

CONTROL FUNCIONES

1. Dadas las funciones: $f(x) = \sqrt{x+3}$, $g(x) = \frac{4x}{x-1}$, $h(x) = 2x^3 - 3$

Halla: (2 p)

a) $f \circ g$ y $g \circ f$

b) La función inversa de $h(x)$, h^{-1} , comprueba el resultado y halla su dominio.

c) La función inversa de $g(x)$, g^{-1} , comprueba el resultado y halla su dominio.

2. Halla los dominios de las siguientes funciones: (2 p)

a) $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-3}}$

b) $g(x) = e^{\frac{2}{x^2-x}}$

c) $h(x) = \log(4x - x^2)$

3. Representa gráficamente (sin hacer tabla de valores) la función $y = \left| \frac{3}{x-2} \right|$

Escribe sus características: Dominio, recorrido, asíntotas, continuidad, etc.

(1,5 p)

4. Representa gráficamente la siguiente función (sin hacer tabla de valores) y escribe sus características:

$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x < -2 \\ x-1 & \text{si } -2 < x < 1 \\ -x^2 + 5x - 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad (2,5 \text{ p})$$

5. Representa gráficamente las siguientes funciones, sin hacer tabla de valores, es decir, hallando previamente su dominio, puntos de corte con los ejes y demás

características. $y = \sqrt{x-2}$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (2 p)

SOLUCIONES

1. Dadas las funciones: $f(x) = \sqrt{x+3}$, $g(x) = \frac{4x}{x-1}$, $h(x) = 2x^3 - 3$

Halla:

$$a) (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{4x}{x-1}\right) = \sqrt{\frac{4x}{x-1} + 3} = \sqrt{\frac{4x}{x-1} + 3} = \sqrt{\frac{7x-3}{x-1}}$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[\sqrt{x+3}] = \frac{4\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}-1}$$

b) $y = 2x^3 - 3 \rightarrow$ cambiamos: $x = 2y^3 - 3 \rightarrow x + 3 = 2y^3 \rightarrow y^3 = \frac{x+3}{2}$

$$y = \sqrt[3]{\frac{x+3}{2}} \rightarrow h^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x+3}{2}} \quad \text{Dom}(h^{-1}) = \mathbb{R}$$

Comprobación:

$$(h \circ h^{-1})(x) = h[h^{-1}(x)] = h\left(\sqrt[3]{\frac{x+3}{2}}\right) = 2\left(\sqrt[3]{\frac{x+3}{2}}\right)^3 - 3 = 2 \cdot \frac{x+3}{2} - 3 = x + 3 - 3 = x$$

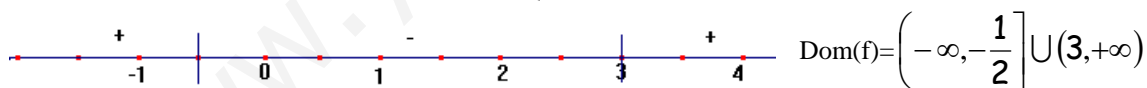
c) $y = \frac{4x}{x-1}$ cambiamos $x = \frac{4y}{y-1}$ y despejamos $xy - x = 4y \rightarrow xy - 4y = x$

$$y(x-4) = x \rightarrow y = \frac{x}{x-4} \rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x}{x-4}$$

$$\text{Comprobación: } (g \circ g^{-1})(x) = g[g^{-1}(x)] = g\left(\frac{x}{x-4}\right) = \frac{4 \cdot \frac{x}{x-4}}{\frac{x}{x-4} - 1} = \frac{4x}{\frac{x-x+4}{x-4}} = \frac{4x}{\frac{4}{x-4}} = \frac{4x}{x} = 4$$

2. Halla los dominios de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-3}} \rightarrow \frac{2x+1}{x-3} \geq 0 \rightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \rightarrow x = -\frac{1}{2} \\ x-3=0 \rightarrow x = 3 \end{cases}$



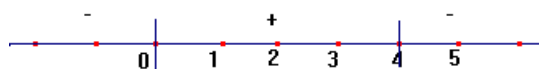
b) $g(x) = e^{\frac{2}{x^2-x}}$ la exponencial está definida en todo \mathbb{R} , pero hay que tener cuidado con el exponente, que no está definido para

$$x^2 - x = 0 \rightarrow x(x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{0,1\}$$

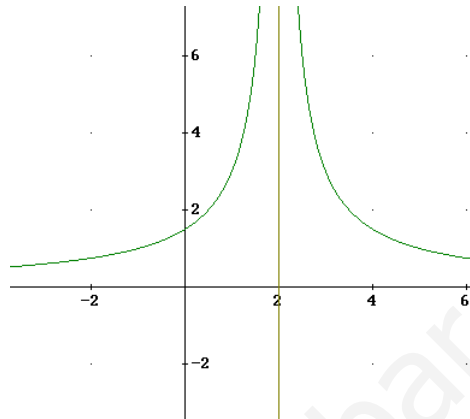
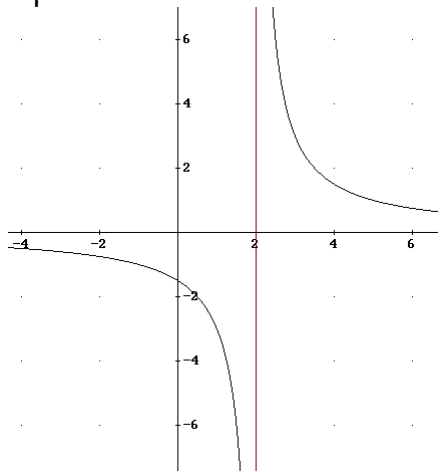
c) $h(x) = \log(4x - x^2)$ los logaritmos sólo están definidos para números positivos, es decir si

$$4x - x^2 > 0 \rightarrow x(4-x) > 0 \rightarrow$$

$$\text{Dom}(h) = (0,4)$$



3. $y = \left| \frac{3}{x-2} \right|$ primero vamos a representar la función $y = \frac{3}{x-2}$, que es una hipérbola con asíntota vertical $x = 2$ y horizontal el eje x .
y ahora el valor absoluto:



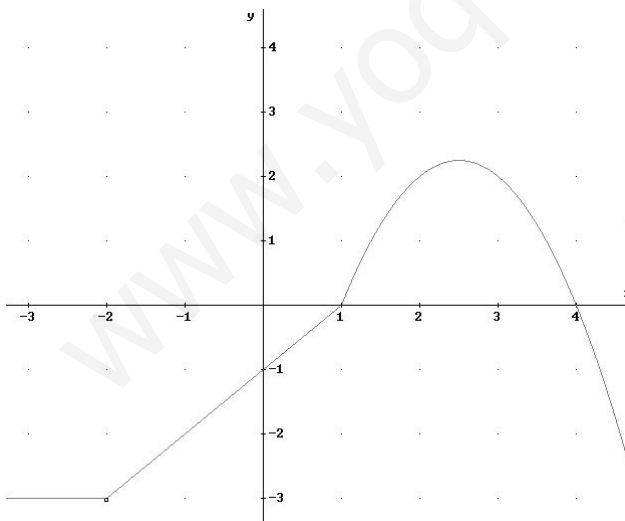
Características: $\text{Dom} = \mathbb{R} - \{2\}$

$\text{Rec} = (0, +\infty)$ Continua en su dominio, discontinuidad de salto infinito en $x = 2$

Creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$

$$4. f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x < -2 \rightarrow \text{recta horizontal} \\ x-1 & \text{si } -2 < x < 1 \rightarrow \text{recta} \\ -x^2 + 5x - 4 & \text{si } x \geq 1 \rightarrow \text{parábola} \end{cases}$$

Parábola $y = -x^2 + 5x - 4$ vértice $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{-2} = \frac{5}{2} \rightarrow V\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{4}\right)$



Corte con los ejes: Eje OX:

$$-x^2 + 5x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{4} \text{ eje}$$

OY $\rightarrow y = -4$

Características:

$\text{Dom} = \mathbb{R} - \{-2\}$

$\text{Rec} = \left(-\infty, \frac{9}{4}\right]$

Constante en $(-\infty, -2)$

Creciente en $\left(-2, \frac{5}{2}\right)$

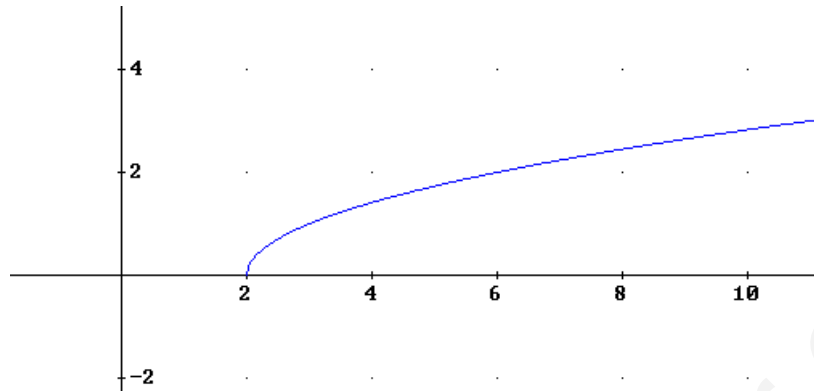
Decreciente en $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$

Tiene un máximo en $V\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{4}\right)$ no tiene asíntotas.

5. $y = \sqrt{x-2}$ tiene que ser $x-2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2$ luego, $\text{Dom} = [2, +\infty)$

corta al eje x en $(2,0)$, no corta al eje y , es creciente y continua en su dominio y su recorrido es $[0, +\infty)$

Gráfica:



$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ función exponencial de base menor que 1, $\text{Dom} = \mathbb{R}$, siempre positiva, decreciente en su dominio, corta al eje y en $(0,1)$ y no corta al eje x .

Gráfica:

