EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. *Comprueba, dando valores a* x*, que la función* $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ *tiende a 4, cuando* x *tiende a 2.*

Solución

Para valores de x mayores de 2:

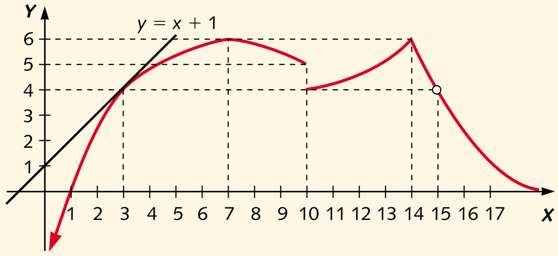
$x > 2$	2,1	2,01	2,001	2,0001
$f(x)$	4,1	4,01	4,001	4,0001

Para valores de x menores de 2:

$x < 2$	1,9	1,99	1,999	1,9999
$f(x)$	3,9	3,99	3,999	3,9999

Por tanto, $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$.

2. ***(Selectividad. Andalucía, 1997).*** *Dada la gráfica de la función:*



a) Obtén los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Obtén los puntos en los que $f(x)$ *es discontinua.*

c) Obtén los valores de: $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 7} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Solución

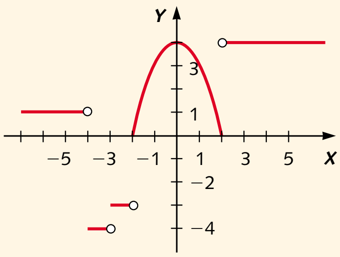
a) De la observación de la gráfica se deduce que la función es creciente en el intervalo (0, 7) ∪ (10, 14) y decreciente en (7, 10) ∪ (14, 15) ∪ (15, +∞).

b) Es discontinua en $x = 10$ y $x = 15$.

c) El límite cuando «x tiende a 0» sólo puede considerarse cuando «x tiende a 0 por la derecha» y es $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$. Por otro lado, se cumple:

$$\lim_{x \to 7} f(x) = 6 \text{ y } \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

3. *Determina, utilizando la gráfica de la función* $f(x)$*, los puntos de* ℝ *donde no existe límite de la función.*



Solución

Para que no exista el límite de una función en un punto, los límites laterales en dicho punto han de ser distintos.

Buscamos, por tanto, aquellos puntos en donde los límites laterales son distintos.

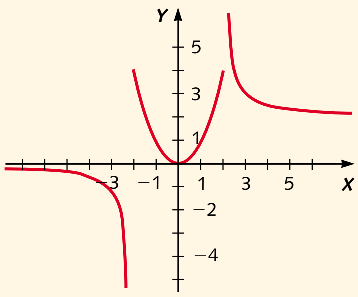
En el punto $x = 2$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 4$ y $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 0$.

En $x = -2$, $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -3$.

En $x = -3$, $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -3$ y $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = -4$.

En $x = -4$, $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = -4$ y $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x) = 1$.

4. *Utilizando la gráfica de la función* $f(x)$*, calcula los puntos de* ℝ *en donde la función tiene por límite* $+\infty$ *o* $-\infty$.



Solución

Los posibles puntos en donde la función puede tener por límite $+\infty$ o $-\infty$ son los puntos $x = 2$ y $x = -2$.

A partir de la gráfica determinamos los límites laterales para cada uno de los puntos.

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 2^-} f(x) = 4$$

Como los límites laterales son distintos, no existe, por tanto, $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

Para el punto $x = -2$:

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = 4 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$$

luego, no existe $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$.

No existe ningún número real en donde la función $f(x)$ tenga por límite $+\infty$ o $-\infty$.

5. *Dada la gráfica de la función* $f(x)$*, calcula los límites siguientes:*

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

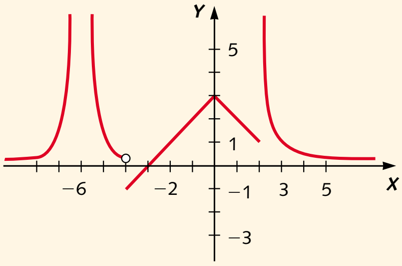
b) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x)$

e) $\lim\limits_{x \to -6} f(x)$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$



Solución

a) Cuando x tiende a $+\infty$, $f(x)$ tiende a 0, luego:
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

b) Determinamos los límites laterales de $f(x)$ en $x = 2$:
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$$
luego no existe el límite de $f(x)$ en el punto $x = 2$.

c) Observamos que cuando x tiende a 0, $f(x)$ tiende a 3, luego:
$$\lim_{x \to 0} f(x) = 3$$

d) Cuando x tiende a -4 por la derecha, la función tiende a -1, luego:
$$\lim_{x \to -4^+} f(x) = -1$$

e) Determinamos los límites laterales de la función en el punto $x = -6$.
$$\lim_{x \to -6^+} f(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -6^-} f(x) = +\infty$$
luego, $\lim\limits_{x \to -6} f(x) = +\infty$.

f) Al tender x a $-\infty$, la función tiende a 0, luego:
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

6. ***(Selectividad. Cataluña, 1997).*** *Calcula el* $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ *para las siguientes funciones:*

a) $f(x) = \dfrac{2x + 3}{4x - 5}$ *c)* $f(x) = \dfrac{e^{-x} + 1}{e^{-x} - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 5}$

Solución

a) $$\lim_{x \to \infty} \frac{2x + 3}{4x - 5} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{4 - \frac{5}{x}} = \frac{1}{2}$$

b) $$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2 + 5} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{5}{x^2}} = 0$$

c) $$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{-x} + 1}{e^{-x} - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{e^x} + 1}{\frac{1}{e^x} - 1} = -1$$

7. *Calcula* $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{5x^3 + 2x - 7}$.

Solución

Aplicando la propiedad del límite de un cociente, aparece la indeterminación 0/0. Para resolverla, factorizamos los polinomios del numerador y del denominador y simplificamos.

$$P(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (x - 1)(3x + 1)$$
$$Q(x) = 5x^3 + 2x - 7 = (x - 1)(5x^2 + 5x + 7)$$

Sustituyendo:

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{5x^3 + 2x - 7} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(3x + 1)}{(x - 1)(5x^2 + 5x + 7)} =$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{3x + 1}{5x^2 + 5x + 7} = \frac{4}{17}$$

8. *Determina el valor de* $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)$.

Solución

Cuando x tiende a $-\infty$ aparece la indeterminación $\infty - \infty$.

Multiplicamos numerador y denominador por la expresión radical conjugada.

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right) =$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)}{\sqrt{x^2 + 1} - x} =$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} =$$
$$= \frac{1}{+\infty} = 0$$

9. ***(Selectividad. Castilla-La Mancha, 1999).*** *Dada la función* $f(x)$*, se pide:*

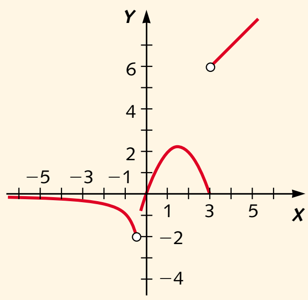
a) *Gráfica de* $f(x)$.

b) *Estudiar su continuidad.*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x < -\dfrac{1}{2} \\ -x^2 + 3x & -\dfrac{1}{2} \le x \le 3 \\ |x + 3| & x > 3 \end{cases}$$

Solución

a)



b) La función es discontinua en $x = -1/2$, ya que:

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to -\frac{1}{2}^-} \frac{1}{x} = -2$$

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} (-x^2 + 3x) = -\frac{7}{4}$$

y es discontinua en $x = 3$, ya que:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (-x^2 + 3x) = 0$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} |x + 3| = 6$$

10. ***(Selectividad. Las Palmas, 1994).*** *Estudia la continuidad de la función:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ x - 1 & x < 0 \end{cases}$$

Realiza su representación gráfica.

Solución

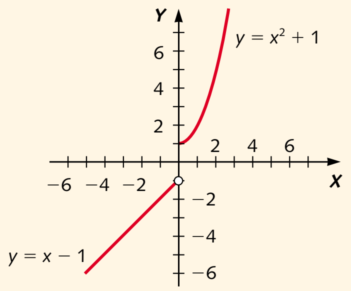
Como en los dos tramos la función está definida mediante polinomios, el único punto en el que puede ser discontinua es $x = 0$. Veamos si es continua en él:

a) Existe $f(0) = 1$.

b) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x - 1) = -1$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2 + 1) = 1$

Como los límites laterales existen pero no coinciden, la función presenta, en $x = 0$, una discontinuidad no evitable.



11. ***(Selectividad. Oviedo, 1994).*** *En cierto colectivo de familias, el gasto mensual en ocio, G(x), en miles de pesetas, está relacionado con sus ingresos mensuales, x, en miles de pesetas, a través de la siguiente expresión:*

$$G(x) = \begin{cases} 0{,}02x - 1 & 0 \leq x \leq 100 \\ \dfrac{30x}{2x + 2.300} & 100 < x \end{cases}$$

a) Estudia la discontinuidad del gasto. ¿El gasto en ocio de una familia es sensiblemente distinto si sus ingresos son «ligeramente» inferiores o superiores a las 100.000 ptas.?

b) Justifica que el gasto en ocio es siempre creciente con los ingresos.

c) Justifica que ninguna familia realiza un gasto en ocio superior a las 15.000 ptas.

Solución

a) Estudiamos la continuidad en $x = 100$:

1. Existe $f(100) = 1$.

2. $\lim_{x \to 100^-} f(x) = \lim_{x \to 100^-} (0{,}02x - 1) = 1$

$$\lim_{x \to 100^+} f(x) = \lim_{x \to 100^+} \frac{30x}{2x + 2.300} = 1{,}2$$

Como $\lim_{x \to 100^-} f(x) \neq \lim_{x \to 100^+} f(x)$, la función presenta, en el punto $x = 100$, una discontinuidad no evitable.

El gasto en ocio pasa de ser 1.000 ptas. para las familias con ingresos «ligeramente» inferiores a 100.000 ptas., a 1.200 ptas. para aquellas que tienen ingresos «ligeramente» superiores a 100.000 ptas. Luego hay una discontinuidad en $x = 100$.

b) La función correspondiente al primer tramo es una recta con pendiente positiva, es creciente.

Para comprobar el crecimiento en el segundo tramo consideramos dos puntos x y x', tales que, $x > x'$ siendo x, $x' > 100$. Los gastos en ocio correspondientes a cada uno de ellos son:

$$G(x) = \frac{30x}{2x + 2.300} \quad \text{y} \quad G(x') = \frac{30x'}{2x' + 2.300}$$

$$G(x) - G(x') = \frac{30x}{2x + 2.300} - \frac{30x'}{2x' + 2.300} =$$

$$= \frac{30x(2x' + 2.300) - 30x'(2x + 2.300)}{(2x + 2.300)(2x' + 2.300)} =$$

$$= \frac{69.000(x - x')}{(2x + 2.300)(2x' + 2.300)}$$

fracción en la que tanto el numerador como el denominador son positivos, luego la función es creciente.

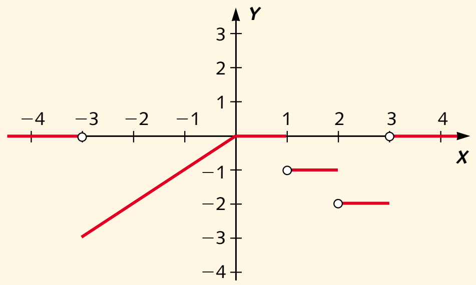
c) Como además $\lim_{x \to +\infty} G(x) = 15$, concluimos que ninguna familia gasta en ocio más de 15.000 ptas. mensuales.

12. ***(Selectividad. Murcia, 1998).*** *Representa gráficamente la función:*

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad -3 \leq x \leq 0 \\ 0 & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ -1 & si \quad 1 < x \leq 2 \\ -2 & si \quad 2 < x \leq 3 \\ 0 & si \quad x < -3 \text{ o } x > 3 \end{cases}$$

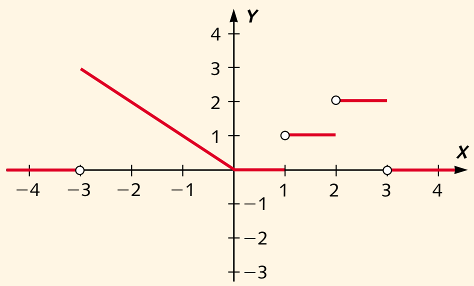
¿En qué puntos es continua la función? ¿Cuál es la gráfica de la función $|f(x)|$*?*

Solución



$f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-3, 1, 2, 3\}$

La gráfica de $|f(x)|$ es:



13. ***(Selectividad. Cataluña, 1996).*** *El espacio recorrido por un móvil en función del tiempo viene dado por la siguiente función:*

$$e(t) = \begin{cases} 3t^2 & si \quad 0 \le t < 2 \\ 3t + a & si \quad 2 \le t \le 5 \\ -t^2 + 13t + b & si \quad 5 < t \end{cases}$$

Determina los valores de a *y* b *para que la función sea continua en los instantes* $t = 2$ *y* $t = 5$.

Solución

Continuidad en $t = 2$:

$$\lim_{t\to 2^-} e(t) = \lim_{t\to 2^-} 3t^2 = 12$$

$$\lim_{t\to 2^+} e(t) = \lim_{t\to 2^+} (3t + a) = 6 + a$$

Para que $e(t)$ sea continua en $t = 2$, debe cumplirse que $6 + a = 12 \Rightarrow a = 6$.

Continuidad en $t = 5$:

$$\lim_{t\to 5^-} e(t) = \lim_{t\to 5^-} (3t + a) = 15 + a$$

$$\lim_{t\to 5^+} e(t) = \lim_{t\to 5^+} (-t^2 + 13t + b) = 40 + b$$

Para que $e(t)$ sea continua en $t = 5$, debe cumplirse que $15 + a = 40 + b$.

Para $a = 6$:

$$21 = 40 + b \Rightarrow b = -19$$

14. ***(Selectividad. Castilla y León, 1998).*** *Halla el valor de* k *para que la función:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} & si\ x \neq -2 \\ k & si\ x = -2 \end{cases}$$

sea continua en $x = -2$.

Solución

Calculamos el límite en $x = -2$:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x\to -2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x + 2} =$$

$$= \lim_{x\to -2} (x - 2) = -4$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = -2$ debe ser

$$\lim_{x\to -2} f(x) = f(-2)$$

Por tanto, $k = -4$.

15. *Dada la función:*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 1 \\ (x - 1)^2 & si\ x > 1 \end{cases}$$

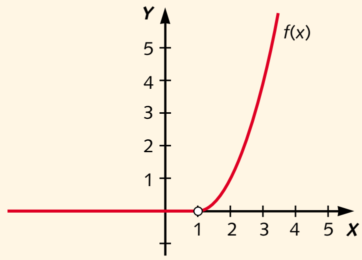
a) Calcula su dominio y dibuja su gráfica.

b) Define la función en $x = 1$ *para que sea continua en ese punto.*

Solución

a) El único punto en el que la función no está definida es el punto $x = 1$.

La función se compone de dos tramos, el primero una recta y el segundo una rama parabólica; su gráfica es la siguiente:



En $x = 1$ no está definida.

b) Para que la función sea continua debemos asignar a $f(1)$ el valor de los límites laterales, que deben coincidir:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x - 1)^2 = 0$$

luego $f(1) = 0$.