Ecuaciones y sistemas de ecuaciones trigonométricas

Juan José Isach Mayo

7/01/2007

Contents

Part I
Ecuaciones y sistemas ecuaciones trigonométricas

1 Ecuaciones trigonométricas

Para resolver las ecuaciones trigonométricas no existen procedimientos específicos. A veces tendremos que:

a) Factorizar utilizando adecuadamente las fórmulas que conocemos.

Veamos algunos ejemplos:

b) Intentar que en la ecuación trigonométrica , tan solo aparezca una sola razón trigonométrica del mismo ángulo

c) Aislar una razón trigonométrica y elevar al cuadrado. Cuando utilicemos este procedimiento; es conveniente comprobar las soluciones (alguna puede que no lo sea).

d) Combinando los procedimientos explicados con anterioridad etc,etc,etc...

1.1 Ejemplos de ecuaciones trigonométricas

Ejemplo 1 *Resuelve la ecuación* $2\sin x\cos x = \sin x$

$$2\sin x\cos x = \sin x$$
$$2\sin x\cos x - \sin x = 0$$
$$\sin x(2\cos x - 1) = 0$$

$$\left\{\begin{array}{c} \sin x = 0 \to x = \left\{\begin{array}{l} 2k\pi \\ \\ \pi + 2k\pi \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z} \\ 2\cos x - 1 = 0 \to \cos x = \dfrac{1}{2} \to x = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \\ \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Ejemplo 2 *Resuelve la ecuación* $\cos 3x + \cos x = \cos 2x$

Para resolver esta ecuación utilizaremos la fórmula:

$$\cos C + \cos D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

para transformar $\cos 3x + \cos x$ en forma de producto.
Fíjate que:

$$\cos 3x + \cos x = 2\cos 2x\cos x$$

Así pues ; resolver la ecuación $\cos 3x + \cos x = \cos 2x$ es lo mismo que resolver la ecuación:

$$2\cos 2x\cos x = \cos 2x$$
$$2\cos 2x\cos x - \cos 2x = 0$$
$$\cos 2x(2\cos x - 1) = 0$$

$$\cos 2x = 0 \to 2x = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \\ \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right. \to x = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ \\ \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2\cos x - 1 = 0 \to \cos x = \frac{1}{2} \to x = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}$$

El conjunto solución de esta ecuación trigonométrica es :

$$S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Observación 3 *Vamos a resolver esta ecuación de otra manera. Para ello; vamos a escribir* $\cos 3x$ *en función sólo del* $\cos x$ *y* $\cos 2x$ *en función del* $\cos x$

$$\begin{aligned}
\cos 3x &= \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \\
&= (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x - 2\sin x \cos x \sin x = \\
&= \cos^3 x - \sin^2 x \cos x - 2\sin^2 x \cos x = \\
&= \cos^3 x - 3\sin^2 x \cos x = \cos^3 x - 3(1-\cos^2 x)\cos x = \\
&= \cos^3 x - 3\cos x + 3\cos^3 x = \\
&= 4\cos^3 x - 3\cos x
\end{aligned}$$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x\text{-}\sin^2 x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$

Como $\left\{\begin{array}{c} \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \\ y \\ \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \end{array}\right\}$ entonces resolver la ecuación

$$\cos 3x + \cos x = \cos 2x$$

Es equivalente a resolver la ecuación

$$\begin{aligned}
\cos 3x + \cos x &= \cos 2x \\
4\cos^3 x - 3\cos x + \cos x &= 2\cos^2 x - 1 \\
4\cos^3 x - 2\cos^2 x - 2\cos x + 1 &= 0
\end{aligned}$$

Si llamamos a $\cos x = X$. Tendremos que resolver la ecuación:

$$4X^3 - 2X^2 - 2X + 1 = 0$$

Para ello; factorizamos aplicando la regla de Rufinni

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 4 & -2 & -2 & 1 \\
\frac{1}{2} & & 2 & 0 & -1 \\
\hline
 & 4 & 0 & -2 & \boxed{0}
\end{array}$$

$$\left(X - \frac{1}{2}\right)\left(4X^2 - 2\right) = 0 \to \left\{\begin{array}{c} X - \frac{1}{2} = 0 \to X = \frac{1}{2} \\ 4X^2 - 2 = 0 \to X = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Deshaciendo el cambio de variable, el problema ha quedado reducido a resolver las tres ecuaciones trigonométricas siguientes:

1. $\cos x = \dfrac{1}{2} \rightarrow x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \\ \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

2. $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \\ \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

3. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = \begin{cases} \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \\ \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

Puedes comprobar que el conjunto $\left\{\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi, \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi, \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}\right\}$ coincide con el conjunto siguiente$\left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}\right\}$

Con lo que; el conjunto solución de la ecuación trigonométrica es:

$$S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Las soluciones en $[0, 2\pi)$ son :

$$\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

Ejemplo 4 *Resuelve* $\cos^2 x + 2\sin x = 2$

Tendremos que expresar el $\cos^2 x$ en función del $\sin x$. Para ello; utilizamos la fórmula fundamental de trigonometría ($\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$). Con lo que :

$$\begin{aligned} \cos^2 x + 2\sin x &= 2 \\ 1 - \sin^2 x + 2\sin x &= 2 \\ -\sin^2 x + 2\sin x - 1 &= 0 \\ \sin^2 x - 2\sin x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

La ecuación obtenida, es una ecuación de segundo grado cuya incógnita a determinar es $\sin x$.

$$\sin x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo 5 *Resolver la ecuación* $-\dfrac{1}{2} + \cos^2 x + \cos^2 \dfrac{x}{2} = 0$

Sabemos que $\cos^2 \dfrac{A}{2} = \dfrac{1+\cos A}{2} \rightarrow \cos^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1+\cos x}{2}$

Por lo tanto, resolver la ecuación $-\dfrac{1}{2} + \cos^2 x + \cos^2 \dfrac{x}{2} = 0$ es lo mismo que resolver:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} + \cos^2 x + \frac{1+\cos x}{2} &= 0 \\ 2\cos^2 x + \cos x &= 0 \end{aligned}$$

Factorizando; tendremos:

$$\cos x\,(2\cos x + 1) = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos x = 0 \rightarrow x = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \\ \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{array} \right. \text{con } k \in \mathbb{Z} \\ \\ \cos x = \dfrac{-1}{2} \rightarrow x = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \\ \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right. \text{con } k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

La solución es el conjunto

$$S = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{con } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

que coincide con éste:

$$S = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{con } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Observación 6 *También se puede resolver la ecuación* $-\dfrac{1}{2} + \cos^2 x + \cos^2 \dfrac{x}{2} = 0$ *si expresamos el* $\cos^2 x$ *en función del* $\cos \dfrac{x}{2}$

Como $\cos x = \cos\left(2\dfrac{x}{2}\right) = \cos^2 \dfrac{x}{2} - \sin^2 \dfrac{x}{2} = 2\cos^2 \dfrac{x}{2} - 1$
entonces:

$$\cos^2 x = \left(2\cos^2 \frac{x}{2} - 1\right)^2 = 4\cos^4 \frac{x}{2} - 4\cos^2 \frac{x}{2} + 1$$

Resolver $-\dfrac{1}{2} + \cos^2 x + \cos^2 \dfrac{x}{2} = 0$ es lo mismo que resolver:

$$-\frac{1}{2} + 4\cos^4\left(\frac{x}{2}\right) - 4\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1 + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$
$$8\cos^4\left(\frac{x}{2}\right) - 6\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1 = 0$$

Si llamamos a $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = T$ tendremos que resolver la ecuación bicuadrada siguiente:

$$8T^4 - 6T^2 + 1 = 0 \rightarrow T = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio de variable; el problema queda reducido a resolver las ecuaciones trigonométricas elementales:

1. $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \rightarrow \dfrac{x}{2} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \\ \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z}$

   Multiplicando por 2

   $x = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{3} + 4k\pi \\ \\ \dfrac{10\pi}{3} + 4k\pi \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z}$

2. $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{2} \rightarrow \dfrac{x}{2} = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \\ \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z}$

   Multiplicando por 2

   $x = \begin{cases} \dfrac{4\pi}{3} + 4k\pi \\ \\ \dfrac{8\pi}{3} + 4k\pi \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z}$

   Las soluciones de las ecuaciones 1 y 2 se pueden expresar conjuntamente asÍ:

   $x = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \\ \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z}$

3. $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \dfrac{x}{2} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \\ \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z}$

   Multiplicando por 2

   $x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} + 4k\pi \\ \\ \dfrac{7\pi}{2} + 4k\pi \end{cases}$

4. $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \frac{x}{2} = \begin{cases} \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \\ \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z}$

Multiplicando por 2

$$x = \begin{cases} \dfrac{3\pi}{2} + 4k\pi \\ \\ \dfrac{5\pi}{2} + 4k\pi \end{cases}$$

Las soluciones de las ecuaciones3 y 4se pueden agrupar así:

$$\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Por lo tanto; la solución de la ecuación inicial es el conjuntoo:

$$S = \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Ejemplo 7 *Resolver la ecuación* $\sin x + \cos x = 1$

Aislamos el $\sin x$

$$\sin x = 1 - \cos x$$

Elevamos los dos miembros de la ecuación al cuadrado

$$\sin^2 x = 1 - 2\cos x + \cos^2 x$$

Utilizamos la F.F.T para expresar el $\sin^2 x$ en función del $\cos^2 x$.Como $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$; entonces:

$$\begin{aligned} 1 - \cos^2 x &= 1 - 2\cos x + \cos^2 x \\ 2\cos^2 x - 2\cos x &= 0 \\ \cos x(\cos x - 1) &= 0 \rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ \cos x = 1 \rightarrow x = 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

Comprobemos ahora si los valores $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 0$ son soluciones de la ecuación

Para $x = \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} = 0 + 1 = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ si que es solución

Para $x = \frac{3\pi}{2} \rightarrow \cos\frac{3\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{2} = 0 - 1 = -1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ no es solución

Para $x = 0 \rightarrow \cos 0 + \sin 0 = 1 + 0 = 1 \rightarrow x = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ si que es solución

El conjunto solución de la ecuación es :

$$\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Observación 8 *Vamos a resolver esta ecuación de otra manera*

Como $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ entonces:

$$\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin x + \sin(\frac{\pi}{2} - x) = 1$$

Si utilizamos la fórmula $\sin C + \sin D = 2 \sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$

La ecuación nos quedará así:

$$\begin{aligned} 2\sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2}\right)\cos\left(\frac{x - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2}\right) &= 1 \\ 2\sin\frac{\pi}{4}\cos(x + \frac{\pi}{4}) &= 1 \end{aligned}$$

Como $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;entonces:

$$\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x - \frac{\pi}{4} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \\ \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Aislando x

$$x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \\ 2\pi + 2k\pi = 2\pi(k+1) = 2\pi k' \end{cases} \quad \text{con } k, k' \in \mathbb{Z}$$

Observación 9 *Resuelve tú la ecuación* $\sin x + \cos x = 1$ *considerando que* $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ *y que* $\cos C + \cos D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$.

Ejemplo 10 *Resuelve la ecuación* $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$

Aislamos el $\cos x$

$$\cos x = 1 - \sqrt{3}\sin x$$

Elevando al cuadrado:

$$\cos^2 x = 1 - 2\sqrt{3}\sin x + 3\sin^2 x$$

Utilizamos la F.F.T para expresar el $\cos^2 x$ en función del $\sin^2 x$.Como $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$; entonces:

$$\begin{aligned} 1 - \sin^2 x &= 1 - 2\sqrt{3}\sin x + 3\sin^2 x \\ 4\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x &= 0 \\ 2\sin x(2\sin x - \sqrt{3}) &= 0 \rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \rightarrow x = \begin{cases} 2k\pi \\ \pi + 2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \\ \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

Comprobemos ahora si los valores $0, \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$, son soluciones de la ecuación

Para $x = 0 \to \sqrt{3}\sin 0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1 \to x = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ si que es solución

Para $x = \pi \to \sqrt{3}\sin \pi + \cos \pi = 0 - 1 = -1 \to x = \pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ no es solución

Para $x = \frac{\pi}{3} \to \sqrt{3}\sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \to x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ no es solución

Para $x = \frac{2\pi}{3} \to \sqrt{3}\sin \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \to x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ si que es solución

El conjunto solución de la ecuación es :

$$\left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Observación 11 $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$.

Divido la ecuación por 2$\to \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}$

Como $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$ y $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$ entonces la ecuación queda así:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x &= \frac{1}{2} \\
\sin x \cos\frac{\pi}{6} + \cos x \sin\frac{\pi}{6} &= \frac{1}{2} \\
\sin(x + \frac{\pi}{6}) &= \frac{1}{2} \to x + \frac{\pi}{6} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array} \right. \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Aislando x

$$x = \left\{ \begin{array}{c} 2k\pi \\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right. \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Fíjate bien; que este procedimiento es más corto que el anterior

Ejemplo 12 *Resuelve* $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 0$

Sugerencia : Determina los ángulos tales que $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

1.2 Ejercicios ecuaciones trigonométricas

Ejercicio 13 *Resuelve* $4\sin(x-\frac{\pi}{6})\cos(x-\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}$

$$4\sin(x-\frac{\pi}{6})\cos(x-\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}\rightarrow 2{\cdot}2\sin(x-\frac{\pi}{6})\cos(x-\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}$$
$$2\sin(x-\frac{\pi}{6})\cos(x-\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como $2\sin A{\cdot}\cos A=\sin 2A$ entonces la ecuación se reduce a:

$$\begin{aligned}\sin(2x-\frac{\pi}{3}) &= \frac{\sqrt{3}}{2}\\ 2x-\frac{\pi}{3} &= \begin{cases}\frac{\pi}{3}+2k\pi\\ \frac{2\pi}{3}+2k\pi\end{cases} \quad \text{con } k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

Aislando x, tendremos:

$$x=\begin{cases}\frac{\pi}{3}+k\pi\\ \frac{\pi}{2}+k\pi\end{cases} \quad \text{con } k\in\mathbb{Z}$$

Ejercicio 14 $4\sin\left(\frac{x}{2}\right)+2\cos x=3$

Fíjate que $\cos x=\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)=1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)-$. Por lo tanto; la ecuación quedará así:

$$\begin{aligned}4\sin\left(\frac{x}{2}\right)+2\left[1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right] &= 3\\ -4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+4\sin\left(\frac{x}{2}\right)-1 &= 0\\ 4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)-4\sin\left(\frac{x}{2}\right)+1 &= 0\end{aligned}$$

El, problema queda reducido a resolver una ecuación de segundo grado $\left(\text{cuya incógnita es} \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$. con lo que:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{4\pm\sqrt{16-16}}{8}=\frac{1}{2}\\ \frac{x}{2} &= \begin{cases}\frac{\pi}{6}+2k\pi\\ \frac{5\pi}{6}+2k\pi\end{cases} \quad \text{con } k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

Aislando x
$$x=\begin{cases}\dfrac{\pi}{3}+4k\pi\\ \dfrac{5\pi}{3}+4k\pi\end{cases}\text{ con } k\in\mathbb{Z}$$

Ejercicio 15 *Resuelve* $\sin 2x=\cos 120^o$
$$\sin 2x=\cos 120^o\rightarrow \sin 2x=-\frac{1}{2}$$
$$2x=\begin{cases}\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi\\ \dfrac{11\pi}{6}+2k\pi\end{cases}\text{ con } k\in\mathbb{Z}$$

Aislando x
$$x=\begin{cases}\dfrac{7\pi}{12}+k\pi\\ \dfrac{11\pi}{12}+k\pi\end{cases}\text{ con } k\in\mathbb{Z}$$

Ejercicio 16 *Resuelve* $\cot x+\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=-\sqrt{2}$

En primer lugar, vamos a transformar la expresión que queda a la derecha de la ecuación
$\cot x+\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=\dfrac{\cos x}{\sin x}+\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=\dfrac{\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}$
Como $\cos^2 x+\sin^2 x=1$, entonces:
$\cot x+\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=\dfrac{\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}=\dfrac{1+\cos x}{\sin x(1+\cos x)}=\dfrac{1}{\sin x}$
Así pues; la ecuación inicial quedará como:
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin x}&=-\sqrt{2}\rightarrow \sin x=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ x&=\begin{cases}\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi\\ \dfrac{7\pi}{4}+2k\pi\end{cases}\text{ con } k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

Ejercicio 17 *Resuelve tú la ecuación* $\tan x+\dfrac{\cos x}{1+\sin x}=-2$

Ejercicio 18 *Resuelve* $cos^2(x+\dfrac{\pi}{6})-\sin^2(x+\dfrac{\pi}{6})=1$

Como $\cos^2 A-\sin^2 A=\cos 2A$; la ecuación $\cos^2(x+\dfrac{\pi}{6})-\sin^2(x+\dfrac{\pi}{6})=1$ queda:
$$\begin{aligned}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)&=1\\ 2x+\frac{\pi}{3}&=2k\pi\\ x&=-\frac{\pi}{6}+k\pi\text{ con } k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

Como $-\dfrac{\pi}{6}+k\pi=-\pi+\dfrac{5\pi}{6}+k\pi=\dfrac{5\pi}{6}+(k-1)\pi=\dfrac{5\pi}{6}+k'\pi$ con $k'\in\mathbb{Z}$

Ejercicio 19 *Resuelve tú la ecuación cos*$^2(x-\dfrac{\pi}{6})-\sin^2(x-\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}$

Ejercicio 20 *Resuelve* $\cos 2x-\cos 6x=\sin 5x+\sin 3x$

$$\text{Como}\left\{\begin{array}{c}\cos C-\cos D=-2\sin\left(\dfrac{C+D}{2}\right)\sin\left(\dfrac{C-D}{2}\right)\\ y\\ \sin C+\sin D=2\sin\left(\dfrac{C+D}{2}\right)\cos\left(\dfrac{C-D}{2}\right)\end{array}\right\}$$

$$\text{entonces}\left\{\begin{array}{c}\cos 2x-\cos 6x=-2\sin(4x)\sin(-2x)=2\sin 4x\sin 2x\\ y\\ \sin 5x+\sin 3x=2\sin 4x\cos x\end{array}\right\}$$

Con lo que; la ecuación se transforma así:

$$\begin{aligned}2\sin 4x\sin 2x&=2\sin 4x\cos x\\ \sin 4x\sin 2x-\sin 4x\cos x&=0\end{aligned}$$

Sacando factor comun $\sin 4x$

$$\begin{aligned}\sin 4x(\sin 2x-\cos x)&=0\to\left\{\begin{array}{c}\sin 4x=0\\ \sin 2x-\cos x=0\end{array}\right.\\ 1^a\sin 4x&=0\to 4x=\left\{\begin{array}{c}2k\pi\\ \pi+2k\pi\end{array}\right.\to x=\left\{\begin{array}{c}\dfrac{k\pi}{2}\\ \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\end{array}\right.\quad\text{con } k\in\mathbb{Z}\\ 2^a\sin 2x-\cos x&=0\quad *\end{aligned}$$

Resolvamos ahora la ecuación * $\sin 2x-\cos x=0$
Teniendo presente que $\sin 2A=2\sin A\cos A$

$$\begin{aligned}\sin 2x-\cos x&=0\\ 2\sin x\cos x-\cos x&=0\\ \cos x(2\sin x-1)&=0\to\left\{\begin{array}{l}\cos x=0\to x=\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\\ \dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\end{array}\right.\quad\text{con } k\in\mathbb{Z}\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\to x=\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\\ \dfrac{5\pi}{6}+2k\pi\end{array}\right.\quad\text{con } k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\end{aligned}$$

Ejercicio 21 *Resuelve* $\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)=\sin x$

$\cos^2 A - \sin^2 A = \cos 2A \rightarrow \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left[2\left(\frac{x}{2}\right)\right] = \cos x$
Luego

$$\begin{aligned} \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) &= \sin x \\ \cos x &= \sin x \end{aligned}$$

Dividiendo por $\cos x$,y teniendo presente que la función $y = \tan x$ es una función periódica de periodo π

$$\tan x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Ejercicio 22 *Resuelve* $\cos 2x + \sin x = 4\sin^2 x$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A$

$$\begin{aligned} \cos 2x + \sin x &= 4\sin^2 x \\ 1 - 2\sin^2 x + \sin x &= 4\sin^2 x \\ 6\sin^2 x - \sin x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

El, problema queda reducido a resolver una ecuación de segundo grado (cuya incógnita es $\sin x$). con lo que:

$$\sin x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{12} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

El problema queda reducido a resolver las ecuaciones trigonométricas elementales:

1. $\sin x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z}$

2. $\sin x = -\frac{1}{3} \rightarrow x = \begin{cases} \pi - \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \\ 2\pi - \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z}$

Ejercicio 23 *Resuelve tú* $\sin 2x + 2\cos^2 x - 2 = 0$

Sugerencia $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ y $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$;

Ejercicio 24 *Resuelve* $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$

Sugerencia: Determina los ángulos tales que $\tan x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Ejercicio 25 *Resuelve* $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 0$

Sugerencia: Determina los ángulos tales que $\tan x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Ejercicio 26 *Resuelve* $8\tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = 1 + \sec x$

Como $\tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ y $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ entonces, la ecuación queda así:

$$\begin{aligned}
\frac{8(1-\cos x)}{1+\cos x} &= 1 + \frac{1}{\cos x} \\
\frac{8(1-\cos x)}{1+\cos x} &= \frac{1+\cos x}{\cos x} \\
8\cos x - 8\cos^2 x &= 1 + 2\cos x + \cos^2 x \\
0 &= 9\cos^2 x - 6\cos x + 1 \\
0 &= (3\cos x - 1)^2 \\
\cos x &= \frac{1}{3} \to x = \begin{cases} \arccos\left(\dfrac{1}{3}\right) + 2k\pi \\ 2\pi - \arccos\left(\dfrac{1}{3}\right) + 2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Ejercicio 27 *Resuelve* $\tan 2x = -\tan x$

Como $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$; entonces, la ecuación queda así:

$$\begin{aligned}
\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} &= -\tan x \\
2\tan x &= -\tan x + \tan^3 x \\
0 &= \tan^3 x - 3\tan x
\end{aligned}$$

Factorizando:

$$\tan x(\tan^2 x - 3) = 0 \to \begin{cases} \tan x = 0 \to x = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ \tan^2 x = 3 \to \begin{cases} \tan x = \sqrt{3} \to x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ \tan x = -\sqrt{3} \to x = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{cases}$$

Ejercicio 28 *Resuelve* $\sin 3x + \cos 3x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Transformemos en primer lugar la suma $\sin 3x + \cos 3x$ como producto
Para ello; utilizaremos que:

$$\begin{aligned}
\cos 3x &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \\
& \quad y \\
\sin C + \sin D &= 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)
\end{aligned}$$

Con lo que

$$\sin 3x + \cos 3x = \sin 3x + \sin(\frac{\pi}{2} - 3x)$$

$$\sin 3x + \sin(\frac{\pi}{2} - 3x) = 2\sin\left(\frac{3x + \frac{\pi}{2} - 3x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x - \frac{\pi}{2} + 3x}{2}\right)$$

Por lo tanto:

$$\sin 3x + \cos 3x = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Después de todo esto, la ecuación inicial $\sin 3x + \cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ queda:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) &= -\frac{1}{2} \to 3x - \frac{\pi}{4} = \begin{cases} \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Si aislamos$3x$

$$3x = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Aislando x; tendremos la solución

$$\begin{aligned} x &= \begin{cases} \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \\ \frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \\ x &= \begin{cases} \frac{11}{36}\pi + \frac{2k\pi}{3} \\ \frac{19}{36}\pi + \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Las soluciones de esta ecuación entre 0 y 2π son:

$$\begin{array}{l} \frac{11}{36}\pi, \frac{35}{36}\pi\left(\frac{11}{36}\pi + \frac{2\pi}{3}\right), \frac{59}{36}\pi\left(\frac{11}{36}\pi + \frac{4\pi}{3}\right) \\ \frac{19}{36}\pi, \frac{43}{36}\pi\left(\frac{19}{36}\pi + \frac{2\pi}{3}\right), \frac{67}{36}\pi\left(\frac{19}{36}\pi + \frac{4\pi}{3}\right) \end{array}$$

Observación 29 *Fíjate en como la resolvemos ahora*

$$\sin 3x + \cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Aislamos $\sin 3x$

$$\sin 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos 3x$$

Elevamos al cuadrado

$$\sin^2 3x = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos 3x\right)^2 \to \sin^2 3x = \cos^2 3x + \sqrt{2}\,\cos 3x + \frac{1}{2}$$

Expresamos el $\sin^2 3x$ en función del $\cos^2 3x$ utilizando la F.F.T

$$1 - \cos^2 3x = \cos^2 3x + \sqrt{2}\cos 3x + \frac{1}{2}$$

Transponiendo términos;obtenemos la siguiente ecuación de segundo grado:

$$2\cos^2 3x + \sqrt{2}\cos 3x - \frac{1}{2} = 0 \to 4\cos^2 3x + 2\sqrt{2}\cos 3x - 1 = 0$$

Resolviéndola:

$$\cos 3x = \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{24}}{8} = \begin{cases} \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2} \end{cases}$$

Si determinas los ángulos tales que su coseno vale $\frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$ verás que son $\frac{5}{12}\pi$, $\frac{19}{12}\pi\left(2\pi - \frac{5}{12}\pi\right)$ y analogamente los ángulos cuyo coseno vale $-\frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$ son :$\frac{11}{12}\pi$, $\frac{13}{12}\pi\left(\pi + \frac{1}{12}\pi\right)$.

Perdona; pero como no lo comprobarás. Te lo voy a calcular:

$$\cos\tfrac{5}{12}\pi = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \sqrt{2}\left(\tfrac{1}{4}\sqrt{3} - \tfrac{1}{4}\right)$$

$$\cos\tfrac{19}{12}\pi = \cos(2\pi - \tfrac{5}{12}\pi) = \cos\tfrac{5}{12}\pi = \sqrt{2}\left(\tfrac{1}{4}\sqrt{3} - \tfrac{1}{4}\right)$$

$$\cos\frac{11}{12}\pi = -\sin\frac{5\pi}{12} = -\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = -\sqrt{2}\left(\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{4}\right)$$

$$\cos\tfrac{13}{12}\pi = \cos\tfrac{11}{12}\pi = -\sqrt{2}\left(\tfrac{1}{4}\sqrt{3} + \tfrac{1}{4}\right)$$

Con lo que podemos afirmar con todo rigor; que el ángulo $3x$ valdrá:

$$3x = \begin{cases} \frac{5}{12}\pi + 2k\pi \\ \frac{19}{12}\pi + 2k\pi \\ \frac{11}{12}\pi + 2k\pi \\ \frac{13}{12}\pi + 2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Aislando x

$$x = \begin{cases} \frac{5}{36}\pi + \dfrac{2k\pi}{3} \\ \frac{19}{36}\pi + \dfrac{2k\pi}{3} \\ \frac{11}{36}\pi + \dfrac{2k\pi}{3} \\ \frac{13}{36}\pi + \dfrac{2k\pi}{3} \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Como has elevado al cuadrado, algunas de las soluciones obtenidas no verifican la ecuación.

Comprueba tú que los valores $\frac{5}{36}\pi, \frac{13}{36}\pi$ no son solución

Conclusión : las soluciones de la ecuación son

$$x = \begin{cases} \frac{11}{36}\pi + \dfrac{2k\pi}{3} \\ \frac{19}{36}\pi + \dfrac{2k\pi}{3} \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Ejercicio 30 *Resuelve la ecuación* $\sin 3x - 2\sin x = 0$

Fíjate en la siguiente transformación:

$$\sin 3x - \sin x = \sin x$$

Teniendo presente que $\sin(C) - \sin(D) = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$ tendremos $\sin 3x - \sin x = 2\cos\left(\frac{3x+x}{2}\right)\sin\left(\frac{3x-x}{2}\right) = 2\cos 2x \sin x$

Con lo que la ecuación nos queda así:

$$\begin{aligned} 2\cos 2x \sin x &= \sin x \\ 2\cos 2x \sin x - \sin x &= 0 \end{aligned}$$

Sacando factor común $\sin x$

$$\sin x(2\cos 2x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} 1^a \ \sin x = 0 \rightarrow x = \begin{cases} 2k\pi \\ \pi + 2k\pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ 2^a \ \cos 2x = \frac{1}{2} \rightarrow 2x = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$1^a \ \sin x = 0 \rightarrow x = \begin{cases} 2k\pi \\ \pi + 2k\pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$2^a \ \cos 2x = \frac{1}{2} \rightarrow 2x = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + k\pi \\ \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Las soluciones de la ecuación en $[0, 2\pi)$ son:

$$0, \pi, \tfrac{\pi}{6}, \tfrac{5\pi}{6}, \tfrac{7\pi}{6}\left(\tfrac{\pi}{6} + \pi\right), \tfrac{11\pi}{6}\left(\tfrac{5\pi}{6} + \pi\right)$$

Observación 31 *Vamos a resolver la misma ecuación; pero, expresando el* $\sin 3x$ *en función del* $\sin x$

$$\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x$$

Como $\left[\begin{array}{l} \sin 2x = 2\sin x \cos x \\ \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \end{array}\right]$ entonces:

$$\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 2\sin x \cos^2 x + (1 - 2\sin^2 x)\sin x$$

Sustiituyendo $\cos^2 x$ por $(1-\sin^2 x)$ F.F.T

$$\sin 3x = 2\sin x(1-\sin^2 x) + (1-2\sin^2 x)\sin x$$

Operando y reduciendo términos semejantes

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \tag{a}$$

Resolvamos ahora la ecuación

$$\sin 3x - 2\sin x = 0$$

Usando la expresión (a), la ecuación se transforma en:

$$3\sin x - 4\sin^3 x - 2\sin x = 0$$

Reduciendo términos semejantes

$$\sin x - 4\sin^3 x = 0$$

Factorizando la ecuación:

$$\sin x(1-4\sin^2 x) = 0 \to \left\{ \begin{array}{c} 1^a \ \sin x = 0 \\ 2^a \ 4\sin^2 x - 1 = 0 \end{array} \right.$$

$$1^a \sin x = 0 \to x = \left\{ \begin{array}{c} 2k\pi \\ \pi + 2k\pi \end{array} \right. \quad con\ k \in \mathbb{Z}$$

$$2^a \sin^2 x = \frac{1}{4} \to \left\{ \begin{array}{c} \sin x = \frac{1}{2} \to x = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array} \right. \\ \sin x = -\frac{1}{2} \to x = \left\{ \begin{array}{c} \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{array} \right. \end{array} \right. \quad con\ k \in \mathbb{Z}$$

Las soluciones de la 2^a ecuación se pueden agrupar así $x = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\pi}{6} + k\pi \\ \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{array} \right.$ con $k \in \mathbb{Z}$

Las soluciones de la ecuación en $[0, 2\pi)$ son:

$$0, \pi, \tfrac{\pi}{6}, \tfrac{5\pi}{6}, \tfrac{7\pi}{6} \left(\tfrac{\pi}{6} + \pi\right), \tfrac{11\pi}{6} \left(\tfrac{5\pi}{6} + \pi\right)$$

Ejercicio 32 *Resuelve la ecuación* $\cos x + \sqrt{3}\sin x = -\sqrt{2}$

Divido la ecuación por 2

$$\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $\left[\begin{array}{c} \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \\ y \\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} \end{array} \right]$ la ecuación queda:

$$\cos x \cos\frac{\pi}{3} + \sin x \sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $\cos A \cos B + \sin A \sin B = \cos(A - B)$

$$\cos(x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \to x - \frac{\pi}{3} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{array} \right. \text{ k} \in \mathbb{Z}$$

Aislando x

$$x = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{array} \right. \text{ k} \in \mathbb{Z} \to x = \left\{ \begin{array}{l} \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \\ \frac{19\pi}{12} + 2k\pi \end{array} \right.$$

Conclusión final : **Las soluciones de la ecuación entre 0 y 2π son** :

$$\frac{13\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}$$

Observación 33 *Vamos a resolver la misma ecuación con otro procedimiento*

Aislamos de la ecuación $\cos x$

$$\cos x = -\sqrt{2} - \sqrt{3} \sin x$$

Elevamos los dos miembros de la ecuación al cuadrado

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \left(-\sqrt{2} - \sqrt{3} \sin x\right)^2 \\ \cos^2 x &= 2 + 2\sqrt{6} \sin x + 3 \sin^2 x \end{aligned}$$

Sustiituyendo $\cos^2 x$ por $(1 - \sin^2 x)$ F.F.T

$$1 - \sin^2 x = 2 + 2\sqrt{6} \sin x + 3 \sin^2 x$$

Transponiendo términos, obteneemos una ecuación de segundo grado (la incógnita es $\sin x$)

$$0 = 4 \sin^2 x + 2\sqrt{6} \sin x + 1$$

Resolviéndola

$$\sin x = \frac{-2\sqrt{6} \pm 2\sqrt{2}}{8} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6} \end{array} \right. \quad \text{(b)}$$

El problema se reduce a resolver las ecuaciones elementales $\left\{ \begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \sin x = -\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6} \end{array} \right.$

Nota: Para poder conseguirlo, lee detenidamente estas notas enumeradas que vienen a continuación (Si tienes problemas al trabajar en radianes ,considera su equivalente en grados)

1^o Vamos a calcular el $\sin \frac{13\pi}{12}$ considerando que $\sin \frac{13\pi}{12} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) = -\sin \frac{\pi}{12}$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

Por lo tanto: $\sin\frac{13\pi}{12} = -\sin\frac{\pi}{12} = -\left(\frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6}$

2^o Vamos a calcular el $\sin\frac{23\pi}{12}$

Hemos de tener presente que $\sin\frac{23\pi}{12} = -\sin\frac{\pi}{12}$puesto que $\frac{23\pi}{12} = 2\pi - \frac{\pi}{12}$ y $\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{12}\right) = -\sin\frac{\pi}{12}$

Así pues:

$$\sin\frac{23\pi}{12} = -\sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6}$$

Conclusión 1ª: Los únicos ángulos entre $[0, 2\pi)$ *tales que* $\sin x = \frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6}$ son $\frac{13\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}$

3^o Vamos a calcular el $\sin\frac{17\pi}{12}$ considerando que $\sin\frac{17\pi}{12} = \sin\left(\pi + \frac{5\pi}{12}\right) = -\sin\frac{5\pi}{12}$

$$\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

Por lo tanto: $\sin\frac{17\pi}{12} = -\sin\frac{5\pi}{12} = -\left(\frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6}$

4^o Vamos a calcular el $\sin\frac{19\pi}{12}$

Hemos de tener presente que $\sin\frac{19\pi}{12} = -\sin\frac{5\pi}{12}$ puesto que $\frac{19\pi}{12} = 2\pi - \frac{5\pi}{12}$ y $\sin\left(2\pi - \frac{5\pi}{12}\right) = -\sin\frac{5\pi}{12}$

Así pues:

$$\sin\frac{19\pi}{12} = -\sin\frac{5\pi}{12} = -\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6}$$

Conclusión 2ª: Los únicos ángulos entre $[0, 2\pi)$ *tales que* $\sin x = -\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6}$ son $\frac{17\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}$

Utilizando las dos conclusiones anteriores podemos determinar las soluciones de la ecuaciones trigonométricas eleementales:

1. $\sin x = \frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6} \rightarrow x = \left\{\begin{array}{l} \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \\ \frac{23\pi}{12} + 2k\pi \end{array}\right.$ con $k \in \mathbb{Z}$ (por la 1^a concl.)
2. $\sin x = -\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6} \rightarrow x = \left\{\begin{array}{l} \frac{17\pi}{12} + 2k\pi \\ \frac{19\pi}{12} + 2k\pi \end{array}\right.$ con $k \in \mathbb{Z}$ (por la 2^a concl.)

Observación importante: Al elevar al cuadrado la ecuación, puede ocurrir que no todas las soluciones sean válidas. Comprueba tú que los ángulos $\frac{23\pi}{12}$ *y* $\frac{17\pi}{12}$ *no verifican la solución inicial*

Conclusión final : **Las soluciones de la ecuación entre 0 y 2π son** :

$$\frac{13\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}$$

Después de explicar todo este procedimiento, es evidente que este último procedimiento es muy complejo. Así que: querido alumno, evítalo en la medida de lo posible.

2 Sistemas de ecuaciones trigonométricas

2.1 Ejemplos de sistemas de ecuaciones trigonométricas

Ejemplo 34 *Resuelve el sistema* $\left\{\begin{array}{l} \sin(x-y)=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos(x+y)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$

De la 1^a ecuación deducimos que:

$$x-y=\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{4}+2k\pi \\ \dfrac{3\pi}{4}+2k\pi \end{array}\right. \quad \text{con } k\in\mathbb{Z}$$

De la 2^a ecuación deducimos que:

$$x+y=\left\{\begin{array}{l} \dfrac{3\pi}{4}+2k'\pi \\ \dfrac{5\pi}{4}+2k'\pi \end{array}\right. \quad \text{con } k'\in\mathbb{Z}$$

Combinándolas, el sistema queda reducido a resolver los cuatro sistemas de ecuaciones lineales siguientes:

$$\text{Primer sistema}\left\{\begin{array}{l} x-y=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi \\ x+y=\dfrac{3\pi}{4}+2k'\pi \end{array}\right. \quad \text{con } k \text{ y } k' \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Segundo sistema}\left\{\begin{array}{l} x-y=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi \\ x+y=\dfrac{5\pi}{4}+2k'\pi \end{array}\right. \quad \text{con } k \text{ y } k' \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Tercer sistema}\left\{\begin{array}{l} x-y=\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi \\ x+y=\dfrac{3\pi}{4}+2k'\pi \end{array}\right. \quad \text{con } k \text{ y } k' \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Cuarto sistema}\left\{\begin{array}{l} x-y=\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi \\ x+y=\dfrac{5\pi}{4}+2k'\pi \end{array}\right. \quad \text{con } k \text{ y } k' \in \mathbb{Z}$$

Resolvámoslos:

1. $\left\{\begin{array}{l} x-y=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi \\ x+y=\dfrac{3\pi}{4}+2k'\pi \end{array}\right. \quad \text{con } k \text{ y } k' \in \mathbb{Z}$

   Sumando ambas ecuaciones obtenemos$\rightarrow 2x=\pi+2(k+k')\pi$

   Aislando $x\rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+(k+k')\pi$

   Si llamamos a $k+k'=k''\rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k''\pi$

Restando la segunda ecuación de la primera obtenemos
$2y = \frac{\pi}{2} + 2(k - k')\pi$
Aislando $y \rightarrow y = \frac{\pi}{4} + (k - k')\pi$
Si llamamos a $k - k' = k''' \rightarrow y = \frac{\pi}{4} + k'''' \pi$
Las soluciones del sistema son los siguientes puntos del plano
$S = \left\{ (\frac{\pi}{2} + k''\pi, \frac{\pi}{4} + k'''\pi) \text{ con } k'' \text{ y } k''' \text{ enteros} \right\}$
Si $k'' = 0$ y $k''' = 0 \rightarrow (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$
Si $k'' = 0$ y $k''' = 1 \rightarrow (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + \pi) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$
Si $k'' = 1$ y $k''' = 0 \rightarrow (\frac{\pi}{2} + \pi, \frac{\pi}{4}) = \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$
Si $k'' = 1$ y $k''' = 1 \rightarrow (\frac{\pi}{2} + \pi, \frac{\pi}{4} + \pi) = \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$ etc, etc....
Estos son los puntos del plano; cuyos valores de x e y están comprendidos entre 0 y 2π

2. $\left\{ \begin{array}{l} x - y = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x + y = \frac{5\pi}{4} + 2k'\pi \end{array} \right.$ con k y $k' \in \mathbb{Z}$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos$\rightarrow 2x = \frac{3\pi}{2} + 2(k + k')\pi$
Aislando $x \rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + (k + k')\pi$
Si denominamos al entero $k + k'$ como el entero $k'' \rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k''\pi$
Restando la segunda ecuación de la primera obtenemos
$2y = \pi + 2(k - k')\pi$
Aislando $y \rightarrow y = \frac{\pi}{2} + (k - k')\pi$
Si llamamos a $k - k' = k''' \rightarrow y = \frac{\pi}{2} + k'''' \pi$
Las soluciones del sistema son los siguientes puntos del plano
$S = \left\{ (\frac{3\pi}{4} + k''\pi, \frac{\pi}{2} + k'''\pi) \text{ con } k'' \text{ y } k''' \text{ enteros} \right\}$
Si $k'' = 0$ y $k''' = 0 \rightarrow (\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$
Si $k'' = 0$ y $k''' = 1 \rightarrow (\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2} + \pi) = \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$
Si $k'' = 1$ y $k''' = 0 \rightarrow (\frac{3\pi}{4} + \pi, \frac{\pi}{2}) = \left(\frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$
Si $k'' = 1$ y $k''' = 1 \rightarrow (\frac{3\pi}{4} + \pi, \frac{\pi}{2} + \pi) = \left(\frac{7\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$ etc, etc....
Estos son los puntos del plano; cuyos valores de x e y están comprendidos entre 0 y 2π

3. $\left\{ \begin{array}{l} x - y = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ x + y = \dfrac{3\pi}{4} + 2k'\pi \end{array} \right.$ con k y $k' \in \mathbb{Z}$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos$\rightarrow 2x = \dfrac{3\pi}{2} + 2(k+k')\pi$

Aislando $x \rightarrow x = \dfrac{3\pi}{4} + (k+k')\pi$

Si llamamos a $k + k' = k'' \rightarrow x = \dfrac{3\pi}{4} + k''\pi$

Restando la segunda ecuación de la primera obtenemos

$2y = 0 + 2(k-k')\pi$

Aislando $y \rightarrow y = (k-k')\pi$

Si llamamos a $k - k' = k''' \rightarrow y = k'''{}'\pi$

Las soluciones del sistema son los siguientes puntos del plano

$S = \left\{ (\dfrac{3\pi}{4} + k''\pi, k'''\pi) \text{ con } k'' \text{ y } k''' \text{ enteros} \right\}$

Si $k'' = 0$ y $k''' = 0 \rightarrow (\dfrac{3\pi}{4}, 0)$

Si $k'' = 0$ y $k''' = 1 \rightarrow (\dfrac{3\pi}{4}, \pi) = \left(\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right)$

Si $k'' = 1$ y $k''' = 0 \rightarrow (\dfrac{3\pi}{4} + \pi, 0) = \left(\dfrac{7\pi}{4}, 0\right)$

Si $k'' = 1$ y $k''' = 1 \rightarrow (\dfrac{3\pi}{4} + \pi, \pi) = \left(\dfrac{7\pi}{4}, \pi\right)$ etc, etc....

Estos son los puntos del plano; cuyos valores de x e y están comprendidos entre 0 y 2π

4. $\left\{ \begin{array}{l} x - y = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ x + y = \dfrac{5\pi}{4} + 2k'\pi \end{array} \right.$ con k y $k' \in \mathbb{Z}$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos$\rightarrow 2x = 2\pi + 2(k+k')\pi$

Aislando $x \rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + (k+k')\pi$

Si llamamos a $k + k' = k'' \rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k''\pi$

Restando la segunda ecuación de la primera obtenemos

$2y = \dfrac{\pi}{2} + 2(k-k')\pi$

Aislando $y \rightarrow y = \dfrac{\pi}{4} + (k-k')\pi$

Si llamamos a $k - k' = k''' \rightarrow y = k'''{}'\pi$

Las soluciones del sistema son los siguientes puntos del plano

$S = \left\{ (\dfrac{\pi}{2} + k''\pi, \dfrac{\pi}{4} + k'''\pi) \text{ con } k'' \text{ y } k''' \text{ enteros} \right\}$

Si $k'' = 0$ y $k''' = 0 \rightarrow (\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4})$

Si $k'' = 0$ y $k''' = 1 \rightarrow (\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4} + \pi) = \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{4}\right)$

Si $k''=1$ y $k'''=0 \to (\frac{\pi}{2}+\pi, \frac{\pi}{4}) = \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$
Si $k''=1$ y $k'''=1 \to (\frac{\pi}{2}+\pi, \frac{\pi}{4}+\pi) = \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$ etc, etc....
Estos son los puntos del plano; cuyos valores de x e y están comprendidos entre 0 y 2π

Ejemplo 35 *Resuelve el sistema* $\left\{\begin{array}{c} \sin x \cos y = -\dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ \cos x \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{array}\right.$

Sumando ambas ecuaciones tendremos:

$$\sin x \cos y + \cos x \sin y = 0$$

Como $\sin(A+B)$=$\sin A \cos B + \cos A \sin B$ la ecuación anterior queda reducida a:

$$\sin(x+y) = 0$$

Lo que nos permite afirmar que

$$x+y = \left\{\begin{array}{c} 2k\pi \\ \pi + 2k\pi \end{array}\right. \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

Restando ambas ecuaciones tendremos:

$$\sin x \cos y - \cos x \sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como $\sin(A-B)$=$\sin A \cos B - \cos A \sin B$ la ecuación anterior queda reducida a:

$$\sin(x-y) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Lo que nos permite afirmar que

$$x-y = \left\{\begin{array}{c} \dfrac{4\pi}{3} + 2k'\pi \\ \dfrac{5\pi}{3} + 2k'\pi \end{array}\right. \quad \text{con } k' \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

De las relaciones (1) y (2) anteriores; podemos concluir que el sistema inicial es equivalente a resolver los cuatro sistemas de ecuaciones lineales siguientes:

$$\text{Primer sistema} \begin{cases} x+y=2k\pi \\ x-y=\dfrac{4\pi}{3}+2k'\pi \end{cases} \text{con } k \text{ y } k' \quad \in \quad \mathbb{Z}$$

$$\text{Segundo sistema} \begin{cases} x+y=2k\pi \\ x-y=\dfrac{5\pi}{3}+2k'\pi \end{cases} \text{con } k \text{ y } k' \quad \in \quad \mathbb{Z}$$

$$\text{Tercer sistema} \begin{cases} x+y=\pi+2k\pi \\ x-y=\dfrac{4\pi}{3}+2k'\pi \end{cases} \text{con } k \text{ y } k' \quad \in \quad \mathbb{Z}$$

$$\text{Cuarto sistema} \begin{cases} x+y=\pi+2k\pi \\ x-y=\dfrac{5\pi}{3}+2k'\pi \end{cases} \text{con } k \text{ y } k' \quad \in \quad \mathbb{Z}$$

Resolvámoslos:

1. $\begin{cases} x+y=2k\pi \\ x-y=\dfrac{4\pi}{3}+2k'\pi \end{cases}$ con k y $k' \in \mathbb{Z}$

   Sumando ambas ecuaciones obtenemos$\rightarrow 2x=\dfrac{4\pi}{3}+2(k+k')\pi$

   Aislando $x \rightarrow x=\dfrac{2\pi}{3}+(k+k')\pi$

   Si llamamos a $k+k'=k'' \rightarrow x=\dfrac{2\pi}{3}+k''\pi$

   Restando la primera ecuación de la segunda obtenemos

   $2y=-\dfrac{4\pi}{3}+2(k-k')\pi$

   Aislando $y \rightarrow y=-\dfrac{2\pi}{3}+(k-k')\pi$

   Como $-\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{4\pi}{3}-2\pi$ entonces:

   $y=\dfrac{4\pi}{3}-2\pi+(k-k')\pi=\dfrac{4\pi}{3}+(k-k'-2)\pi$

   Si llamamos a $k-k'-2=k''' \rightarrow y=\dfrac{11\pi}{6}+k''''\pi$

   Las soluciones del sistema son los siguientes puntos del plano

   $S=\left\{(\dfrac{2\pi}{3}+k''\pi, \dfrac{4\pi}{3}+k'''\pi) \text{ con } k'' \text{ y } k''' \text{ enteros}\right\}$

   Si $k''=0$ y $k'''=0 \rightarrow (\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3})$

   Si $k''=0$ y $k'''=-1 \rightarrow (\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}-\pi)=\left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$

   Si $k''=1$ y $k'''=0 \rightarrow (\dfrac{2\pi}{3}+\pi, \dfrac{4\pi}{3})=\left(\dfrac{5\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right)$

   Si $k''=1$ y $k'''=-1 \rightarrow (\dfrac{2\pi}{3}+\pi, \dfrac{4\pi}{3}-\pi)=\left(\dfrac{5\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$ etc, etc....

   Estos son los puntos del plano; cuyos valores de x e y están comprendidos entre 0 y 2π

2. $\begin{cases} x+y=2k\pi \\ x-y=\dfrac{5\pi}{3}+2k'\pi \end{cases}$ con k y $k' \in \mathbb{Z}$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos$\rightarrow 2x=\dfrac{5\pi}{3}+2(k+k')\pi$

Aislando $x \rightarrow x=\dfrac{5\pi}{6}+(k+k')\pi$

Si denominamos al entero $k+k'$ como el entero $k'' \rightarrow x=\dfrac{5\pi}{6}+k''\pi$

Restando la primera ecuación de la segunda obtenemos

$2y=-\dfrac{5\pi}{3}+2(k-k')\pi$

Aislando $y \rightarrow y=-\dfrac{5\pi}{6}+(k-k')\pi$

Como $-\dfrac{5\pi}{6}=\dfrac{7\pi}{6}-2\pi$ entonces:

$y=\dfrac{7\pi}{6}-2\pi+(k-k')\pi=\dfrac{7\pi}{6}+(k-k'-2)\pi$

Si llamamos a $k-k'-2=k''' \rightarrow y=\dfrac{7\pi}{6}+k'''' \pi$

Las soluciones del sistema son los siguientes puntos del plano

$S=\left\{(\dfrac{5\pi}{6}+k''\pi,\dfrac{7\pi}{6}+k'''\pi) \text{ con } k'' \text{ y } k''' \text{ enteros}\right\}$

Si $k''=0$ y $k'''=0 \rightarrow (\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6})$

Si $k''=0$ y $k'''=-1 \rightarrow (\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6}-\pi)=\left(\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right)$

Si $k''=1$ y $k'''=0 \rightarrow (\dfrac{5\pi}{6}+\pi,\dfrac{7\pi}{6})=\left(\dfrac{11\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6}\right)$

Si $k''=1$ y $k'''=-1 \rightarrow (\dfrac{5\pi}{6}+\pi,\dfrac{7\pi}{6}-\pi)=\left(\dfrac{11\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right)$ etc, etc....

Estos son los puntos del plano; cuyos valores de x e y están comprendidos entre 0 y 2π

3. $\begin{cases} x+y=\pi+2k\pi \\ x-y=\dfrac{4\pi}{3}+2k'\pi \end{cases}$ con k y $k' \in \mathbb{Z}$con k y $k' \in \mathbb{Z}$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos$\rightarrow 2x=\dfrac{7\pi}{3}+2(k+k')\pi$

Aislando $x \rightarrow x=\dfrac{7\pi}{6}+(k+k')\pi$

Si llamamos a $k+k'=k'' \rightarrow x=\dfrac{7\pi}{6}+k''\pi$

Restando la primera ecuación de la segunda obtenemos

$2y=-\dfrac{\pi}{3}+2(k-k')\pi$

Aislando $y \rightarrow y=-\dfrac{\pi}{6}+(k-k')\pi$

Como $-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{11\pi}{6}-2\pi$

entonces; $y = \dfrac{11\pi}{6} - 2\pi + (k-k')\pi = \dfrac{11\pi}{6} + (k-k'-2)\pi$

Si llamamos a $k-k'-2 = k''' \rightarrow y = \dfrac{11\pi}{6} + k'''' \pi$

Las soluciones del sistema son los siguientes puntos del plano

$S = \left\{ (\dfrac{7\pi}{6} + k''\pi, \dfrac{11\pi}{6} + k'''\pi) \text{ con } k'' \text{ y } k''' \text{ enteros} \right\}$

Si $k'' = 0$ y $k''' = 0 \rightarrow (\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6})$

Si $k'' = 0$ y $k''' = -1 \rightarrow (\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6} - \pi) = (\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6})$

Si $k'' = -1$ y $k''' = 0 \rightarrow (\dfrac{7\pi}{6} - \pi, \dfrac{11\pi}{6}) = \left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right)$

Si $k'' = -1$ y $k''' = -1 \rightarrow (\dfrac{7\pi}{6} - \pi, \dfrac{11\pi}{6} - \pi) = \left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right)$ etc, etc....

Estos son los puntos del plano; cuyos valores de x e y están comprendidos entre 0 y 2π

4 $\left\{ \begin{array}{c} x + y = \pi + 2k\pi \\ x - y = \dfrac{5\pi}{3} + 2k'\pi \end{array} \right.$ con k y $k' \in \mathbb{Z}$con k y $k' \in \mathbb{Z}$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos$\rightarrow 2x = \dfrac{8\pi}{3} + 2(k+k')\pi$

Aislando $x \rightarrow x = \dfrac{4\pi}{3} + (k+k')\pi$

Si llamamos a $k+k' = k'' \rightarrow x = \dfrac{4\pi}{3} + k''\pi$

Restando la segunda ecuación de la primera obtenemos

$2y = -\dfrac{2\pi}{3} + 2(k-k')\pi$

Aislando $y \rightarrow y = -\dfrac{\pi}{3} + (k-k')\pi$

Como $-\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3} - 2\pi$

entonces; $y = \dfrac{5\pi}{3} - 2\pi + (k-k')\pi = \dfrac{5\pi}{3} + (k-k'-2)\pi$

Si llamamos a $k-k'-2 = k''' \rightarrow y = k'''' \pi$

Las soluciones del sistema son los siguientes puntos del plano

$S = \left\{ (\dfrac{4\pi}{3} + k''\pi, \dfrac{5\pi}{3} + k'''\pi) \text{ con } k'' \text{ y } k''' \text{ enteros} \right\}$

Si $k'' = 0$ y $k''' = 0 \rightarrow (\dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3})$

Si $k'' = 0$ y $k''' = -1 \rightarrow (\dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3} - \pi) = \left(\dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right)$

Si $k'' = -1$ y $k''' = 0 \rightarrow (\dfrac{4\pi}{3} - \pi, \dfrac{5\pi}{3}) = \left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{6}\right)$

Si $k'' = -1$ y $k''' = -1 \rightarrow (\dfrac{4\pi}{3} - \pi, \dfrac{5\pi}{3} - \pi) = \left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right)$ etc, etc....

Estos son los puntos del plano; cuyos valores de x e y están comprendidos entre 0 y 2π

2.2 Ejercicios sistemas de ecs. trigonométricas

Ejercicio 36 *Resuelve el sistema* $\left\{\begin{array}{c} \sin x+\sin y=\frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ x+y=\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$,

De la 2^a ecuación aislamos x

$$x=\frac{\pi}{2}-y$$

Y sustituimos dicha expresión en la 1^a ecuación:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)+\sin y=\frac{\sqrt{3}+1}{2} \tag{3}$$

Nota a) : Como $\sin C+\sin D=2\sin\left(\dfrac{C+D}{2}\right)\cos\left(\dfrac{C-D}{2}\right)$; *entonces podemos transformar la expresión que hay a la izquierda de la igualdad de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)+\sin y &= 2\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}-y+y}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}-y-y}{2}\right)= \\ &= 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-y\right)=\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-y)\end{aligned}$$

Quedando la ecuación (3) así:

$$\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-y)=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

Aislando $\cos(\dfrac{\pi}{4}-y)$

$$\cos(\frac{\pi}{4}-y)=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Nota b) Como $\cos A=\cos(-A)$ *la ecuación anterior se transforma en*:

$$\cos(y-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \tag{4}$$

Nota c) *El ángulo agudo cuyo coseno vale* $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ es $\dfrac{\pi}{12}(15^o)$.[1]

[1] $\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Por la nota anterior; la solución de la ecuación (4) *es:*

$$y-\frac{\pi}{4}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{12}+2k\pi\\ \dfrac{23\pi}{12}+2k\pi\end{cases}\text{con } k\in\mathbb{Z}\rightarrow y=\begin{cases}\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\\ \dfrac{13\pi}{6}+2k\pi\end{cases}$$

Como $\dfrac{13\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}+2\pi\rightarrow\dfrac{13\pi}{6}+2k\pi=\dfrac{\pi}{6}+2\pi+2k\pi=\dfrac{\pi}{6}+2\pi(k+1)$. Entonces, las soluciones de la incógnita y se pueden expresar :

$$y=\begin{cases}\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\\ \dfrac{\pi}{6}+2(k+1)\pi\end{cases}\text{con } k\in\mathbb{Z}$$

Obtenidos todos los valores de la incógnita "y" , vamos a calcular los correspondientes valores de la incógnita "x". (recuerda que $x=\dfrac{\pi}{2}-y$)

$$\left[\begin{array}{c}\text{Si } y=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}-2k\pi=\dfrac{\pi}{6}-2k\pi\text{ con } k\in\mathbb{Z}\\ \text{Si } y=\dfrac{\pi}{6}+2\left(k+1\right)\pi\rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}-2\left(k+1\right)\pi=\dfrac{\pi}{3}-2\left(k+1\right)\pi\text{ con } k\in\mathbb{Z}\end{array}\right]$$

El conjunto solución del sistema es:

$$S=\left\{\left(\frac{\pi}{6}-2k\pi,\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\text{ con } k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\left(\frac{\pi}{3}-2\left(k+1\right)\pi\ ,\frac{\pi}{6}+2\left(k+1\right)\pi\right)\text{ con } k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Ejercicio 37 *Resuelve el sistema* $\begin{cases}\sin x+\cos y=\sqrt{3}\\ x-y=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

De la 2^a ecuación aislamos x

$$x=\frac{\pi}{2}+y$$

Y sustituimos dicha expresión en la 1^a ecuación:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+y\right)+\cos y=\sqrt{3}\tag{5}$$

Nota a) : Como $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+y\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\cos y+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\sin y=$ [2] $\cos y$; *entonces, podemos transformar la expresión que hay a la izquierda de la igualdad de la siguiente manera:*

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+y\right)+\sin y=2\cos y$$

Quedando la ecuación (5) así:

$$2\cos y=\sqrt{3}\rightarrow\cos y=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

[2] $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$ y $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

Los valores de y que se obtienen son

$$y=\left\{\begin{array}{c}\frac{\pi}{6}+2k\pi\\ \frac{11\pi}{6}+2k\pi\end{array}\right. \quad \text{con } k\in\mathbb{Z}$$

Obtenidos todos los valores de la incógnita "y" , vamos a calcular los correspondientes valores de la incógnita "x".(recuerda que $x=\dfrac{\pi}{2}+y$)

$$\left[\begin{array}{c}\text{Si } y=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}+2k\pi=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi \text{ con } k\in\mathbb{Z}\\ \text{Si } y=\dfrac{11\pi}{6}+2k\pi\rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{11\pi}{6}+2k\pi=\dfrac{7\pi}{3}+2k\pi=\dfrac{\pi}{3}+2\left(k+1\right)\pi \text{ con } k\in\mathbb{Z}\end{array}\right]$$

El conjunto solución del sistema es:

$$S=\left\{\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\text{ con } k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\left(\frac{\pi}{3}+2\left(k+1\right)\pi\ ,\frac{11\pi}{6}+2k\pi\right)\text{ con } k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Ejercicio 38 *Resuelve el sistema* $\left\{\begin{array}{c}x-y=\dfrac{\pi}{3}\\ \sin x+\sin y=\sqrt{3}\end{array}\right.$

Ejercicio 39 *Resuelve el sistema* $\left\{\begin{array}{c}x-y=\dfrac{\pi}{2}\\ \sin x=\sin y\end{array}\right.$

Ejercicio 40 *Resuelve el sistema* $\left\{\begin{array}{c}x-y=\dfrac{2\pi}{3}\\ \cos x+\cos y=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$

Ejercicio 41 *Resuelve el sistema* $\left\{\begin{array}{c}\sin x+\sin y=\dfrac{1}{2}\\ \sin x-\sin y=\frac{3}{2}\end{array}\right.$

Sumando y restando ambas ecuaciones obtenemos:

$$\left\{\begin{array}{c}2\sin x=2\\ 2\sin y=-1\end{array}\right.\rightarrow\left\{\begin{array}{c}\sin x=1\\ \sin y=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

Los ángulos que verifican cada una de las ecuaciones anteriores son:

$$\left\{\begin{array}{c}x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ y=\left\{\begin{array}{c}\frac{5\pi}{6}+2k\pi\\ \frac{11\pi}{6}+2k\pi\end{array}\right.\end{array}\right. \quad \text{con } k\in\mathbb{Z}$$

La solución del sistema es el conjunto:

$$S=\left\{\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right)\text{ con } k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{11\pi}{6}+2k\pi\right)\text{ con } k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Resuelve tú, los 2 sistemas siguientes

Ejercicio 42 *Resuelve los sistemas* $\left\{\begin{array}{l}\cos x+3\cos y=1\\ 3\cos x-\cos y=3\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l}4\sin x+5\sin y=2\\ \sin x+\sin y=1\end{array}\right.$

Ejercicio 43 *Resuelve el sistema* $\left\{\begin{array}{l}\sin x=2\sin y\\ \sin x\sin y=\frac{1}{2}\end{array}\right.$

Si realizamos el siguiente cambio de variable $\sin x = Z$ y $\cos x = T$. , tendremos que resolver el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l}Z=2T\\ ZT=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Multiplicamos la 1^a ecuación por T y la 2^a por -1

$$\left\{\begin{array}{l}ZT=2T^2\\ -ZT=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Sumando ambas ecuaciones

$$0=2T^2-\tfrac{1}{2}\rightarrow T^2=\tfrac{1}{4}\rightarrow T=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{c}\text{Si } T=\frac{1}{2}\rightarrow Z=1\\ \text{Si } T=-\frac{1}{2}\rightarrow Z=-1\end{array}\right]$$

Deshaciendo el cambio de variable

$$\left[\begin{array}{c}\text{Si } \sin x=\frac{1}{2}\rightarrow\sin y=1\\ \text{Si } \sin x=-\frac{1}{2}\rightarrow\sin y=-1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{c}\text{Si } x=\left\{\begin{array}{l}\frac{\pi}{6}+2k\pi\\ \frac{5\pi}{6}+2k\pi\end{array}\right.\rightarrow y=\frac{\pi}{2}+k\pi \text{ con } k\in\mathbb{Z}\\ \text{Si } x=\left\{\begin{array}{l}\frac{7\pi}{6}+2k\pi\\ \frac{11\pi}{6}+2k\pi\end{array}\right.\rightarrow y=\frac{3\pi}{2}+k\pi\end{array}\right]$$

La solución del sistema es el conjunto de puntos del plano siguiente:

$$S=\left\{\left(\tfrac{\pi}{6}+2k\pi,\tfrac{\pi}{2}+k\pi\right)\right\}\cup\left\{\left(\tfrac{5\pi}{6}+2k\pi,\tfrac{\pi}{2}+k\pi\right)\right\}\cup\left\{\left(\tfrac{7\pi}{6}+2k\pi,\tfrac{3\pi}{2}+k\pi\right)\right\}\cup\left\{\left(\tfrac{11\pi}{6}+2k\pi,\tfrac{3\pi}{2}+k\pi\right)\right\}$$
donde $k\in\mathbb{Z}$

Ejercicio 44 *Resuelve el sistema* $\left\{\begin{array}{l}\sin x+\sin y=1\\ \cos x-\cos y=1\end{array}\right.$

Aislamos de la primera $\sin x$ y de la segunda $\cos x$; obteniendo:

$$\left\{\begin{array}{l}\sin x=1-\sin y\\ \cos x=1+\cos y\end{array}\right.$$

Elevando al cuadrado ambas ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l}\sin^2 x=1-2\sin y+\sin^2 y\\ \cos^2 x=1+2\cos y+\cos^2 y\end{array}\right.$$

Sumando ambas ecuaciones

$$\sin^2 x+\cos^2 x=2-2\sin y+2\cos y+\sin^2 y+\cos^2 y$$

como $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$;la ecuación anterior queda:

$$\begin{aligned} 1 &= 2 - 2\sin y + 2\cos y + 1 \\ -1 &= \cos y - \sin y \end{aligned}$$

Como $\cos(\frac{\pi}{2}+y) = -\sin y$, tendremos que resolver la ecuación trigonométrica:

$$\cos y + \cos(\frac{\pi}{2} + y) = -1$$

Para ello, utilizamos que $\cos C + \cos D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$; con lo que la ecuación a resolver es ésta:

$$2\cos\left(\frac{y + \frac{\pi}{2} + y}{2}\right)\cos\left(\frac{y - \left(\frac{\pi}{2} + y\right)}{2}\right) = -1$$

Operando:

$$2\cos\left(y + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

Como $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$2\cos\left(y + \frac{\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = -1$$

La ecuación se reduce al final a resolver la ecuación trigonométrica elemental:

$$\cos\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \to y + \frac{\pi}{4} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{array} \right. \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Aislando la incógnita, tendremos que:

$$y = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \pi + 2k\pi \end{array} \right. \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Si $y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ sustituyendo en cualquiera de la dos ecuaciones iniciales determinaremos el valor de la correspondiente incógnita x. Vamos a hacerlo en la 1^a

$\sin x = 1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \to \sin x = 0 \to x = \left\{ \begin{array}{l} 0 + 2k\pi \\ \pi + 2k\pi \end{array} \right. \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$

Con lo que obtenemos los siguientes puntos del plano:

$$(0 + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \text{ y } (\pi + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Si $y = \pi + 2k\pi$ sustituyendo en la 1^a determinaremos el valor de la correspondiente incógnita x.

$\sin x = 1 - \sin(\pi + 2k\pi) \rightarrow \sin x = 1 \rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

Con lo que obtenemos los siguientes puntos del plano:

$$(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi) \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Recuerda que al elevar al cuadrado las ecuaciones, alguno de estos pares de puntos puede que no sean solución del sistema

Comprobaciones:

$$\text{Si } x = 0 \text{ e } y = \frac{\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} \sin 0 + \sin \frac{\pi}{2} = 1 \\ \cos 0 - \cos \frac{\pi}{2} = 1 \end{cases}$$

Los puntos del plano $(0 + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$ si que son solución del sistema.

$$\text{Si } x = \pi \text{ e } y = \frac{\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} \sin \pi + \sin \frac{\pi}{2} = 1 \\ \cos \pi - \cos \frac{\pi}{2} = -1 \end{cases}$$

Los puntos del plano $(\pi + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$ no son solución del sistema.

$$\text{Si } x = \frac{\pi}{2} \text{ e } y = \pi \rightarrow \begin{cases} \sin \frac{\pi}{2} + \sin \pi = 1 \\ \cos \frac{\pi}{2} - \cos \pi = 1 \end{cases}$$

Los puntos del plano $(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$ si que son solución del sistema.

La solución del sistema es el conjunto siguiente:

$$S = \left\{(0 + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \text{ con } k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi) \text{ con } k \in \mathbb{Z}\right\}$$