿qué porcentaje de cada uno de los compuestos anteriores hemos de mezclar para obtener la proporción deseada?

Problema 5:

Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica $f(x) = (x+1)e^{-x}$ en el punto de corte de f(x) con el eje X

Problema 6:

Estudia si la función $f(x)=\begin{cases} x & (x\le -1) \\ 1-x^2 & (-1<x\le 2) \\ -3 & (2<x) \end{cases}$ es continua en los puntos x = – 1 y x = 2. Representa gráficamente dicha función.

Problema 7:

Se consideran las matrices:

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

donde **m** es un número real. Encuentra los valores de **m** para los que A•B tiene inversa.

Problema 8:

Estudia (dominio, crecimiento, máximos y mínimos, asíntotas) y representa gráficamente la función $y=\dfrac{2x-1}{x-x^2}$

Problema 9:

A un compañero le piden que clasifique y resuelva el sistema $\begin{cases} 3x-ky & =3 \\ y+3z & =6 \\ x+ \quad kz & =5 \end{cases}$ para el valor del parámetro k $\in$ R que él desee. Obtiene, correctamente para dicho valor, que el sistema es compatible indeterminado, y que una expresión de sus soluciones en forma paramétrica es x = 1 + 2t, y = …, z = … Determina para qué valor del parámetro **k** ha clasificado y resuelto el sistema, y calcula las expresiones de las incógnitas **y** y **z**que le faltan.

Problema 10:

Calcula

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x-e^x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

Problema 11:

Demuestra que toda matriz cuadrada de dimensión 3 se puede escribir como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

Problema 12:

Da un ejemplo de un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas que sea compatible indeterminado. Interprétalo geométricamente.

Problema 13:

Sea f: R → R la función definida por $f(x) = x^2 - |x|$; estudia la derivabilidad de **f**

Problema 14:

Calcula $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$

Problema 15:

Sabiendo que $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$, calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

a) $|-3A|$ y $|A^{-1}|$ b) $\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 2i & 2h & 2g \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a & b & a-c \\ d & e & d-f \\ g & h & g-i \end{vmatrix}$

Problema 16:

Calcula, para $f(x) = (x+1)e^{-x}$: intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, puntos de inflexión, concavidad y convexidad.

Problema 17:

La terna (0, 0, 0) es siempre solución del sistema

$$\begin{cases} x + 2y - az = 0 \\ ax - y + z = 0 \\ 2ax + y - z = 0 \end{cases}$$

Independientemente del valor del parámetro **a**

a) Indica para qué valores del parámetro la citada terna es la única solución del sistema.

b) Indica algún valor del parámetro, si existe, para el cual el sistema tenga algunas soluciones distintas de la nula y mostrar estas soluciones. *(Nota: Si se encuentran varios valores del parámetro cumpliendo la condición pedida, para responder a esta cuestión basta tomar uno solo de ellos)*.

Problema 18:

Calcula el valor de $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{x^2}$

Problema 19:

Resuelve el siguiente sistema matricial:

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$$

$$5A - 2B = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 8 & 18 \end{pmatrix}$$

Problema 20:

a) Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x + y - 3z = 0 \\ 2x + 3y - z = 5 \end{array}\right\}$$

b) Halla la solución del sistema anterior tal que la suma de los valores correspondientes a cada una de las tres incógnitas sea igual a 4.

Problema 21:

Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Determínense **a, b, c,** y **d** para que la recta $y + 1 = 0$ sea tangente a la gráfica de **f** en el punto A(0, – 1), y la recta $x – y – 2 = 0$ sea tangente a la gráfica de **f** en el punto B(1, – 1)

Problema 22:

Se considera la función definida por $f(x) = \frac{9x-3}{x^2-2x}$ para $x \neq 0$ y $x \neq 2$

a) Calcula las asíntotas de la gráfica de f(x)

b) Estudia la posición de la gráfica de f(x) respecto de sus asíntotas.

Problema 23:

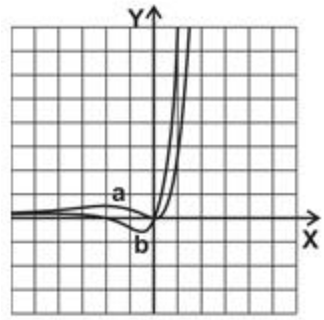
Halla los valores de **k** para que la matriz $\begin{pmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{pmatrix}$

a) no tenga inversa.

b) tenga rango 3

Problema 24:

Se sabe que las dos gráficas del dibujo corresponden a la función f: R → R definida por $f(x) = x^2e^x$ y a su función derivada f'. Indica, razonando la respuesta, cuál es la gráfica de f y cuál la de f'



Problema 25:

Resuelve los siguientes apartados.
a) Discute e interpreta geométricamente, según los diferentes valores del parámetro **m,** el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - 2y + z = m \\ mx - y + z = 0 \end{cases}$$

b) Resuélvelo, si es posible, para los casos m = 0 y m = 2

Problema 26:

Dada la función $f(x) = \ln \frac{x^2}{x-1}$ donde ln significa *logaritmo neperiano*, definida para x > 1, halla un punto (a, f(a)) tal que la recta tangente a la gráfica de f(x) en ese punto sea paralela al eje X

Problema 27:

Si A y B son dos matrices cuadradas cualesquiera, es cierto que:
$(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$

Problema 28:

Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y - x = z \\ x - z = y \\ y + z = x \end{array}\right\}$$

Problema 29:

Determina los valores de **a** y **b** $\in$ R para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 - 6x + b$ pase por el origen de coordenadas y su recta tangente en $x = 1$ tenga pendiente 3

Problema 30:

La función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ no está definida para $x = 0$. Definir $f(0)$ para que la función sea continua en ese punto.

Problema 31:

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) ¿Tiene A inversa? En caso afirmativo, calcúlala.
b) Determina la matriz X que cumple que $A \cdot X + C \cdot B^t = B \cdot B^t$, siendo B^t la matriz traspuesta de B

Problema 32:

¿Cuál es el dominio de la función $y = x\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$?

Problema 33:

Estudia, según los valores del parámetro **a,** el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\left.\begin{aligned} ax + ay &= a \\ x - y + az &= a \\ x + 2y + 3z &= a \end{aligned}\right\}$$

Problema 34:

De la función definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo en $x = -1$, que su gráfica corta al eje X en el punto de abscisa $x = -2$ y tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 0$. Calcula **a**, **b**, **c** y **d** sabiendo, además, que la recta tangente a la gráfica de **f** en el punto de abscisa $x = 2$ tiene pendiente 9

Problema 35:

Sean A, B y C tres matrices tales que el producto $A \cdot B \cdot C$ es una matriz 3 x 2 y el producto $A \cdot C^t$ es una matriz cuadrada, siendo C^t la traspuesta de C. Calcula, razonando la respuesta, las dimensiones de A, B y C

Problema 36:

A, B y C son tres ciudades que forman un triángulo de manera que entre cada dos de ellas hay una carretera recta que las une. Se sabe que si se va de a A a B dando la vuelta por C se hace un recorrido tres veces mayor que si se va directamente de a A a B. Asimismo si para ir de A a C se da la vuelta por B el recorrido es el doble que si se va directamente de a A a C. Calcula las distancias entre las tres ciudades sabiendo que la suma de las tres distancias es igual a 120 kilómetros.

Problema 37:

Resuelve las siguientes cuestiones:
a) Calcula el valor de **a** y **b** para que la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 + 2a\cos x & \text{si} \quad 0 \le x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si} \quad x \ge \pi \end{cases}$$

sea continua para todo valor de **x**
b) Estudia la derivabilidad de f(x) para los valores de **a** y **b** obtenidos en el apartado anterior.

Problema 38:

Calcula

$$\text{a)} \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-5n+4}-n\right)$$

$$\text{b)} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n-8}{2^n}\right)$$

Problema 39:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
a) Comprobar que el $\det(A^2) = (\det(A))^2$ y que $\det(A + I) = \det(A) + \det(I)$
b) Sea M una matriz cuadrada de orden 2. ¿Se puede asegurar que se cumple que $\det(M^2) = (\det(M))^2$? Razona la respuesta.
c) Encuentra todas las matrices cuadradas M, de orden 2, tales que $\det(M + I) = \det(M) + \det(I)$

Problema 40:

Para la función $f(x) = (x + 2)e^x$, se pide:
a) Estudia su dominio y continuidad.
b) Determina sus puntos de corte con los ejes.
c) Obtén las coordenadas de los máximos y mínimos relativos.
d) Determina las coordenadas de los puntos de inflexión.
(Recuerda que $e^x \neq 0$, $\forall$ $x \in R$)

Problema 41:

Discute el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + \quad 2y - \quad z = 2 \\ x + (1+b)y - \quad bz = 2b \\ x + \quad by + (1+b)z = 1 \end{cases}$$

Según los valores de **b**

Problema 42:

¿Existen máximo y mínimo absolutos de la función f(x) = cos (x) + 1 en el intervalo [0, π]? Justifica la respuesta y calcúlalos.

Problema 43:

Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula A • B; A • C, $A^t \bullet B^t$ y $C^t \bullet A^t$, siendo A^t, B^t y C^t las matrices traspuestas de A, B y C, respectivamente.

Problema 44:

La liga de fútbol de un cierto país la juegan 21 equipos a doble vuelta. Este año, los partidos ganados valían 3 puntos, los empatados 1 punto y los perdidos 0 puntos. En estas condiciones, el equipo campeón de liga obtuvo 70 puntos. Hasta el año pasado los partidos ganados valían 2 puntos y el resto igual. Con el sistema antiguo, el actual campeón hubiera obtenido 50 puntos. ¿Cuántos partidos ganó, empató y perdió el equipo campeón?

Problema 45:

Resuelve las siguientes cuestiones:
i) Calcula la recta tangente a la curva f(x) = ln x^2 en el punto x = 2
ii) Calcula el punto de corte de dicha recta con el eje **Y**

Problema 46:

Halla el valor de la constante **k** sabiendo que la curva de ecuación $y = \dfrac{x^3 + kx^2 + 1}{x^2 + 1}$ posee una asíntota que pasa por el punto (1, 3)

Problema 47:

Despeja la matriz X en función de A e I en la ecuación
$(X + A)^2 = X^2 + XA + I$
siendo X y A matrices cuadradas de orden dos, e I la matriz identidad de orden dos.

Problema 48:

Dada la función $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 1}$, determina razonadamente:
a) El dominio.
b) Los puntos de corte con los ejes de coordenadas.
c) Las ecuaciones de sus asíntotas, si es que las tiene.
d) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos.
e) Su representación gráfica.

Problema 49:

Resuelve

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Problema 50:

Descomponer el número 8 en dos sumandos positivos de manera que la suma del cubo del primer sumando más el cuadrado del segundo sea mínima.

Ejercicios 1 y 3 de selectividad.

Ejercicio 1.- Sean $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x) = x^2 + ax + b \qquad \text{y} \qquad g(x) = c\,e^{-(x+1)}$$

Se sabe que las gráficas de f y g se cortan en el punto $(-1, 2)$ y tienen en ese punto la misma recta tangente.

(a) [**2 puntos**] Calcula los valores de a, b y c.

(b) [**0'5 puntos**] Halla la ecuación de dicha recta tangente.

Ejercicio 3.- Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned} x + \lambda y - z &= 0 \\ 2x + y + \lambda z &= 0 \\ x + 5y - \lambda z &= \lambda + 1 \end{aligned}\right\}$$

(a) [**1'5 puntos**] Clasifícalo según los valores del parámetro λ.

(b) [**1 punto**] Resuélvelo para $\lambda = -1$.

Ejercicio 3.- [**2'5 puntos**] Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula la matriz P que verifica $AP - B = C^T$ (C^T es la matriz traspuesta de C).

Ejercicio 1.- Considera la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si} \quad x \le 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

(a) [**1'5 puntos**] Halla a y b sabiendo que f es derivable en $\mathbb{R}$.

(b) [**1 punto**] Determina la recta tangente y la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$.

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x+y+z &= a-1 \\ 2x+y+az &= a \\ x+ay+z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

(a) [**1'5 puntos**] Discútelo según los valores del parámetro a.

(b) [**1 punto**] Resuélvelo en el caso $a=2$.

Ejercicio 3.- Sabemos que el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 2x-y+3z &= 1 \\ x+2y-z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

tiene las mismas soluciones que el que resulta al añadirle la ecuación $ax+y+7z=7$

(a) [**1'25 puntos**] Determina el valor de a.

(b) [**1'25 puntos**] Calcula la solución del sistema inicial de dos ecuaciones, de manera que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a la unidad.

Ejercicio 3.- Un cajero automático contiene sólo billetes de 10, 20 y 50 euros. En total hay 130 billetes con un importe de 3000 euros.

(a) [**1'25 puntos**] ¿Es posible que en el cajero haya el triple número de billetes de 10 que de 50?

(b) [**1'25 puntos**] Suponiendo que el número de billetes de 10 es el doble que el número de billetes de 50, calcula cuantos billetes hay de cada tipo.

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] De entre todos los rectángulos de perímetro 8 cm, determina las dimensiones del que tiene diagonal de menor longitud.

Ejercicio 3.- Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$.

(a) **[1 punto]** Halla los valores del parámetro m para los que el rango de A es menor que 3.

(b) **[1'5 puntos]** Estudia si el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tiene solución para cada uno de los valores de m obtenidos en el apartado anterior.

Ejercicio 1.- **[2'5 puntos]** Dada la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x+1}{e^x}$, determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión.

Ejercicio 3.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rl} x + y & = 1 \\ ky + z & = 0 \\ x + (k+1)y + kz & = k+1 \end{array}\right\}$$

(a) **[1'25 puntos]** Determina el valor del parámetro k para que sea incompatible.

(b) **[1'25 puntos]** Halla el valor del parámetro k para que la solución del sistema tenga $z = 2$.

Ejercicio 1.- Sea la función $f : [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } 0 \le x < 2 \\ cx + 1 & \text{si } 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

(a) **[2 puntos]** Determina a, b y c sabiendo que f es continua en el intervalo cerrado $[0,4]$, derivable en el intervalo abierto $(0,4)$ y que $f(0) = f(4)$.

(b) **[0'5 puntos]** ¿En qué punto del intervalo se anula la derivada de la función?

Ejercicio 3.- **[2'5 puntos]** Halla los valores del parámetro m que hacen compatible el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rl} -x + 2y - 2z & = 2 \\ 2x + y + z & = m \\ x + 3y - z & = m^2 \end{array}\right\}$$

Problema 1 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+3x}{x-1} & \text{si} \quad x < 0 \\ a & \text{si} \quad x = 0 \\ e^{-1/x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto). Determinar el valor de a para que f sea continua en $x = 0$.

b) (1 punto). Para ese valor de a, estudiar la derivabilidad de f en $x = 0$.

c) (1 punto). Hallar, si las tiene, las asíntotas de la gráfica $y = f(x)$.

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= a - 1 \\ 2x + y + az &= a \\ x + ay + z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

(a) [**1'5 puntos**] Discútelo según los valores del parámetro a.

(b) [**1 punto**] Resuélvelo en el caso $a = 2$.

Ejercicio 1.- [2'5 puntos]
Determina dos números reales positivos sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.

Ejercicio 4. Dada la función $f(x) = 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x - 1$, determina las ecuaciones de la recta normal, y tangente en el punto $x = -1$.

Ejercicio 3.- Sabemos que el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 1 \\ x + 2y - z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

tiene las mismas soluciones que el que resulta al añadirle la ecuación $ax + y + 7z = 7$

(a) [**1'25 puntos**] Determina el valor de a.

(b) [**1'25 puntos**] Calcula la solución del sistema inicial de dos ecuaciones, de manera que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a la unidad.

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] De entre todas las rectas del plano que pasan por el punto $(1, 2)$, encuentra aquella que forma con las partes positivas de los ejes coordenados un triángulo de área mínima. Halla el área de dicho triángulo.
