

## EJERCICIOS DE INTEGRALES DEFINIDAS. ÁREAS

### Ejercicio 1.-

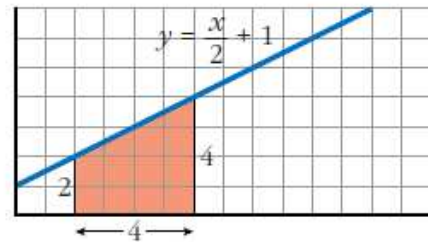
Halla gráficamente las siguientes integrales:

a)  $\int_2^6 \left(\frac{x}{2} + 1\right) dx$

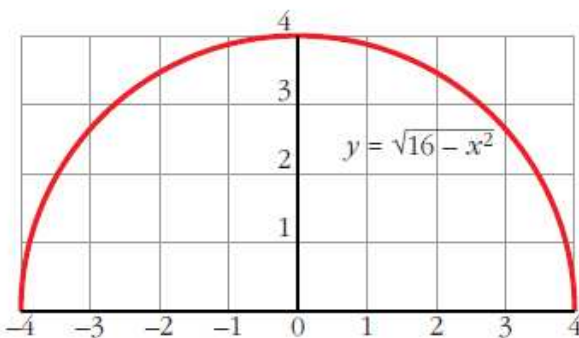
b)  $\int_{-4}^4 \sqrt{16 - x^2} dx$

a) Es un trapecio cuyas bases miden 2 y 4 y cuya altura mide 4.

$$\text{Área} = \frac{2 + 4}{2} \cdot 4 = 12 \text{ u}^2$$



b)  $y = \sqrt{16 - x^2} \Rightarrow y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4^2$  (Circunferencia)



El recinto cuya área queremos calcular es medio círculo de radio 4 u.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4^2 = \\ &= \frac{16}{2} \cdot \pi = 8 \cdot \pi = 25,1 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

### Ejercicio 2.-

Sea la función:  $F(x) = \int_0^x \log(t^2 + 4) dt$ . Calcula  $F'(x)$ .

$$F(x) = \int_0^x \log(t^2 + 4) dt = \int_0^x f(t) dt, \text{ siendo } f(t) = \log(t^2 + 4) \text{ continua.}$$

Por el teorema fundamental del cálculo:

$$F'(x) = f(x) = \log(x^2 + 4)$$

### Ejercicio 3.-

Calcula la siguiente integral:  $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$

$$\int_0^{\pi/2} \cos x dx = [\text{sen } x]_0^{\pi/2} = \text{sen } \frac{\pi}{2} - \text{sen } 0 = 1 - 0 = 1$$

### Ejercicio 4.-

Calcula:  $\int_1^6 (4x^3 - 4x^4 - 3) dx$

$$\begin{aligned} I &= \left[ x^4 - \frac{4}{5} x^5 - 3x \right]_1^6 = \left( 6^4 - \frac{4}{5} \cdot 6^5 - 3 \cdot 6 \right) - \left( 1^4 - \frac{4}{5} \cdot 1^5 - 3 \cdot 1 \right) = \\ &= -4942,8 + 2,8 = -4940 \end{aligned}$$

### Ejercicio 5.-

Calcula:  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

$$I = [\text{arc tg } x]_0^1 = \text{arc tg } 1 - \text{arc tg } 0 = \frac{\pi}{4}$$

Observación:  $\int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a}$

### Ejercicio 6.-

Halla el área comprendida entre la función  $y = x^3 - x^2 - 6x$  y el eje  $X$ .

I. Hallamos las soluciones de la ecuación:  $x^3 - x^2 - 6x = 0$

Son  $-2, 0$  y  $3$ .

II.  $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$ . Buscamos su primitiva:

$$G(x) = \int (x^3 - x^2 - 6x) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2$$

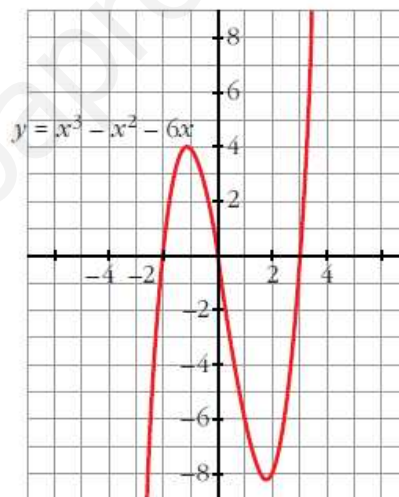
III.  $G(-2) = \frac{-16}{3}$ ,  $G(0) = 0$ ,  $G(3) = \frac{-63}{4}$

IV.  $G(0) - G(-2) = \frac{16}{3}$

$$G(3) - G(0) = \frac{-63}{4}$$

El área buscada es:  $\frac{16}{3} + \left| \frac{-63}{4} \right| = \frac{253}{12} u^2$

(Se incluye la gráfica para entender el proceso, pero es innecesaria para obtener el área).



### Ejercicio 7.-

Halla el área comprendida entre las funciones  $y = x^4 + x^3$  e  $y = x^4 + x^2 + 6x$ .

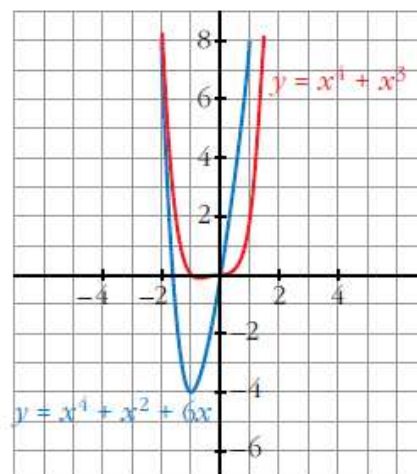
Se obtiene la función diferencia:

$$y = (x^4 + x^3) - (x^4 + x^2 + 6x) = x^3 - x^2 - 6x$$

Ahora se calcula el área comprendida entre esta función y el eje  $X$ , lo cual se ha hecho ya en el ejercicio anterior.

Por lo tanto, el área buscada es  $\frac{253}{12} u^2$ .

(También aquí es innecesaria la gráfica para obtener el área buscada).



### Ejercicio 8.-

Calcula el área comprendida entre la curva:  $y = 3x^2 - x + 1$ , el eje  $X$  y las rectas  $x = 0$  y  $x = 4$ .

I. Calculamos las soluciones de la ecuación:  $3x^2 - x + 1 = 0$

No tiene soluciones, por lo que no corta al eje  $X$ .

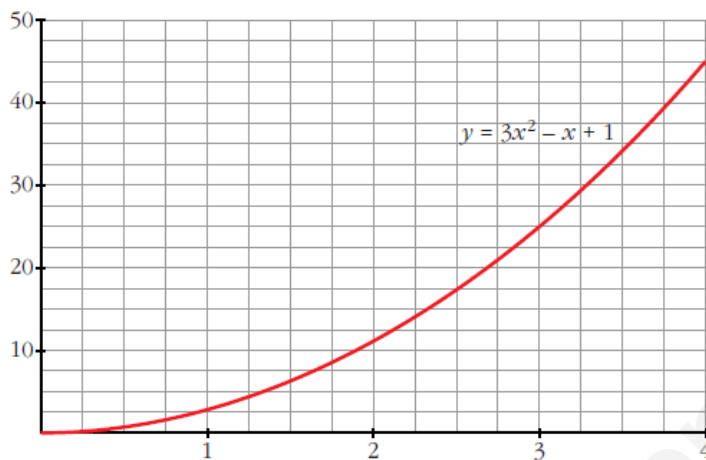
II. Buscamos una primitiva de  $f(x)$ :

$$G(x) = \int (3x^2 - x + 1) dx = x^3 - \frac{x^2}{2} + x$$

III.  $G(0) = 0$ ,  $G(4) = 60$

IV.  $G(4) - G(0) = 60$

El área buscada es  $60 \text{ u}^2$ .



### Ejercicio 9.-

Calcula el área bajo la curva  $y = 3x - 2$  entre  $x = -1$  y  $x = 1$ .

I. Hallamos la solución de la ecuación  $3x - 2 = 0$ . Es  $\frac{2}{3}$ .

II. Ordenamos los extremos del intervalo y la raíz que hay entre ellos:  $-1, \frac{2}{3}, 1$ .

III. Buscamos una primitiva de  $f(x)$ :

$$G(x) = \int (3x - 2) dx = \frac{3x^2}{2} - 2x$$

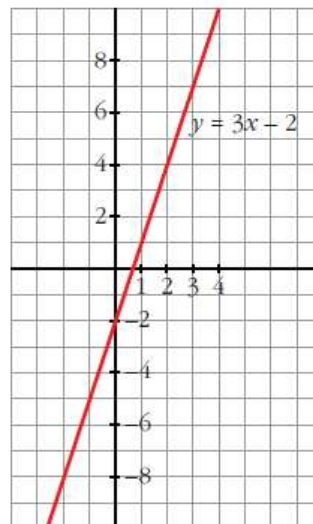
$$\text{IV. } G(-1) = \frac{7}{2}, \quad G\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{-2}{3}, \quad G(1) = \frac{-1}{2}$$

$$\text{V. } G\left(\frac{2}{3}\right) - G(-1) = \frac{-2}{3} - \frac{7}{2} = \frac{-25}{6}$$

$$G(1) - G\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{-1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\text{El área buscada es: } \left| \frac{-25}{6} \right| + \frac{1}{6} = \frac{26}{6} = \frac{13}{3} \text{ u}^2.$$

(Se incluye la gráfica, aunque es innecesaria para obtener su área).



### Ejercicio 10.-

Halla el área bajo la curva  $y = \sqrt{x}$  entre  $x = 0$  y  $x = 4$ .

I. Buscamos la primitiva de la función  $f(x) = \sqrt{x}$ .

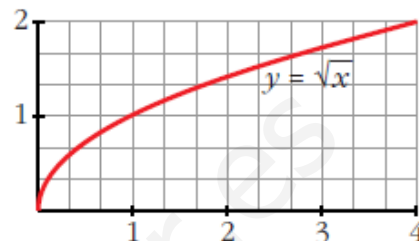
$$G(x) = \int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3}$$

II.  $G(0) = 0$ ,  $G(4) = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3}$

III.  $G(4) - G(0) = \frac{16}{3} - 0 = \frac{16}{3}$

El área buscada es:  $\frac{16}{3} u^2$ .

(Se incluye la gráfica, aunque es innecesaria para obtener el área).



### Ejercicio 11.-

Halla el área comprendida entre  $y = x^2 - 5$  e  $y = -x^2 + 5$ .

I. Buscamos las soluciones de:  $x^2 - 5 = -x^2 + 5$ . Son  $-\sqrt{5}$  y  $\sqrt{5}$ .

Por tanto, estos van a ser nuestros límites de integración.

II. Se obtiene la función diferencia:

$$y = (-x^2 + 5) - (x^2 - 5) = -2x^2 + 10$$

III. Buscamos su primitiva:

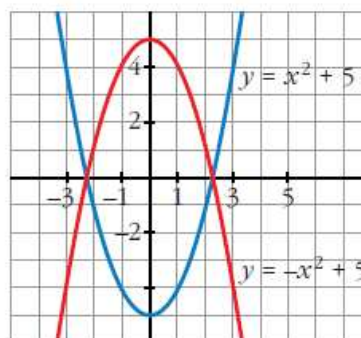
$$G(x) = \int (-2x^2 + 10) dx = \frac{-2x^3}{3} + 10x$$

IV.  $G(-\sqrt{5}) = \frac{-20}{3}\sqrt{5}$ ,  $G(\sqrt{5}) = \frac{20}{3}\sqrt{5}$

V.  $G(\sqrt{5}) - G(-\sqrt{5}) = \frac{20}{3}\sqrt{5} + \frac{20}{3}\sqrt{5} = \frac{40}{3}\sqrt{5}$

El área buscada es:  $\frac{40}{3}\sqrt{5} u^2$ .

(Se incluye la gráfica, aunque es innecesaria para obtener el área).



## Ejercicio 12.-

Calcula el área comprendida entre las curvas dadas en cada uno de los ejercicios siguientes:

a)  $y = 4 - x^2$ ;  $y = 8 - 2x^2$

b)  $y = x^2$ ;  $y = 4 - x^2$

c)  $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ ;  $y = x$

d)  $y = x(x-1)(x-2)$ ;  $y = 0$

e)  $y = x^2$ ;  $y = 1$

f)  $y = x^2 - 2x$ ;  $y = -x^2 + 4x$

g)  $y = -x^2 + 4x - 4$ ;  $y = 2x - 7$

a) I. Buscamos las soluciones de  $4 - x^2 = 8 - 2x^2$ . Son  $-2$  y  $2$ .

Por tanto, estos van a ser nuestros límites de integración.

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = (8 - 2x^2) - (4 - x^2) = 4 - x^2$$

III. Calculamos su primitiva:

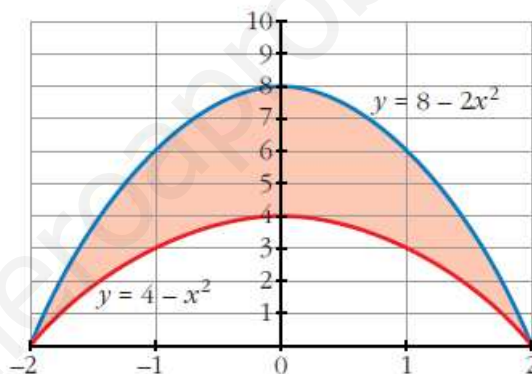
$$G(x) = \int (4 - x^2) dx = 4x - \frac{x^3}{3}$$

IV.  $G(-2) = -8 + \frac{8}{3} = -\frac{16}{3}$

$$G(2) = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

V.  $G(2) - G(-2) = \frac{16}{3} - \left(-\frac{16}{3}\right) = \frac{32}{3}$

El área buscada es:  $\frac{32}{3} u^2$ .



b) I. Buscamos las soluciones de la ecuación:  $x^2 = 4 - x^2$ .

Son  $-\sqrt{2}$  y  $\sqrt{2}$  (nuestros límites de integración).

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = (4 - x^2) - x^2 = 4 - 2x^2$$

III. Calculamos su primitiva:

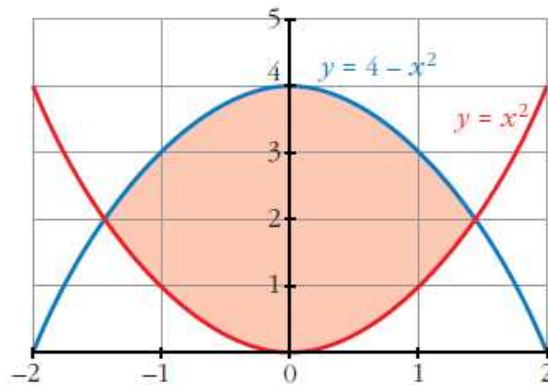
$$G(x) = \int (4 - 2x^2) dx = 4x - \frac{2x^3}{3}$$

IV.  $G(-\sqrt{2}) = \frac{-8\sqrt{2}}{3}$ ,  $G(\sqrt{2}) = \frac{8\sqrt{2}}{3}$

V.  $G(\sqrt{2}) - G(-\sqrt{2}) = \frac{8\sqrt{2}}{3} + \frac{8\sqrt{2}}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$

El área buscada es:  $\frac{16\sqrt{2}}{3} u^2$ .

(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para hallar el área).



c) I. Buscamos las soluciones de la ecuación:  $x^3 - 3x^2 + 3x = x$ . Son 0, 1 y 2.

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = (x^3 - 3x^2 + 3x) - x = x^3 - 3x^2 + 2x$$

III. Calculamos su primitiva:

$$G(x) = \int (x^3 - 3x^2 + 2x) dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$$

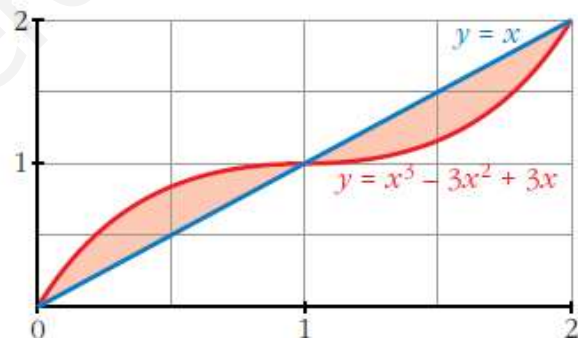
IV.  $G(0) = 0$ ,  $G(1) = \frac{1}{4}$ ,  $G(2) = 0$

$$G(1) - G(0) = \frac{1}{4}$$

$$G(2) - G(1) = \frac{-1}{4}$$

El área buscada es:  $\frac{1}{4} + \left| \frac{-1}{4} \right| = \frac{1}{2} u^2$ .

(La gráfica que se adjunta es para entender mejor el ejercicio, pero es innecesaria para obtener el área).



d) I. Buscamos las soluciones de:  $x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) = 0$ . Son 0, 1 y 2.

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)$$

III. Calculamos su primitiva:

$$G(x) = \int x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$$

Resulta que se trata del mismo ejercicio que el apartado c).

El área buscada es:  $\frac{1}{2} u^2$ .

e) I. Buscamos las soluciones de la ecuación:  $x^2 = 1$ . Son  $-1$  y  $1$ .

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = x^2 - 1$$

III. Calculamos su primitiva:

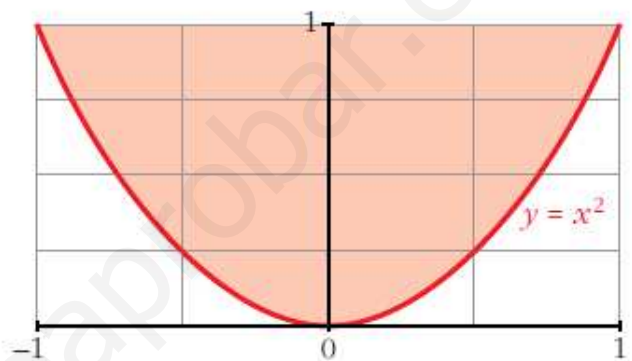
$$G(x) = \int (x^2 - 1) dx = \frac{x^3}{3} - x$$

IV.  $G(-1) = \frac{2}{3}$ ,  $G(1) = \frac{-2}{3}$

V.  $G(1) - G(-1) = \frac{-2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{-4}{3}$

El área buscada es:  $\left| \frac{-4}{3} \right| = \frac{4}{3} u^2$ .

(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para resolver el ejercicio).



f) I. Buscamos las soluciones de la ecuación:  $x^2 - 2x = -x^2 + 4x$ . Son  $0$  y  $3$ .

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = (x^2 - 2x) - (-x^2 + 4x) = 2x^2 - 6x$$

III. Calculamos su primitiva:

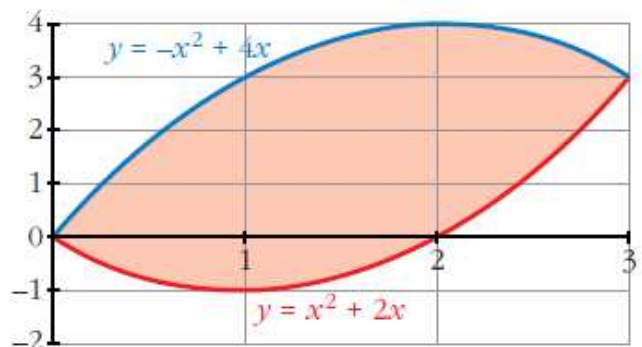
$$G(x) = \int (2x^2 - 6x) dx = \frac{2x^3}{3} - 3x^2$$

IV.  $G(0) = 0$ ,  $G(3) = -9$

V.  $G(3) - G(0) = -9$

El área buscada es:  $|-9| = 9 u^2$ .

(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria).



g) I. Buscamos las soluciones de:  $-x^2 + 4x - 4 = 2x - 7$ . Son  $-1$  y  $3$ .

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = (-x^2 + 4x - 4) - (2x - 7) = -x^2 + 2x + 3.$$

III. Calculamos su primitiva:

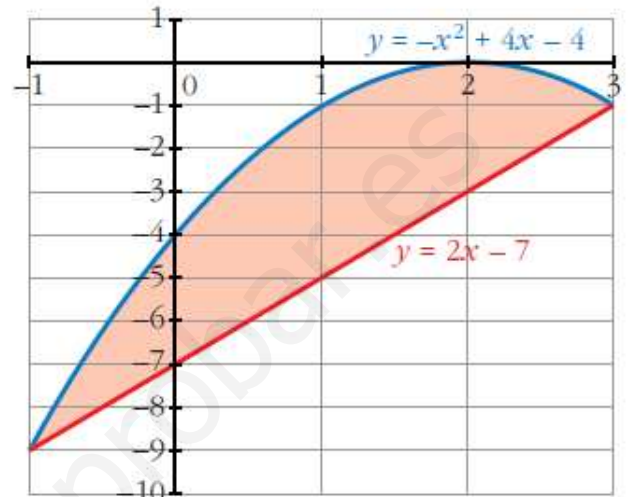
$$G(x) = \int (-x^2 + 2x + 3) dx = \frac{-x^3}{3} + x^2 + 3x$$

IV.  $G(-1) = \frac{-5}{3}$ ,  $G(3) = 9$

V.  $G(3) - G(-1) = 9 + \frac{5}{3} = \frac{32}{3}$

El área buscada es:  $\frac{32}{3} u^2$ .

(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para la resolución del ejercicio).



### Ejercicio 13.-

Calcula:  $\int_0^{\pi/4} \text{sen } x \cos x \, dx$

$$\int_0^{\pi/4} \text{sen } x \cdot \cos x \, dx = \int_0^{\sqrt{2}/2} t \, dt = \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{4}$$

Aplicamos el siguiente cambio:

$$\text{sen } x = t; \quad \cos x \cdot dx = dt$$

para  $x = 0$ ;  $t = 0$

para  $x = \frac{\pi}{4}$ ;  $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

### Ejercicio 14.-

Halla el valor de la integral definida de la función  $f(x) = \frac{1}{x+1} - 3 \cos(2\pi x)$  en el intervalo  $I = [0, 2]$ .

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left( \frac{1}{x+1} - 3 \cdot \cos(2\pi x) \right) dx &= \left[ \ln(x+1) - \frac{3 \cdot \text{sen}(2\pi x)}{2 \cdot \pi} \right]_0^2 = \\ &= \ln(3) - \ln(1) = \ln(3) \end{aligned}$$



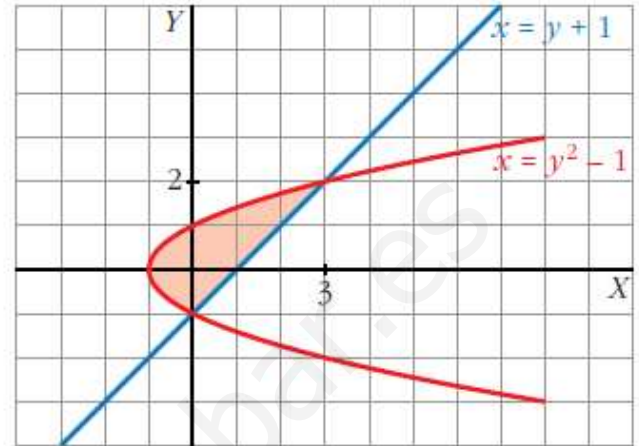
### Ejercicio 15.-

Dibuja el recinto plano limitado por la parábola  $y^2 - x = 1$  y por la recta paralela a  $y = x$  que pasa por el punto  $(1, 0)$ . Calcula el área de ese recinto.

I. Calculamos las soluciones de la ecuación:  $y^2 - 1 = y + 1$ .

(Esta ecuación resulta de despejar la  $x$  en:  $y^2 - x = 1$ ;  $y = x - 1$ ).

Sus soluciones son  $y = -1$  y  $2$ .



II. Calculamos la función diferencia:

$$x = (y^2 - 1) - (y + 1) = y^2 - y - 2$$

III. Buscamos su primitiva:

$$G(y) = \int (y^2 - y - 2) dy = \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} - 2y$$

$$\text{IV. } G(-1) = \frac{7}{6}, \quad G(2) = \frac{-10}{3}$$

$$\text{V. } G(2) - G(-1) = \frac{-10}{3} - \frac{7}{6} = \frac{-9}{2}$$

El área buscada es  $\left| \frac{-9}{2} \right| = \frac{9}{2} \text{ u}^2$ .

### Ejercicio 16.-

Comprueba que  $\int_0^2 |2x - 1| dx = \frac{5}{2}$ .

$$\int_0^2 |2x - 1| \cdot dx = \int_0^{1/2} (-2x + 1) dx + \int_{1/2}^2 (2x - 1) dx =$$

$$= [-x^2 + x]_0^{1/2} + [x^2 - x]_{1/2}^2 = \frac{-1}{4} + \frac{1}{2} + 4 - 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

### Ejercicio 17.-

Halla el área limitada por la función  $y = 2x - x^2$  y sus tangentes en los puntos en los que corta al eje de abscisas.

I. Buscamos las soluciones de la ecuación:  $2x - x^2 = 0$ . Son 0 y 2.

II. Calculamos la derivada de  $f(x) = 2x - x^2$ , que es  $f'(x) = 2 - 2x$ .

La tangente que pasa por (0, 0) tiene pendiente  $f'(0) = 2$ , por tanto es  $y = 2x$ .

La tangente que pasa por (2, 0) tiene pendiente  $f'(2) = -2$ , por tanto es  $y = -2x + 4$ .

III. Tenemos que distinguir dos intervalos de integración: entre 0 y 1 y entre 1 y 2.

La función diferencia en el primer intervalo es:

$$f_1(x) = 2x - (2x - x^2) = x^2$$

y en el segundo intervalo es:

$$f_2(x) = -2x + 4 - (2x - x^2) = x^2 - 4x + 4$$

IV. Sus primitivas son:

$$G_1(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

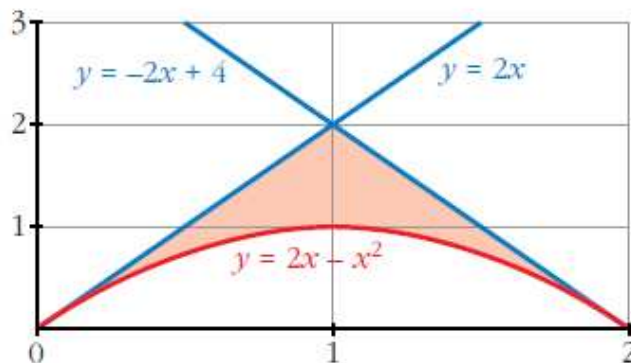
$$G_2(x) = \int (x^2 - 4x + 4) dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x$$

$$V. G_1(0) = 0, G_1(1) = \frac{1}{3}, G_1(1) - G_1(0) = \frac{1}{3}$$

$$G_2(1) = \frac{7}{3}, G_2(2) = \frac{8}{3}, G_2(2) - G_2(1) = \frac{1}{3}$$

$$\text{El área buscada es: } \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ u}^2.$$

(Se adjunta la gráfica aunque no es necesaria para resolver el ejercicio).



### Ejercicio 18.-

Calcula el área limitada por la curva  $y = x^3 - 2x^2 + x$  y la recta tangente a ella en el origen de coordenadas.

- I. Calculemos la ecuación de la recta tangente en el punto  $(0, 0)$ , para ello calculamos la derivada de nuestra función:

$$y' = 3x^2 - 4x + 1$$

$$y'(0) = 1 \text{ (pendiente)}$$

La recta tangente tiene por ecuación  $y = x$ .

- II. Calculamos las soluciones de:  $x^3 - 2x^2 + x = x$ . Son 0 y 2 (límites de integración).

- III. Obtenemos la función diferencia:

$$y = x^3 - 2x^2 + x - x = x^3 - 2x^2$$

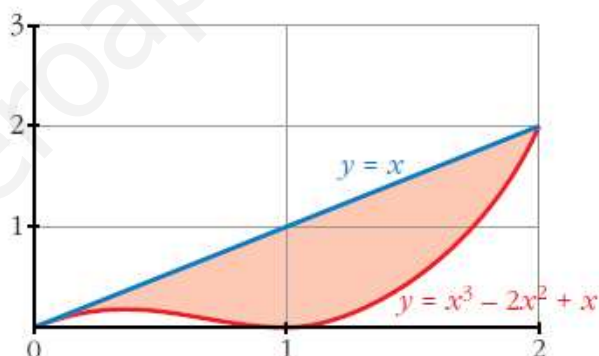
- IV. Buscamos su primitiva:  $G(x) = \int (x^3 - 2x^2) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}$

- V.  $G(0) = 0$ ,  $G(2) = \frac{-4}{3}$

$$G(2) - G(0) = \frac{-4}{3}$$

$$\text{El área buscada es: } \left| \frac{-4}{3} \right| = \frac{4}{3} \text{ u}^2.$$

(Se adjunta la gráfica aunque no es necesaria para la resolución del ejercicio).



### Ejercicio 19.-

Halla el área comprendida entre la curva  $y = \frac{4}{9 + 2x^2}$ , el eje de abscisas y las rectas verticales que pasan por los puntos de inflexión de dicha curva.

- I. Buscamos los puntos de inflexión, para ello, calculamos las dos primeras derivadas:

$$y' = \frac{-16x}{(9 + 2x^2)^2}$$

$$y'' = \frac{-16 \cdot (9 + 2x^2 - 8x^2)}{(9 + 2x^2)^3}$$

Igualamos a cero para encontrar en qué valores de  $x$  la segunda derivada es cero.

Esto ocurre en  $-\frac{\sqrt{6}}{2}$  y  $\frac{\sqrt{6}}{2}$  (puntos de inflexión).

II. Calculamos la primitiva de nuestra función:

$$G(x) = \int \frac{4}{9 + 2x^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \operatorname{arc\,tg} \left( \frac{\sqrt{2}x}{3} \right)$$

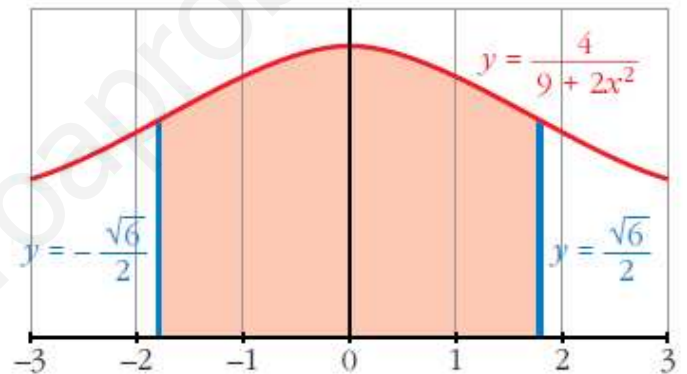
$$\text{III. } G\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \operatorname{arc\,tg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$G\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$G\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) - G\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left( \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \operatorname{arc\,tg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \right)$$

$$\text{El área buscada es: } \frac{2\sqrt{2}}{3} \left( \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \operatorname{arc\,tg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \right)$$

(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para la resolución del ejercicio).



### Ejercicio 20.-

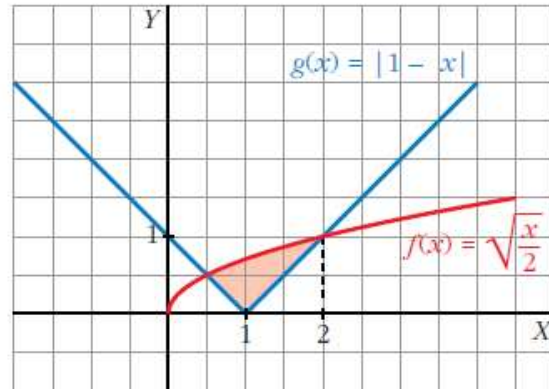
Si  $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}$  y  $g(x) = |1 - x|$ :

- Dibuja las dos gráficas en un mismo plano y halla sus puntos de intersección.
- Determina el área del recinto encerrado entre ambas gráficas.

$$a) g(x) = |1 - x| = \begin{cases} 1 - x, & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Buscamos los puntos de intersección resolviendo la siguiente ecuación:

$$\sqrt{\frac{x}{2}} = (1 - x)$$



Sus soluciones son  $\frac{1}{2}$  y 2. (Límites de integración).

b) Tenemos que distinguir dos intervalos de integración:  $\frac{1}{2}$  a 1 y 1 a 2.

I. La función diferencia en el primer intervalo es:

$$b_1(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} - (1 - x)$$

La función diferencia en el segundo intervalo es:

$$b_2(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} - (x - 1)$$

II. Sus primitivas son:

$$H_1(x) = \int \left( \sqrt{\frac{x}{2}} + x - 1 \right) = \frac{4}{3} \left( \sqrt{\frac{x}{2}} \right)^3 + \frac{x^2}{2} - x$$

$$H_2(x) = \int \left( \sqrt{\frac{x}{2}} - x + 1 \right) = \frac{4}{3} \left( \sqrt{\frac{x}{2}} \right)^3 - \frac{x^2}{2} + x$$

$$\text{III. } H_1\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{24}; \quad H_1(1) = \frac{2\sqrt{2} - 3}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2}$$

$$H_2(1) = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2}, \quad H_2(2) = \frac{4}{3}$$

$$\text{IV. } H_1(1) - H_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} + \frac{5}{24}$$

$$H_2(2) - H_2(1) = \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2}$$

$$\text{El área buscada es } \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} + \frac{5}{24} + \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} = \frac{13}{24} \text{ u}^2.$$

### Ejercicio 21.-

Se considera la función:

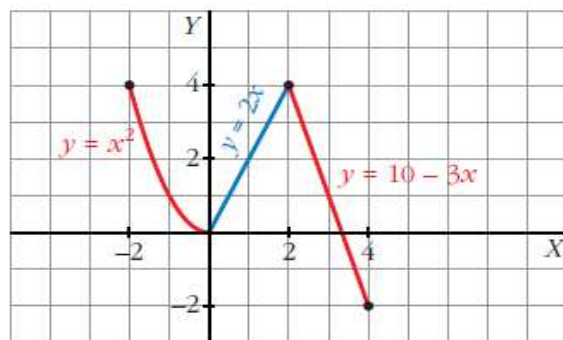
$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 10 - 3x & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

Representa la función  $g$  y calcula el valor de las siguientes integrales definidas:

$$I = \int_{-2}^1 g(x) dx$$

$$J = \int_1^4 g(x) dx$$

$$K = \int_{-2}^4 g(x) dx$$



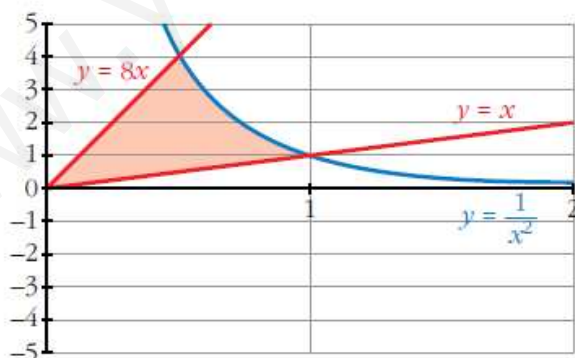
$$I = \int_{-2}^1 g(x) dx = \int_{-2}^0 x^2 dx + \int_0^1 2x dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^0 + [x^2]_0^1 = \frac{8}{3} + 1 = \frac{11}{3}$$

$$J = \int_1^4 g(x) dx = \int_1^2 2x dx + \int_2^4 (10 - 3x) dx = [x^2]_1^2 + \left[ 10x - \frac{3x^2}{2} \right]_2^4 = 5$$

$$K = \int_{-2}^4 g(x) dx = I + J = \frac{11}{3} + 5 = \frac{26}{3}$$

### Ejercicio 22.-

Dibuja el recinto comprendido entre las gráficas de las funciones  $y = \frac{1}{x^2}$ ,  $y = x$ ,  $y = 8x$ , y halla su área.



I. Buscamos los puntos de intersección de las funciones:

$$\frac{1}{x^2} = x: \text{ Solución } x = 1.$$

$$\frac{1}{x^2} = 8x: \text{ Solución } x = \frac{1}{2}.$$

$$x = 8x: \text{ Solución } x = 0.$$

Tenemos dos intervalos de integración: de 0 a  $\frac{1}{2}$  y de  $\frac{1}{2}$  a 1.

II. Hallamos la función diferencia en el primer intervalo:

$$f_1(x) = 8x - x$$

Y en el segundo intervalo:

$$f_2(x) = \frac{1}{x^2} - x$$

III. Buscamos sus primitivas:

$$G_1(x) = \int (8x - x) dx = \frac{7x^2}{2}$$

$$G_2(x) = \int \left( \frac{1}{x^2} - x \right) dx = \frac{-1}{x} - \frac{x^2}{2}$$

IV.  $G_1(0) = 0$ ,  $G_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8}$

$$G_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-17}{8}, \quad G_2(1) = \frac{-3}{2}$$

V.  $G_1\left(\frac{1}{2}\right) - G_1(0) = \frac{7}{8}$

$$G_2(1) - G_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$$

El área buscada es  $\frac{5}{8} + \frac{7}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} u^2$ .

### **Ejercicio 23.-**

**Halla el polinomio de segundo grado que pasa por los puntos (0, 1) y (3, 0), sabiendo que el área limitada por esa curva, el eje Y y el eje X positivo es  $\frac{4}{3}$ .**

Como el polinomio pasa por los puntos (0, 1) y (3, 0), una raíz es  $x = 3$ , por tanto:  $y = (x - 3) \cdot (ax - b)$

Por otro lado, cuando  $x = 0$ ,  $y = 1$ , así:  $1 = -3 \cdot (-b) = 3b$ ,  $b = \frac{1}{3}$

Quedando:  $y = (x - 3) \cdot \left(ax - \frac{1}{3}\right)$

Puesto que pasa por los puntos indicados y está limitado por los ejes  $X$  e  $Y$  (positivos), los límites de integración son  $0$  y  $3$ .

Así, buscamos la primitiva del polinomio:

$$G(x) = \int (x-3) \cdot \left(ax - \frac{1}{3}\right) dx = \frac{ax^3}{3} - 3a \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}x^2 + x$$

$$G(0) = 0$$

$$G(3) = 9a - \frac{27}{2}a - \frac{9}{6} + 3$$

$$G(3) - G(0) = 9a - \frac{27}{2}a - \frac{9}{6} + 3 = \frac{4}{3}$$

De donde sacamos que  $a = \frac{1}{27}$

Por tanto, el polinomio es:  $y = (x-3) \cdot \left(\frac{1}{27}x - \frac{1}{3}\right)$

#### **Ejercicio 24.-**

**Dada la curva  $y = x^2 + 2x + 2$ , halla el área limitada por la curva, la recta tangente en el punto donde la función tiene un extremo y la tangente a la curva con pendiente 6.**

Buscamos el punto donde la curva tiene un extremo, hallando su derivada e igualando a cero:  $y' = 2x + 2 = 0$ , el punto es  $(-1, 1)$ .

La ecuación de la recta tangente en dicho punto es  $y = 1$ .

Por otro lado, la ecuación de la recta tangente con pendiente 6 es  $y = 6x - 2$ .

Buscamos los puntos de corte de la curva con ambas rectas, de  $y = x^2 + 2x + 2$  con  $y = 1$  es  $(-1, 1)$ ; de  $y = x^2 + 2x + 2$  con  $y = 6x - 2$  es  $(2, 10)$ ; y de  $y = 1$

con  $y = 6x - 2$  es  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ .

Distinguimos dos intervalos de integración: de  $-1$  a  $\frac{1}{2}$  y de  $\frac{1}{2}$  a  $2$ .

En el primer intervalo la función diferencia es:

$$f_1(x) = x^2 + 2x + 2 - 1 = x^2 + 2x + 1$$



En el segundo:

$$f_2(x) = x^2 + 2x + 2 - (6x - 2) = x^2 - 4x + 4$$

Buscamos sus primitivas:

$$G_1(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + x$$

$$G_2(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x$$

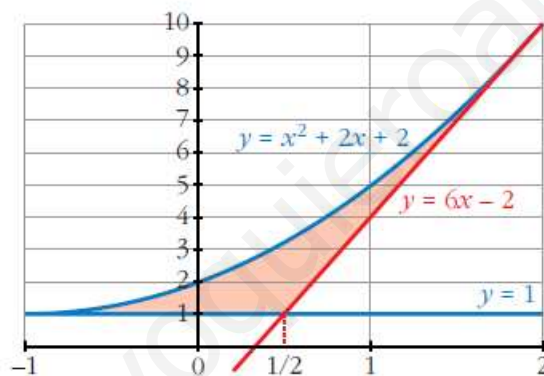
$$G_1(-1) = \frac{-1}{3}, G_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{19}{24}$$

$$G_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{24}, G_2(2) = \frac{8}{3}$$

$$G_1\left(\frac{1}{2}\right) - G_1(-1) = \frac{19}{24} + \frac{1}{3} = \frac{9}{8}$$

$$G_2(2) - G_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{3} - \frac{37}{24} = \frac{9}{8}$$

El área buscada es:  $\frac{9}{8} + \frac{9}{8} = \frac{9}{4} \text{ u}^2$ .



### Ejercicio 25.-

De la función  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  se sabe que tiene un máximo relativo en  $x = 1$ , un punto de inflexión en  $(0, 0)$  y que  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{5}{4}$ .

Calcula  $a, b, c$  y  $d$ .

Sabemos que pasa por el punto  $(0, 0)$ , es decir,  $f(0) = 0$ , de donde averiguamos que  $d = 0$ .

Por otro lado, sabemos que tiene un máximo relativo en  $x = 1$ , esto es que  $f'(1) = 0$ , es decir:  $3a + 2b + c = 0$ .

También tiene un punto de inflexión en  $(0, 0)$ , por lo que  $f''(0) = 0$ , de donde  $b = 0$ .

Como  $3a + 2b + c = 0$  y  $b = 0$ , se tiene que  $3a + c = 0 \rightarrow c = -3a$ .

Así, nuestra función queda reducida a la función:  $f(x) = ax^3 - 3ax$ .

---

Buscamos su primitiva:

$$G(x) = \frac{ax^4}{4} - \frac{3ax^2}{2}$$

$$G(0) = 0, \quad G(1) = \frac{a}{4} - \frac{3a}{2} = -\frac{5a}{4}$$

$$G(1) - G(0) = -\frac{5a}{4}$$

El resultado es  $-\frac{5a}{4}$  que es igual a  $\frac{5}{4}$ , de donde deducimos que  $a = -1$  y por tanto  $c = 3$ .

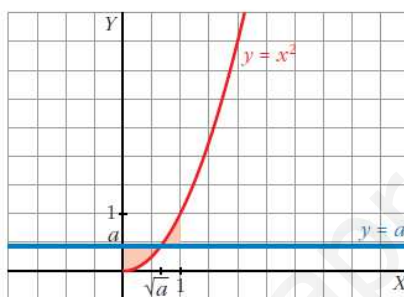
La función buscada es  $f(x) = -x^3 + 3x$ .

## Ejercicio 26.-

Se consideran las curvas  $y = x^2$  e  $y = a$ , donde  $0 < a < 1$ . Ambas curvas se cortan en el punto  $(x_0, y_0)$  con abscisa positiva. Halla  $a$  sabiendo que el área encerrada entre ambas curvas desde  $x = 0$  hasta  $x = x_0$  es igual a la encerrada entre ellas desde  $x = x_0$  hasta  $x = 1$ .

El punto de corte es  $(\sqrt{a}, a)$ .

Dibujamos las áreas para tener una idea más clara de nuestro ejercicio:



Tenemos dos intervalos de integración: de 0 a  $\sqrt{a}$  y de  $\sqrt{a}$  a 1.

La función diferencia para el primer intervalo es:

$$f_1(x) = a - x^2$$

Su primitiva es:

$$G_1(x) = ax - \frac{x^3}{3}$$

$$G_1(0) = 0, \quad G_1(\sqrt{a}) = a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3} = \frac{2a\sqrt{a}}{3}$$

El área en el primer intervalo es  $\frac{2a\sqrt{a}}{3} u^2$ .

La función diferencia en el segundo intervalo es:

$$f_2(x) = x^2 - a$$

Su primitiva es:

$$G_2(x) = \frac{x^3}{3} - ax$$

$$G_2(\sqrt{a}) = \frac{a\sqrt{a}}{3} - a\sqrt{a}, \quad G_2(1) = \frac{1}{3} - a$$

$$G_2(1) - G_2(\sqrt{a}) = \frac{1}{3} - a + \frac{2a\sqrt{a}}{3}$$

El área en el segundo intervalo es  $\frac{1}{3} - a + \frac{2a\sqrt{a}}{3} u^2$ .

Como el área en los dos intervalos es igual, se tiene que:

$$\frac{2a\sqrt{a}}{3} = \frac{1}{3} - a + \frac{2a\sqrt{a}}{3}$$

De donde obtenemos que  $a = \frac{1}{3}$

### Ejercicio 27.-

Halla el área comprendida entre las curvas  $y = e^x$ ,  $y = 2x - x^2$  y las rectas  $x = 0$  y  $x = 2$ .

I. Hallamos la función diferencia:

$$y = e^x - (2x - x^2) = e^x + x^2 - 2x$$

II. Buscamos su primitiva:

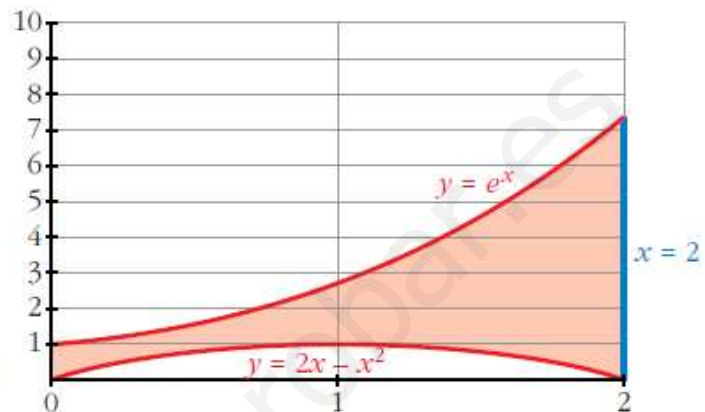
$$G(x) = e^x + \frac{x^3}{3} - x^2$$

III.  $G(0) = 1$

$$G(2) = e^2 - \frac{4}{3}$$

$$G(2) - G(0) = e^2 - \frac{4}{3} - 1$$

El área buscada es  $\left(e^2 - \frac{4}{3} - 1\right) u^2$ .



### Ejercicio 28.-

Halla el área de la región del plano limitado por la curva  $y = \ln x$ , la recta  $y = 2$  y los ejes de coordenadas.

La curva  $y = \ln x$  e  $y = 2$  se cortan en  $x = e^2$ , por tanto los límites de integración son 1 y  $e^2$ . Por otro lado, la región comprendida entre 0 y 1.

Así que distinguimos dos intervalos: de 0 a 1 y de 1 a  $e^2$ .

En el primer intervalo, la función diferencia es:  $y = 2 - 0 = 2$

Su primitiva es:

$$G_1(x) = 2x$$

$$G_1(0) = 0, \quad G_1(1) = 2$$

$$G_1(1) - G_1(0) = 2$$

El área para el primer intervalo es  $2 u^2$ .

En el segundo intervalo, la función diferencia es:

$$y = 2 - \ln x$$

Su primitiva es:

$$G_2(x) = 2x - (x \cdot \ln |x| - x) = 3x - x \ln |x|$$

$$G_2(e^2) = 3 \cdot e^2 - e^2 \cdot 2 = e^2$$

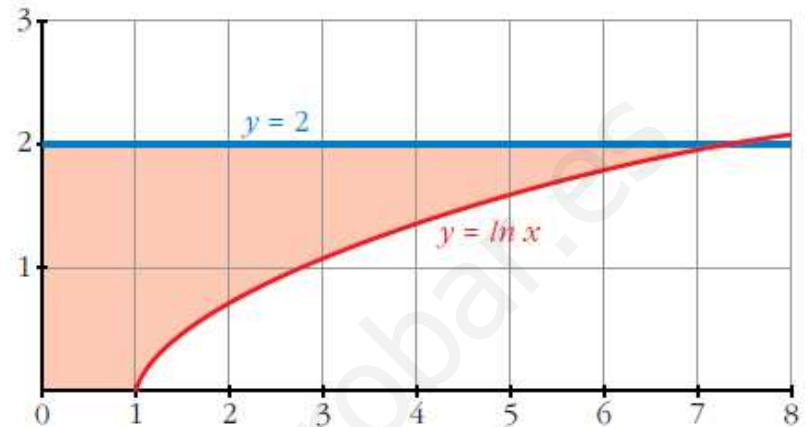
$$G_2(1) = 3$$

$$G_2(e^2) - G_2(1) = e^2 - 3$$

El área para el segundo intervalo es  $(e^2 - 3) u^2$ .

Por tanto, el área total es:

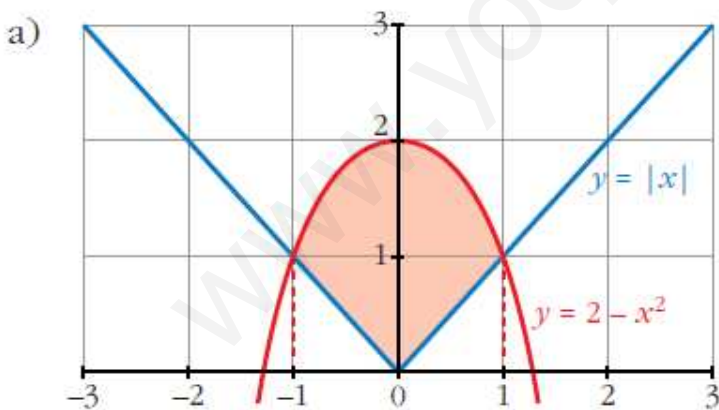
$$(2 + e^2 - 3) = (e^2 - 1) u^2.$$



### Ejercicio 29.-

Calcula el área de la figura limitada por las curvas que se dan en los siguientes casos:

- a)  $y = 2 - x^2$ ,  $y = |x|$
- b)  $xy + 8 = 0$ ,  $y = x^2$ ,  $y = 1$
- c)  $y = \text{sen } x$ ,  $y = \text{cos } x$ ,  $x = 0$



Se cortan en  $x = -1$  y  $x = 1$ .

En el intervalo de  $-1$  a  $0$ , la función diferencia es:

$$y = 2 - x^2 - (-x) = 2 - x^2 + x$$

En el intervalo de  $0$  a  $1$ , la función diferencia es:

$$y = 2 - x^2 - x$$

Por simetría, basta calcular el área en uno de los dos intervalos, por ejemplo, en el segundo. Buscamos su función primitiva:

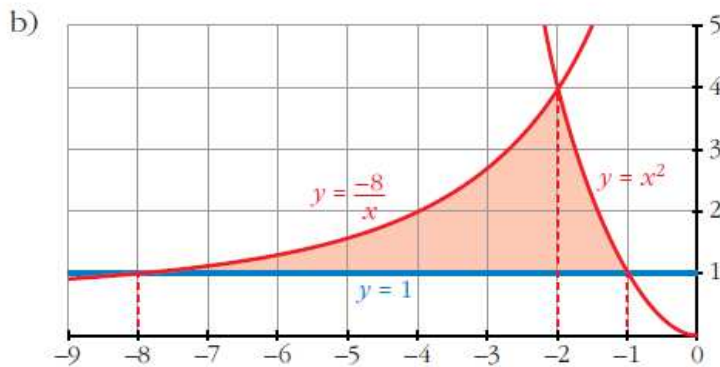
$$G(x) = \frac{-x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x$$

$$G(1) = \frac{7}{6}$$

$$G(0) = 0$$

$$G(1) - G(0) = \frac{7}{6}$$

El área total es  $2 \cdot \frac{7}{6} = \frac{7}{3} u^2$ .



Las tres funciones se cortan 2 a 2 en:  $-8, -2$  y  $-1$ .

Por tanto, calculamos el área en dos intervalos, de  $-8$  a  $-2$  y de  $-2$  a  $-1$ .

La función diferencia en el primer intervalo es:  $y = \frac{-8}{x} - 1$

Su primitiva es:

$$G_1(x) = -8 \cdot \ln |x| - x$$

$$G_1(-8) = -8 \cdot \ln(-8) + 8$$

$$G_1(-2) = -8 \cdot \ln(-2) + 2$$

$$G_1(-2) - G_1(-8) = -8 \cdot \ln(-2) + 2 + 8 \cdot \ln(-8) - 8 =$$

$$= -8 \cdot (\ln(-2) - \ln(-8)) - 6 = -8 \cdot \ln\left(\frac{1}{4}\right) - 6 = 8 \ln 4 - 6$$

La función diferencia en el segundo intervalo es:

$$y = x^2 - 1$$

Su primitiva es:

$$G_2(x) = \frac{x^3}{3} - x$$

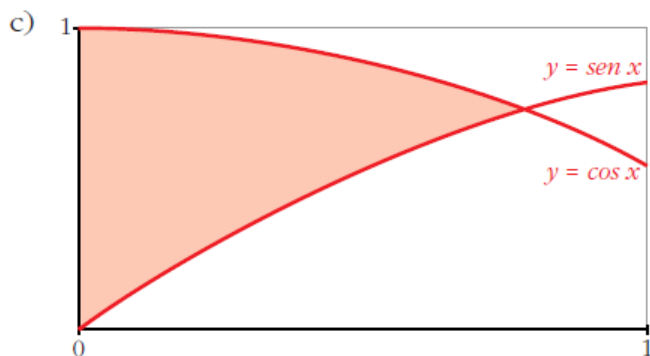
$$G_2(-2) = \frac{-2}{3}$$

$$G_2(-1) = \frac{2}{3}$$

$$G_2(-1) - G_2(-2) = \frac{4}{3}$$

El área buscada es:  $\left(8 \ln 4 - 6 + \frac{4}{3}\right) = \left(8 \ln 4 - \frac{14}{3}\right) u^2$

### Ejercicio 30.-



Las dos curvas se cortan en

$$x = \frac{\pi}{4}.$$

Por tanto, nuestros límites de

integración son  $0$  y  $\frac{\pi}{4}$ .

Buscamos la función diferencia:

$$y = \cos x - \sin x$$

Su primitiva es:

$$G(x) = \sin x + \cos x$$

$$G(0) = 1$$

$$G\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

$$G\left(\frac{\pi}{4}\right) - G(0) = \sqrt{2} - 1$$

El área buscada es  $(\sqrt{2} - 1) u^2$ .

### Ejercicio 31.-

Sabiendo que el área de la región comprendida entre la curva  $y = x^2$  y la recta  $y = bx$  es igual a  $\frac{9}{2}$ , calcula el valor de  $b$ .

La curva  $y = x^2$  y la recta  $y = bx$  se cortan en el punto de abscisa  $x = b$  y en  $x = 0$ .

Así, nuestros límites de integración son  $0$  y  $b$ .

La función diferencia es:

$$y = bx - x^2$$

Su primitiva es:

$$G(x) = \frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

$$G(0) = 0$$

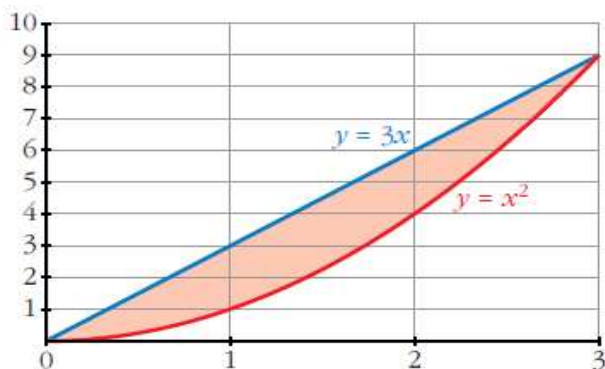
$$G(b) = \frac{b^3}{6}$$

$$G(b) - G(0) = \frac{b^3}{6}$$

Como el área es  $\frac{9}{2}$ , se tiene que:

$$\frac{b^3}{6} = \frac{9}{2},$$

de donde obtenemos que  $b = 3$ .



### Ejercicio 32.-

Calcula el valor de  $a$  para que el área de la región limitada por la curva  $y = -x^2 + ax$  y el eje  $X$  sea igual a 36.

La curva corta al eje  $X$  en los puntos de abscisa 0 y  $a$  (estos son los límites de integración).

Su primitiva es:

$$G(x) = \frac{-x^3}{3} + \frac{ax^2}{2}$$

$$G(0) = 0$$

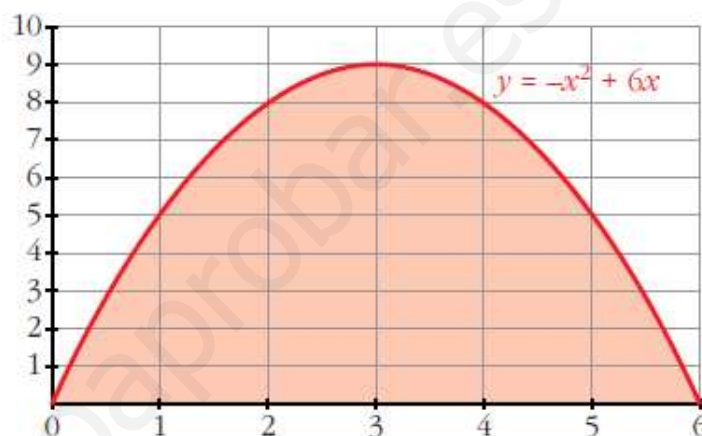
$$G(a) = \frac{a^3}{6}$$

$$G(a) - G(0) = \frac{a^3}{6}$$

Como el área es 36, se tiene que:

$$\frac{a^3}{6} = 36,$$

de donde averiguamos que  $a = 6$ .



### Ejercicio 33.-

Dada la función  $y = \frac{2}{x+1}$ , calcula el valor de  $a$  para que el área limitada por esa curva y las rectas  $x = 0$  y  $x = a$  sea igual a 2.

Buscamos su primitiva:

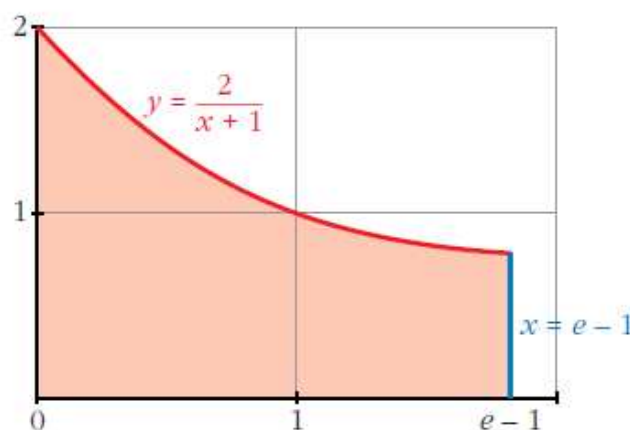
$$G(x) = 2 \cdot \ln(x+1)$$

$$G(0) = 0$$

$$G(a) = 2 \cdot \ln(a+1)$$

$$G(a) - G(0) = 2 \cdot \ln(a+1)$$

Como el área es igual a 2, se tiene que:  $2 \cdot \ln(a+1) = 2$ , de donde averiguamos que  $a = e - 1$ .



### Ejercicio 34.-

Considera la región del plano que determinan las curvas  $y = e^x$  e  $y = e^{2x}$  y la recta  $x = k$ .

a) Halla su área para  $k = 1$ .

b) Determina el valor de  $k > 0$  para que el área sea 2.

a) Si  $k = 1$ , nuestros límites de integración son 0 y 1.

Hallamos la función diferencia:  $y = e^{2x} - e^x$

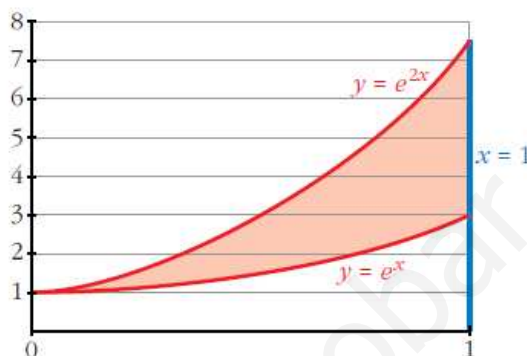
Su primitiva es:

$$G(x) = \frac{e^{2x}}{2} - e^x$$

$$G(0) = \frac{-1}{2}, \quad G(1) = \frac{e^2}{2} - e$$

$$G(1) - G(0) = \frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}$$

El área buscada es  $\left(\frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}\right) u^2$ .



b) Ahora nuestros límites de integración son 0 y  $k$ . Como la función diferencia y su primitiva son las mismas que en el apartado a), se tiene que:

$$G(0) = \frac{-1}{2}$$

$$G(k) = \frac{e^{2k}}{2} - e^k$$

$$G(k) - G(0) = \frac{e^{2k}}{2} - e^k + \frac{1}{2}$$

Como el área es 2, se tiene que:  $\frac{e^{2k}}{2} - e^k + \frac{1}{2} = 2$

Resolviendo la ecuación, averiguamos que  $k = \ln(3)$ .

### Ejercicio 35.-

Dadas  $y = -x^2 + 1$  y la recta  $y = a$ ,  $a < 0$ , determina el valor de  $a$  de modo que el área entre la curva y la recta sea  $\frac{8\sqrt{2}}{3} u^2$ .

La curva y la recta se cortan en los puntos de abscisa  $x = -\sqrt{1-a}$  y  $x = \sqrt{1-a}$ .

La función diferencia es:  $y = -x^2 + 1 - a$



Su primitiva es:

$$G(x) = \frac{-x^3}{3} + x - ax$$

$$G(-\sqrt{1-a}) = \frac{(\sqrt{1-a})^3}{3} - \sqrt{1-a} + a \cdot \sqrt{1-a}$$

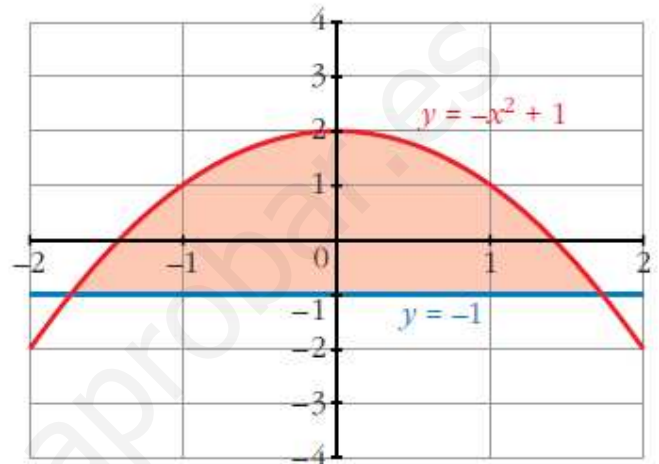
$$G(\sqrt{1-a}) = -\frac{(\sqrt{1-a})^3}{3} + \sqrt{1-a} - a \cdot \sqrt{1-a}$$

$$G(\sqrt{1-a}) - G(-\sqrt{1-a}) = \frac{4}{3}(1-a) \cdot \sqrt{1-a}$$

Como el área es  $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ , igualamos:

$$\frac{4}{3}(1-a) \cdot \sqrt{1-a} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

Resolviendo la ecuación, obtenemos que  $a = -1$ .



### Ejercicio 36.-

Sea  $F(x) = \int_1^x \cos^2 t \, dt$ . Halla los posibles extremos de dicha función en el intervalo  $[0, 2\pi]$ .

Como  $f(x) = \cos^2 x$  es continua en  $[0, 2\pi]$ , podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo, y así obtenemos la primera derivada de la función  $F(x)$ :

$$F'(x) = \cos^2 x$$

Esta tiene sus extremos en los valores de  $x$  en que  $F'(x) = 0$ , esto es en  $x = \frac{\pi}{2}$  y  $x = \frac{3\pi}{2}$ .