

ECUACIONES EXPONENCIALES

Recuerda que las ecuaciones exponenciales son aquellas en las que la incógnita aparece en algún exponente. Vamos a estudiar tres casos distintos. En cada uno de ellos hay ejemplos resueltos, ejercicios para practicar y al final hay más ejercicios de los tres casos mezclados para estudiar el examen

Caso 1: Se escriben los dos miembros de la ecuación como potencias de la misma base y se igualan los exponentes

Ejemplos resueltos. Te recomiendo que los intentes por tu cuenta antes de ver las soluciones.

- $2^x = 32$
- $2^x - 5 = 59$
- $4^x = 64$
- $3^{x+1} = 81$
- $3^{x+1} - 3^x = 18$
- $3 \cdot 2^{x+2} - 5 \cdot 2^x = 56$
- $2^{x+3} + 2^x = 72$
- $5^{x-2} + 5^{x-1} = \frac{30}{5}$

Soluciones

- $2^x = 32 \Rightarrow 2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5$
- $2^x - 5 = 59 \Rightarrow 2^x = 59 + 5 \Rightarrow 2^x = 64 \Rightarrow 2^x = 2^6 \Rightarrow x = 6$
- $4^x = 64 \Rightarrow (2^2)^x = 2^6 \Rightarrow 2^{2x} = 2^6 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$
- $3^{x+1} = 81 \Rightarrow 3^{x+1} = 3^4 \Rightarrow x + 1 = 4 \Rightarrow x = 3$
- $3^{x+1} - 3^x = 18 \Rightarrow 3 \cdot 3^x - 3^x = 18 \Rightarrow 2 \cdot 3^x = 18 \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow x = 2$
- $3 \cdot 2^{x+2} - 5 \cdot 2^x = 56 \Rightarrow 3 \cdot 2^2 \cdot 2^x - 5 \cdot 2^x = 56 \Rightarrow 12 \cdot 2^x - 5 \cdot 2^x = 56 \Rightarrow 7 \cdot 2^x = 56 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$
- $2^{x+3} + 2^x = 72 \Rightarrow 2^3 \cdot 2^x + 2^x = 72 \Rightarrow 8 \cdot 2^x + 2^x = 72 \Rightarrow 9 \cdot 2^x = 72 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$
- $5^{x-2} + 5^{x-1} = \frac{30}{5} \Rightarrow 5^x \cdot 5^{-2} + 5^x \cdot 5^{-1} = \frac{30}{5} \Rightarrow \frac{5^x}{25} + \frac{5^x}{5} = \frac{30}{5} \Rightarrow 5^x + 5 \cdot 5^x = 150 \Rightarrow 6 \cdot 5^x = 150 \Rightarrow 5^x = 25 \Rightarrow x = 2$

Ejercicios para practicar

- $3^x = 27$
- $7^{x+1} = 1$
- $5^{x-1} = 25$
- $2^x = \frac{1}{8}$
- $2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 14$
- $6^{2x} = 1296$
- $2^{x^2-1} = 8$
- $3^x \cdot 9^x = 9^3$
- $2^{5-x^2} = \frac{1}{16}$
- $5^{x+3} = \sqrt{125}$
- $3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1} = 39$
- $2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 28$

Caso 2: Realizamos un cambio de variable para reducir la ecuación a otra de segundo grado. Hallamos la solución para la nueva variable y por último deshacemos el cambio.

Ejemplos resueltos. Te recomiendo que los intentes por tu cuenta antes de ver las soluciones.

1. $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

3. $2^x + 2^{1-x} = 3$

2. $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$

4. $2^{x-1} + \frac{1}{2^{x-3}} = 5$

Soluciones

1. $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$. Hacemos el cambio $z = 2^x$ y obtenemos la ecuación $z^2 - 5z + 4 = 0 \Rightarrow z_0 = 1, z_1 = 4$. deshacemos el cambio $2^x = 1 \Rightarrow x = 0$ y $2^x = 4 \Rightarrow x = 2$.

2. $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0 \Rightarrow (2^2)^x - 3 \cdot 2^x \cdot 2^1 + 8 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 6 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$. Hacemos el cambio $z = 2^x$ y obtenemos la ecuación $z^2 - 6z + 8 = 0 \Rightarrow z_0 = 2, z_1 = 4$. deshacemos el cambio $2^x = 2 \Rightarrow x = 1$ y $2^x = 4 \Rightarrow x = 2$.

3. $2^x + 2^{1-x} = 3 \Rightarrow 2^x + \frac{2^1}{2^x} = 3$. Multiplicamos todo por 2^x para obtener $(2^x)^2 + 2 = 3 \cdot 2^x$. Hacemos el cambio $z = 2^x$, llevamos todos los términos a la izquierda y obtenemos la ecuación $z^2 - 3z + 2 = 0 \Rightarrow z_0 = 1, z_1 = 2$. deshacemos el cambio $2^x = 1 \Rightarrow x = 0$ y $2^x = 2 \Rightarrow x = 1$.

4. $2^{x-1} + \frac{1}{2^{x-3}} = 5$. Primero transformamos la ecuación en $\frac{2^x}{2} + \frac{2^3}{2^x} = 5$. Multiplicamos todo por $2 \cdot 2^x$ para obtener $(2^x)^2 + 16 = 10 \cdot 2^x$. Hacemos el cambio $z = 2^x$, llevamos todos los términos a la izquierda y obtenemos la ecuación $z^2 - 10z + 16 = 0 \Rightarrow z_0 = 2, z_1 = 8$. deshacemos el cambio $2^x = 2 \Rightarrow x = 1$ y $2^x = 8 \Rightarrow x = 3$.

Ejercicios para practicar

1. $2 \cdot 2^x + 4^x = 80$

5. $4^x + 2^5 = 3 \cdot 2^{x+2}$

2. $5^x + 5^{1-x} = 6$

6. $5^{2x-2} - 6 \cdot 5^x + 125 = 0$

3. $9^x - 6 \cdot 3^x + 81 = 0$

7. $2^x + \frac{1}{2^{x-2}} = 5$

4. $1 + 9^x = 3^{x+1} + 3^{x-1}$

8. $5^{x-1} = 2 + \frac{3}{5^{x-2}}$

Caso 3: No podemos utilizar ninguna de las estrategias anteriores. En este caso, aplicamos logaritmos después de dejar un término en cada lado de la igualdad y despejamos la incógnita. En general necesitaremos la calculadora para hallar el valor de x .

Ejemplos resueltos. Te recomiendo que los intentes por tu cuenta antes de ver las soluciones.

1. $3^x = 2^x$
2. $3^{x-1} = 2^x$
3. $2^{2x} = 5^{1-2x}$
4. $2^x \cdot 5^x = 20$

Soluciones

1. $3^x = 2^x \Rightarrow \log 3^x = \log 2^x \Rightarrow x \log 3 = x \log 2 \Rightarrow x \log 3 - x \log 2 = 0 \Rightarrow x(\log 3 - \log 2) = 0 \Rightarrow x = 0$.
2. $3^{x-1} = 2^x \Rightarrow \log 3^{x-1} = \log 2^x \Rightarrow (x-1) \log 3 = x \log 2 \Rightarrow x \log 3 - \log 3 - x \log 2 = 0 \Rightarrow x(\log 3 - \log 2) = \log 3 \Rightarrow x = \frac{\log 3}{\log 3 - \log 2}$
3. $2^{2x} = 5^{1-2x} \Rightarrow \log 2^{2x} = \log 5^{1-2x} \Rightarrow 2x \log 2 = (1-2x) \log 5 \Rightarrow 2x \log 2 - (1-2x) \log 5 = 0 \Rightarrow 2x \log 2 - \log 5 + 2x \log 5 = 0 \Rightarrow 2x(\log 2 + \log 5) = \log 5 \Rightarrow x = \frac{\log 5}{2(\log 2 + \log 5)}$
4. $2^x \cdot 5^x = 20 \Rightarrow 10^x = 20 \Rightarrow \log 10^x = \log 20 \Rightarrow x = \log 20$.

Ejercicios para practicar

1. $4^x = 6^{1-x}$
2. $5^{3x-1} = 3^{1-2x}$
3. $e^{x-3} = 2^{x+1}$
4. $3^x \cdot 7^x = 22$

Ejercicios para estudiar para el examen. Hay ejercicios de los tres casos mezclados

1. $4^{x+3} = 8^{2-x}$
2. $3^{5x} = 7^{1-5x}$
3. $9^{x-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$
4. $2^{x+2} + 2^{x-1} - 2^{x-3} = 70$
5. $5^{3x+1} = 25^{x-5}$
6. $e^{x+1} - 2^{3-x} = 0$
7. $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{8}{125}$
8. $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-2} - 151 = 0$
9. $3^{1-x} + 3^{2-x} = \frac{4}{27}$
10. $2^x \cdot 5^x = 0,1$
11. $2^x \cdot 3^x = 81$
12. $7^{x+2} - 7^{x+1} + 7^x = 43$

ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Recuerda que las ecuaciones logarítmicas son aquellas en las que la incógnita aparece como la base o el argumento de un logaritmo. Para resolverlas utilizamos las propiedades de los logaritmos hasta conseguir que en ambos lados de la igualdad nos aparezca un único logaritmo con la misma base e igualamos los argumentos.

Ejemplos resueltos. Te recomiendo que los intentes por tu cuenta antes de ver las soluciones.

1. $\log x + \log 5 = 2$

3. $(x^2 - 4x + 7) \log 5 + \log 16 = 4$

2. $\log x + \log(x + 3) = 2 \log(x + 1)$

4. $\frac{\log(16-x^2)}{\log(3x-4)} = 2$

Soluciones

1. $\log x + \log 5 = 2 \Rightarrow \log 5x = \log 10^2 \Rightarrow 5x = 100 \Rightarrow x = 20$

2. $\log x + \log(x + 3) = 2 \log(x + 1) \Rightarrow \log x(x + 3) = \log(x + 1)^2 \Rightarrow x(x + 3) = (x + 1)^2 \Rightarrow x^2 + 3x = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x = 1$

3. $(x^2 - 4x + 7) \log 5 + \log 16 = 4 \Rightarrow \log 16 \cdot 5^{x^2-4x+7} = \log 10^4 \Rightarrow 16 \cdot 5^{x^2-4x+7} = 10^4 \Rightarrow 5^{x^2-4x+7} = 5^4 \Rightarrow x^2 - 4x + 7 = 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$

4. $\frac{\log(16-x^2)}{\log(3x-4)} = 2 \Rightarrow \log(16-x^2) = 2 \log(3x-4) \Rightarrow \log(16-x^2) = \log(3x-4)^2 \Rightarrow 16-x^2 = (3x-4)^2 \Rightarrow 16-x^2 = 9x^2-24x+16 \Rightarrow 8x^2-24x=0 \Rightarrow x=0, x=3$

Ejercicios para practicar

1. $\log_x 16 = 2$

7. $2Lx - L5x = L2$

2. $\log x + \log 80 = 3$

8. $2 \log x = 4 + \log \frac{x}{10}$

3. $\log(22 - x) = -1 + \log x$

9. $3 \log(6 - x) - \log(72 - x^3) = 0$

4. $2Lx + L(x^2 + 2) = L3$

10. $\log \sqrt{3x + 1} + \log 5 = 1 + \log \sqrt{2x - 3}$

5. $3 \log x = 2 \log x + \log 3$

11. $\log \sqrt[3]{x} - \log \sqrt[3]{4} = \frac{1}{3}$

6. $\log x^2 - \log 3 = \log x + \log 5$

12. $\frac{\log(10-x^2)}{\log(5-2x)} = 2$

Ejercicios para el examen

1. $\frac{1}{3} \log_2 x = -3$

6. $\log 2 + \log(x - 3) = \log \sqrt{2x}$

2. $\log_x 100 - \log_x 25 = 2$

7. $2 \log x = \log \left(\frac{x}{2}\right) - 1$

3. $\log x = 1 + \log(22 - x)$

8. $2 \log \sqrt{3x - 1} - \log \sqrt{2x - 3} = 1 - \log 5$

4. $L(2x - 3) + L(5 - x) = L5$

9. $3 - \log 125 = (x^2 - 5x + 9) \cdot \log 2$

5. $2 \log(5x - 4) - \log 5 = \log(x + 4)$

10. $\log(28 - x^3) - 3 \log(4 - x) = 0$