

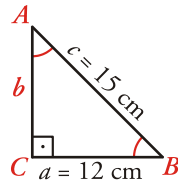
**EJERCICIOS RESUELTOS: RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS Y FÓRMULAS MATEMÁTICAS**

**Ejercicio nº 1.-**

En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 15 cm y uno de los catetos mide 12 cm. Calcula la longitud del otro cateto y la medida de sus ángulos.

**Solución:**

Aplicamos el teorema de Pitágoras para hallar el otro cateto:



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$12^2 + b^2 = 15^2 \rightarrow 144 + b^2 = 225$$

$$b^2 = 225 - 144 = 81 \rightarrow b = 9 \text{ cm}$$

Hallamos los ángulos:

$$\text{sen} \hat{B} = \frac{b}{c} \rightarrow \text{sen} \hat{B} = \frac{9}{15} = 0,6 \rightarrow \hat{B} = 36^\circ 52' 12''$$

$$\hat{A} = 90^\circ - \hat{B} = 53^\circ 7' 48''$$

$$\hat{C} = 90^\circ$$

Por tanto:

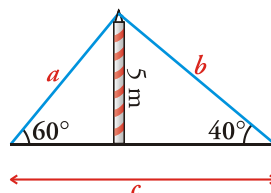
$$a = 12 \text{ cm}; \hat{A} = 53^\circ 7' 48''$$

$$b = 9 \text{ cm}; \hat{B} = 36^\circ 52' 12''$$

$$c = 15 \text{ cm}; \hat{C} = 90^\circ$$

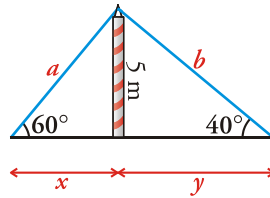
**Ejercicio nº 2.-**

Un mástil de 5 metros se ha sujetado al suelo con un cable como muestra la figura:



Halla el valor de  $c$  y la longitud del cable.

**Solución:**



$$\text{sen}60^\circ = \frac{5}{a} \rightarrow a = \frac{5}{\text{sen}60^\circ} = 5,77 \text{ m}$$

$$\text{tg}60^\circ = \frac{5}{x} \rightarrow x = \frac{5}{\text{tg}60^\circ} = 2,89 \text{ m}$$

Por otra parte, si consideramos el otro triángulo:

$$\text{sen}40^\circ = \frac{5}{b} \rightarrow b = \frac{5}{\text{sen}40^\circ} = 7,78 \text{ m}$$

$$\text{tg}40^\circ = \frac{5}{y} \rightarrow y = \frac{5}{\text{tg}40^\circ} = 5,96 \text{ m}$$

Por tanto:

La longitud del cable es  $a + b = 5,77 + 7,78 = 13,55$  metros.

El valor de  $c$  es  $x + y = 2,89 + 5,96 = 8,85$  metros.

**Ejercicio nº 3.-**

Si  $\text{sen } \alpha = 0,35$  y  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  halla (sin calcular  $\alpha$ ):

a)  $\text{sen} (180^\circ - \alpha)$  b)  $\text{cos} (180^\circ + \alpha)$

**Solución:**

a)  $\text{sen} (180^\circ - \alpha) = \text{sen} \alpha = 0,35$

b)  $\text{cos} (180^\circ + \alpha) = -\text{cos} \alpha$

Necesitamos saber cuánto vale  $\text{cos } \alpha$ :

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow 0,35^2 + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

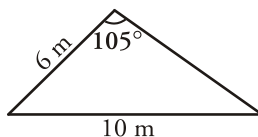
$$0,1225 + \text{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \text{cos}^2 \alpha = 0,8775$$

$$\text{cos} \alpha = 0,94 \text{ (es positivo, pues } 0^\circ < \alpha < 90^\circ \text{)}$$

Por tanto,  $\text{cos} (180^\circ + \alpha) = -\text{cos} \alpha = -0,94$

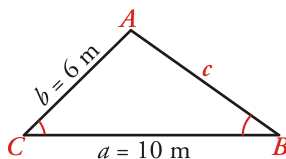
**Ejercicio nº 4.-**

Resuelve el siguiente triángulo, es decir, halla el valor de sus lados y de sus ángulos:



**Solución:**

Hallamos el ángulo  $\hat{B}$  con el teorema de los senos:



$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} \rightarrow \frac{10}{\text{sen}105^\circ} = \frac{6}{\text{sen}\hat{B}}$$

$$\text{sen}\hat{B} = \frac{6 \text{sen}105^\circ}{10} = 0,58 \rightarrow \hat{B} = 35^\circ 25'9''$$

(Como  $\hat{A}$  es obtuso,  $\hat{B}$  y  $\hat{C}$  han de ser agudos; solo hay una solución).

Hallamos el ángulo  $\hat{C}$ :

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 39^\circ 34'51''$$

Calculamos el lado  $c$ :

$$\frac{c}{\text{sen}\hat{C}} = \frac{a}{\text{sen}\hat{A}} \rightarrow \frac{c}{\text{sen}(39^\circ 34'51'')} = \frac{10}{\text{sen}105^\circ} \rightarrow c = 6,6 \text{ m}$$

Por tanto:

$$a = 10 \text{ m}; \hat{A} = 105^\circ$$

$$b = 6 \text{ m}; \hat{B} = 35^\circ 25'9''$$

$$c = 6,6 \text{ m}; \hat{C} = 39^\circ 34'51''$$

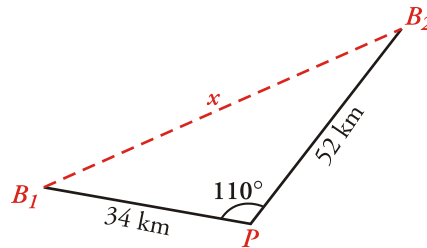
**Ejercicio nº 5.-**

Dos barcos salen de un puerto a la misma hora con rumbos distintos, formando un ángulo de  $110^\circ$ . Al cabo de 2 horas, el primer barco está a 34 km del punto inicial y el segundo barco, a 52 km de dicho

punto. En ese mismo instante, ¿a qué distancia se encuentra un barco del otro?

**Solución:**

Hallamos la distancia,  $x$ , aplicando el teorema del coseno:



$$x^2 = 34^2 + 52^2 - 2 \cdot 34 \cdot 52 \cdot \cos 110^\circ$$

$$x^2 = 1156 + 2704 + 1209,38$$

$$x^2 = 5069,38$$

$$x = 71,20 \text{ km}$$

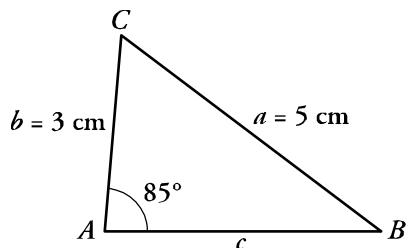
Por tanto, la distancia entre los dos barcos es de 71,20 km.

**Ejercicio nº 6.-**

- a) En un triángulo se conoce  $a = 5 \text{ cm}$ ,  $b = 3 \text{ cm}$  y  $\hat{A} = 85^\circ$ . ¿Cuántos triángulos hay con estos datos?
- b) Comprueba que no hay ningún triángulo que cumpla  $b = 5,8 \text{ cm}$ ,  $c = 5 \text{ cm}$  y  $\hat{C} = 110^\circ$ .

**Solución:**

a)



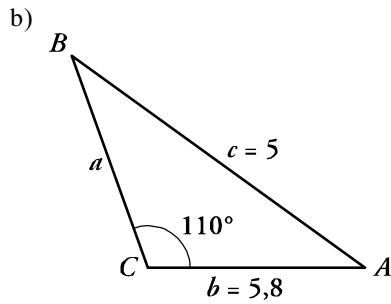
Calculamos  $\hat{B}$  aplicando el teorema del seno:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \rightarrow \sin \hat{B} = \frac{b \sin \hat{A}}{a} = \frac{3 \sin 85^\circ}{5} \approx 0,5977$$

Hay dos soluciones para  $\hat{B}$ :

$$\hat{B} = 36^\circ 42' 24'' \text{ y } \hat{B} = 143^\circ 17' 36'' \text{ (esta no es válida pues } \hat{A} + \hat{B} > 180^\circ)$$

Por tanto, solo hay un triángulo con los datos dados.



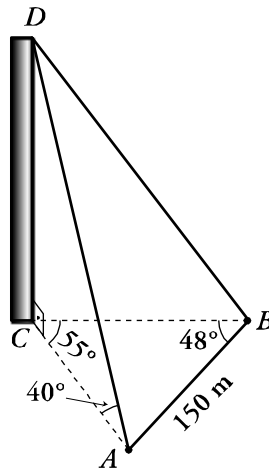
Calculamos  $\hat{B}$  aplicando el teorema del seno:

$$\frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}} \rightarrow \text{sen}\hat{B} = \frac{b \text{sen}\hat{C}}{c} = \frac{5,8 \text{sen}110^\circ}{5} \approx 1,09 > 1$$

No existe ningún triángulo con esos datos.

**Ejercicio nº 7.-**

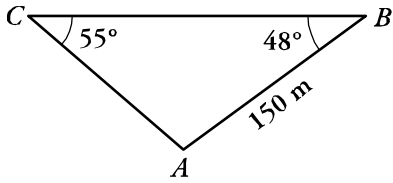
Para medir la altura de una torre  $CD$  nos hemos situado en los puntos  $A$  y  $B$ , cuya distancia es de 150 m y hemos tomado las medidas que aparecen en la figura.



Calcula la altura de la torre.

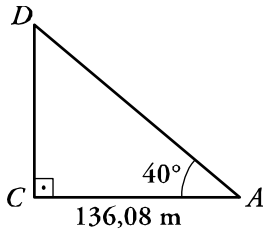
**Solución:**

Para calcular la altura  $\overline{CD}$  en el triángulo  $DCA$ , necesitamos conocer  $\overline{CA}$ , y esto podemos obtenerlo aplicando el teorema del seno en el triángulo  $CAB$ .



$$\frac{150}{\text{sen}55^\circ} = \frac{\overline{CA}}{\text{sen}48^\circ} \rightarrow \overline{CA} = \frac{150 \cdot \text{sen}48^\circ}{\text{sen}55^\circ} \approx 136,08 \text{ m}$$

En el triángulo  $DCA$  se tiene:



$$\text{tg}40^\circ = \frac{\overline{CD}}{136,08} \rightarrow \overline{CD} = 136,08 \cdot \text{tg}40^\circ \approx 114,18 \text{ m}$$

La torre tiene una altura de 114,18 m.

**Ejercicio nº 8.-**

**Demuestra la siguiente igualdad:**

$$\frac{(\text{sen}x + \text{cos}x) \cdot \text{cos}2x}{\text{cos}x - \text{sen}x} = 1 + \text{sen}2x$$

**Solución:**

$$\begin{aligned} \frac{(\text{sen}x + \text{cos}x) \cdot \text{cos}2x}{\text{cos}x - \text{sen}x} &= \frac{(\text{sen}x + \text{cos}x) \cdot (\text{sen}x + \text{cos}x) \cdot \text{cos}2x}{(\text{cos}x - \text{sen}x)(\text{cos}x + \text{sen}x)} = \\ &= \frac{(\text{sen}x + \text{cos}x)^2 \cdot \text{cos}2x}{\text{cos}^2 x - \text{sen}^2 x} = \frac{(\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x + 2 \text{sen}x \text{cos}x) \cdot \text{cos}2x}{\text{cos}2x} = \\ &= \text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x + 2 \text{sen}x \text{cos}x = 1 + 2 \text{sen}x \text{cos}x = 1 + \text{sen}2x \end{aligned}$$

Ejercicio nº 9.-

Resuelve la ecuación:

$$\cos 2x + \operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{2} = 0$$

*Solución:*

$$\cos 2x + \operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\cos^2 x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 45^\circ + 360^\circ k \\ x = 315^\circ + 360^\circ k \end{array} \right. \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 135^\circ + 360^\circ k \\ x = 225^\circ + 360^\circ k \end{array} \right. \end{array} \right.$$

siendo  $k \in \mathbf{Z}$

Ejercicio nº 10.-

Demuestra que:

$$\frac{\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)}{\cos(a-b) - \cos(a+b)} = \frac{1}{\operatorname{tg} b}$$

*Solución:*

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) &= \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} a \cos b \\ \cos(a-b) - \cos(a+b) &= \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b - (\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b) \\ &= 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\frac{\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)}{\cos(a-b) - \cos(a+b)} = \frac{2 \operatorname{sen} a \cos b}{2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} = \frac{\cos b}{\operatorname{sen} b} = \frac{1}{\operatorname{tg} b}$$