Nota

Números complejos

Nombre:..

Valor	Nota
15	

1. Dados los siguientes números complejos:

$$z_1 = 2-3i; \quad z_2 = 4i; \quad z_3 = 3+i$$

Calcular:

a) $z_1 \cdot z_2 - z_3$; b) $\frac{z_1}{z_3}$; c) $(z_1)^2 + \overline{z_2} \cdot z_3$

a) $z_1 \cdot z_2 - z_3 = (2-3i)\cdot 4i - (3+i) = 8i + 12 - 3 - i = \boxed{9+7i}$

b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-3i}{3+i} = \frac{(2-3i)\cdot(3-i)}{(3+i)\cdot(3-i)} = \frac{6-9i-2i+3i^2}{3^2-i^2} = \frac{3-11i}{10} = \boxed{\frac{3}{10} - \frac{11}{10}i}$

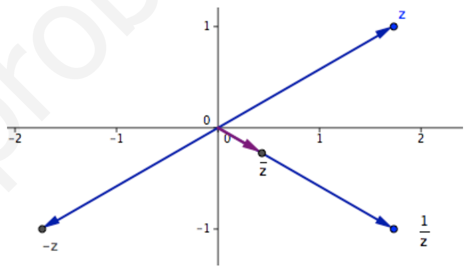
c) $(z_1)^2 + \overline{z_2} \cdot z_3 = (2-3i)^2 + (-4i)\cdot(3+i) = 4 + 9i^2 - 12i - 12i - 4i^2 = 4 - 9 - 24i + 4 = \boxed{-1-24i}$

Valor	Nota
10	

2. Dado el complejo $\sqrt{3}+i$, di cuáles son su opuesto, su conjugado y su inverso y haz su representación gráfica

Si $z = \sqrt{3}+i$ entonces:

$\boxed{-z = -\sqrt{3}-i}$; $\boxed{\overline{z} = \sqrt{3}-i}$; $\frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{3}-i}{(\sqrt{3}+i)\cdot(\sqrt{3}-i)} = \boxed{\frac{\sqrt{3}-i}{4}}$



Valor	Nota
10	

3. Encontrar todas las soluciones reales y complejas de las siguientes ecuaciones:

a) $z^3 - 2z^2 + 2z = 0$; b) $i \cdot z^3 + 8 = 0$

a) Primero sacamos factor común z:

$$z(z^2 - 2z + z) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{z=0} \\ z^2 - 2z + 2 = 0 \Rightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = \begin{cases} \boxed{z = 1+i} \\ \boxed{z = 1-i} \end{cases} \end{cases}$$

b) $iz^3 + 8 = 0 \Rightarrow iz^3 = -8 \Rightarrow z^3 = \frac{-8}{i} = \frac{-8i}{i^2} = 8i = 8_{90^\circ}$

Y ahora para hallar las soluciones sacamos las raíces cúbicas:

$$z = \sqrt[3]{8_{90^\circ}} = \sqrt[3]{8}_{\frac{90^\circ}{3} + \frac{360^\circ k}{3}\,(\text{con } k=0,1,2)} = 2_{30^\circ + 120^\circ k\,(\text{con } k=0,1,2)} = \begin{cases} z_1 = 2_{30^\circ} = \boxed{1+\sqrt{3}i} \\ z_2 = 2_{150^\circ} = \boxed{-1+\sqrt{3}i} \\ z_3 = 2_{270^\circ} = \boxed{-2i} \end{cases}$$

Valor	Nota
15	

4. Expresar en forma polar y trigonométrica los siguientes números complejos::

a) $-3i$; b) $-1+i$; c) $2\sqrt{3}-2i$

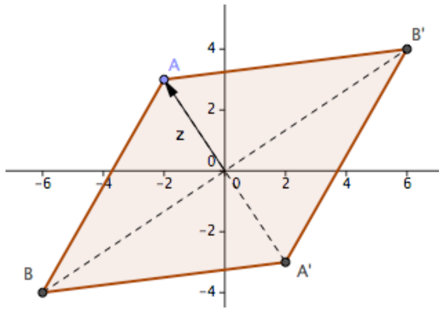
a) $z_1 = -3i \Rightarrow \begin{cases} |z_1| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3 \\ \tan\alpha = \frac{-3}{0}\,(3^o\ cuad) \Rightarrow \alpha = 270^o \end{cases} \Rightarrow \boxed{z_1 = 3_{270^o} = 3\cdot(\cos 270^o + i \cdot \text{sen}\, 270^o)}$

b) $z_2 = -1+i \Rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \tan\alpha = \frac{1}{-1}\,(2^o\ cuad) \Rightarrow \alpha = 135^o \end{cases} \Rightarrow \boxed{z_2 = \sqrt{2}_{135^o} = \sqrt{2}\cdot(\cos 135^o + i \cdot \text{sen}\, 135^o)}$

c) $z_3 = 2\sqrt{3} - 2i \Rightarrow \begin{cases} |z_3| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4 \\ \tan\alpha = \dfrac{-2}{-2\sqrt{3}} (4^o\ cuad) \Rightarrow \alpha = 330^o \end{cases} \Rightarrow \boxed{z_3 = 4_{330^o} = 4\cdot(\cos 330^o + i\cdot \operatorname{sen} 330^o)}$

Valor	Nota
10	

5. Un rombo tiene su centro en el origen de coordenadas y su diagonal mayor de doble longitud que su diagonal menor. Uno de los vértices de la diagonal menor es el punto correspondiente al número complejo −2 + 3*i*. Averigua los afijos correspondientes al resto de los vértices del rombo



El vértice B, se obtiene a partir de z, el afijo del vértice A, multiplicándolo por un complejo de módulo 2 y argumento 90º, es decir $2_{90^o} = 2i : (-2+3i)\cdot 2i = -4i + 6i^2 = -4i - 6 \Rightarrow B(-6,-4)$

A' y B' son los afijos de los opuestos de los otros dos vértices..

Luego son: A'(2,-3) y B'(6,4).

Valor	Nota
10	

6. Hallar *a* y *b* para que se cumpla la siguiente igualdad:

$$\frac{a+19i}{-5+bi} = 3-2i$$

$\dfrac{a+19i}{-5+bi} = 3-2i \Rightarrow a + 19i = (3-2i)(-5+bi) = -15 + 3bi + 10i - 2bi^2 = (-15+2b) + (3b+10)i \Rightarrow \begin{cases} -15+2b = a \\ 3b+10 = 19 \end{cases}$

Resolviendo el sistema queda que: $\boxed{a = -9}$ *y* $\boxed{b = 3}$.

Valor	Nota
10	

7. Calcular todas las raíces dando los resultados en forma binómica:

$$\sqrt[4]{-1-\sqrt{3}i}$$

Hallamos el módulo y argumento del radicando: $\begin{cases} |z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \\ \tan\alpha = \dfrac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}\ (3^o\ cuad) \Rightarrow \alpha = 240^o \end{cases}$ *. Por tanto:*

$$\sqrt[4]{-1-\sqrt{3}i} = \sqrt[4]{2_{240^o}} = \sqrt[4]{2}_{\frac{240^o}{4}+\frac{360^o k}{4}(con\ k=0,1,2\ y\ 3)} = \sqrt[4]{2}_{60^o+90^o k (con\ k=0,1,2\ y\ 3)} = \begin{cases} z_1 = \sqrt[4]{2}_{60^o} = \sqrt[4]{2}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) \\ z_2 = \sqrt[4]{2}_{150^o} = \sqrt[4]{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ z_3 = \sqrt[4]{2}_{240^o} = \sqrt[4]{2}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) \\ z_4 = \sqrt[4]{2}_{330^o} = \sqrt[4]{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) \end{cases}$$

Valor	Nota
10	

8. Dado el número complejo $z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$

a) Calcula z^5 haciendo todo el cálculo en forma binómica.

b) Calcula z^{20} haciendo el cálculo en forma polar.

a) Aplicando el binomio de Newton:

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)^5 = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(-\frac{1}{2}i\right)^1 + \binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(-\frac{1}{2}i\right)^2 + \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(-\frac{1}{2}i\right)^3 + \binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(-\frac{1}{2}i\right)^4 + \binom{5}{5}\left(-\frac{1}{2}i\right)^5 =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^5 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^5 i - 10\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^5 i + 5\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 i = \left(\frac{1}{2}\right)^5 (1 - 5i - 10 + 10i + 5 - i) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 (-4+4i) = \boxed{-\frac{1}{8} + \frac{1}{8}i}$$

b) Calculamos el módulo y argumento de z: $\begin{cases} |z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \tan\alpha = \frac{-1/2}{1/2} = -1\,(4^o\,cuad) \Rightarrow \alpha = 315^o \end{cases}$ *, luego:*

$$z^{20} = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}_{315^o}\right)^{20} = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)_{315^o\cdot 20}^{20} = \left(\frac{1}{2^{10}}\right)_{6300^o} = \left(\frac{1}{1024}\right)_{180^o+17\cdot 360^o} = \left(\frac{1}{1024}\right)_{180^o} = \boxed{-\frac{1}{1024}}$$

Valor	Nota
10	

9. El producto de dos números complejos es 2*i* y el cubo de uno de ellos dividido por el otro es 1/2. Hállalos

Llamaremos z y w a los dos números complejos que buscamos. Deben cumplir que: $\begin{cases} z\cdot w = 2i \\ \frac{z^3}{w} = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Despejamos w en la segunda ecuación: $w = 2z^3$ *y sustituimos en la primera que queda:*

$$z\cdot 2z^3 = 2i \Rightarrow z^4 = i \Rightarrow z = \sqrt[4]{i} = \sqrt[4]{1_{90^o}} = 1_{\frac{90^o}{4}+\frac{360^o k}{4}(con\ k=0,1,2\ y\ 3)} = 1_{22,5^o+90^o k(con\ k=0,1,2\ y\ 3)}$$

Salen cuatro soluciones para z y otras cuatro par w que son, respectivamente:

$$z_1 = 1_{22,5^o} \Rightarrow w_1 = 2\cdot\left(1_{22,5^o}\right)^3 = 2_{67,5^o}$$
$$z_2 = 1_{112,5^o} \Rightarrow w_2 = 2\cdot\left(1_{112,5^o}\right)^3 = 2_{337,5^o}$$
$$z_3 = 1_{202,5^o} \Rightarrow w_3 = 2\cdot\left(1_{202,5^o}\right)^3 = 2_{247,5^o}$$
$$z_4 = 1_{292,5^o} \Rightarrow w_4 = 2\cdot\left(1_{292,5^o}\right)^3 = 2_{157,5^o}$$