

## 8.- LÍMITES DE FUNCIONES

### 1.- DOMINIO DE DEFINICIÓN

- Halla el dominio de definición de  $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-5x+6}$   
*Solución: El dominio es  $\mathbf{R} - \{2,3\}$*
- Halla el dominio de definición de  $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$   
*Solución: El dominio es  $(-\infty, -4] \cup [4, \infty)$ .*
- Halla el dominio de definición de  $f(x) = x^3$   
*Solución: El dominio es  $\mathbf{R}$ .*
- Calcula el dominio de definición de la función  $f(x) = 3 - \sqrt{x+5}$   
*Solución:  $[-5, \infty)$*
- Halla el dominio de definición de la función  $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+4}$   
*Solución:  $(-\infty, -4) \cup (-4, 1) \cup (1, +\infty)$ .*

### 2.- OPERACIONES CON FUNCIONES

- Dadas las funciones  $f(x) = 2x^2 - 1$ , y  $g(x) = x + 1$ , define la función  $(f-g)$ . Calcula las imágenes de  $1/2$ ,  $-1$  y  $0$  mediante la función  $f-g$ .  
*Solución:  $(f-g)(x) = 2x^2 - x - 2$ ,  $(f-g)(1/2) = -2$ ,  $(f-g)(-1) = 1$ ,  $(f-g)(0) = -2$ .*
- Dadas las funciones  $f(x) = -x+1$  y  $g(x) = 2x+1$ , define  $f/g$ . Calcula las imágenes de los números  $-1$ ,  $1$  y  $1/2$  mediante  $\frac{f}{g}$   
*Solución:  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{-x+1}{2x+1}$ ,  $\left(\frac{f}{g}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ ,  $(f/g)(-1) = -2$ ,  $(f/g)(1) = 1$ .*
- Halla el dominio de definición de la función  $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1}$   
*Solución:  $\{-1, 1\}$*
- Halla el dominio de definición de la función  $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{x^3-x}}$   
*Solución:  $\mathbf{R} - \{-1, 0, 1\}$*
- Halla el dominio de definición de la función  $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$   
*Solución:  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$*
- Sean  $s(x) = x^2$  y  $t(x) = \text{sen } x$ , determina  $(t \circ s)(x)$   
*Solución:  $(t \circ s)(x) = \text{sen}(x^2)$ .*
- Sean  $p(x) = 2^x$  y  $t(x) = \text{sen } x$ , expresa con las funciones  $p(x)$  y  $t(x)$ , operadas con "+" y "o"  
a)  $f(x) = 2^{\text{sen } x}$  b)  $f(x) = \text{sen}(2^x)$   
*Solución: a)  $2^{\text{sen } x} = (p \circ t)(x)$  b)  $\text{sen } 2^x = (t \circ p)(x)$ .*
- Sea la función  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  determina la función  $f \circ f$   
*Solución:  $(f \circ f)(x) = \frac{1+x}{2+x}$*
- Sean la funciones  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = \text{Ln}(x)$  determina las funciones  $f \circ g$  y  $g \circ f$   
*Solución: a)  $(f \circ g)(x) = \text{Ln}^2 x$ ,  $(g \circ f)(x) = \text{Ln}(x^2)$ .*

### 3.- FUNCIONES INVERSAS

15. Obtén la función inversa de  $y = 3x - 5$   
*Solución:*  $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$
16. Calcula la función inversa de  $f(x) = 3 - \sqrt{x+5}$   
*Solución:*  $f^{-1}(x) = (-x+3)^2 - 5$
17. Calcula la función inversa de  $f(x) = \frac{6}{x+3}$   
*Solución:*  $f^{-1}(x) = \frac{6-3x}{x}$
18. Señala cuáles de las siguientes funciones son inversas de si mismas y representa sus gráficas:  
a)  $y = x$                       b)  $y = -x$ ,  
c)  $y = 2x-2$ ,                d)  $y = \frac{3}{x}$   
¿Qué se puede decir de una función que es recíproca de si misma? Razona la respuesta.  
*Solución:* a), b) y d)
19. Obtén la función inversa de  $y = 3 + \sqrt{3+x}$   
*Solución:*  $f^{-1}(x) = (x-3)^2 - 3$

### 3.- CALCULO DE LÍMITES

20. Calcula los límites: a)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x}{x-3}$ , b)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x}{x-3}$ ,  
*Solución:* a)  $+\infty$ , b)  $-\infty$ .
21. Calcula  $\lim_{x \rightarrow 3} (f+g)(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow 3} (f \cdot g)(x)$  siendo las funciones  $f(x) = x^2+2$  y  $g(x) = \frac{1}{x}$   
*Solución:*  $\lim_{x \rightarrow 3} (f+g)(x) = \frac{34}{3}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 3} (f \cdot g)(x) = \frac{11}{3}$ .
22. Calcula  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$   
*Solución:* No tiene,  $+\infty$  a la derecha,  $-\infty$  a la izquierda.
23. Calcula  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x^2}$   
*Solución:*  $+\infty$
24. Calcula  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{x^2-1}$   
*Solución:* No tiene,  $+\infty$  a la derecha,  $-\infty$  a la izquierda.
25. ¿Tiene límite la función  $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$  en  $x = 1$ ?  
*Solución:* No tiene ya que son distintos los límites laterales
26. Calcula  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{1-x^3}$   
*Solución:* 0
27. Calcula  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2+2x-7)$   
*Solución:*  $+\infty$

28. Calcula  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1-x^2}$   
 Solución: 0
29. Calcula  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 2x - 4)$   
 Solución:  $+\infty$
30. Calcula  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1-x^3)$   
 Solución:  $+\infty$
31. Calcula  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3}{2x+1}$   
 Solución:  $\infty$ .
32. Calcula los límites:  
 a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3}{2x+1}$ , b)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-6x+8}{x-4}$   
 Solución: a)  $\infty$ , b) 2.
33. Calcula los límites  
 a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}$ , b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$   
 Solución: a)  $\frac{4}{3}$ , b) 4
34. Calcula: a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x + 1)$ ,  
 b)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 5x + 6)$   
 Solución: a)  $+\infty$ , b) 0
35. Calcula  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$   
 Solución: 1.
36. Calcula  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot (\sqrt{x^2+1} - x)$   
 Solución:  $\frac{1}{2}$
37. Calcula  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^2-6x+5}$   
 Solución:  $-\frac{3}{4}$
38. Calcula  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2-\sqrt{2x-4}}{x^2-16}$   
 Solución:  $\frac{1}{16}$
39. Calcula  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

## 5.- ASÍNTOTAS

Localiza las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la gráfica de la función respecto de ellas.

40.  $y = \frac{2x+3}{x-2}$

Solución: AV:  $x=2$ , AH:  $y=2$ , AO: No tiene.

41.  $y = \frac{x^2 - 5x + 1}{x^2 - 2}$

Solución: AV:  $x = \pm\sqrt{2}$ , AH:  $y=1$ , AO: No tiene.

42.  $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 3}$

Solución: AV:  $x=-3$ , AH: No tiene, AO:  $y = x-5$ .

43.  $y = \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2}$

Solución: AV: no tiene, AH: No tiene, AO:  $y=x+1$ .

44.  $y = \frac{x-1}{x+1}$

Solución: AV:  $x=-1$  AH:  $y=1$ , AO: No tiene

45.  $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2}$

Solución: Asíntotas verticales:  $x = \sqrt{2}$ ,  $x = -\sqrt{2}$ ; Asíntota oblicua:  $y = x$ .

46.  $f(x) = \frac{1}{x-1}$

Solución: AV:  $x=1$ , AH:  $y=0$ , AO: No tiene

47.  $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x - 1}$

Solución: AV: No tiene, AH: No tiene, AO: No tiene

48.  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$

Solución: Asíntotas verticales:  $x=2$ ,  $x=-2$ ; Asíntota oblicua:  $y = x$ .

## 6.- CONTINUIDAD

49. 1.- Demuestra que la función  $f$  es discontinua en  $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x \leq 0 \\ -x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

50. ¿Cuánto ha de valer  $a$  para que la siguiente función sea continua en  $\mathbf{R}$ ?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \leq 2 \\ a - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución:  $a = -8$

51. Halla  $a$  para que la siguiente función sea continua en  $\mathbf{R}$ .

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 2 \\ 3-ax^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución:  $a = 0$

52. ¿Es continua la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

en  $x = 2$ ? ¿Por qué?

Solución: No, pues  $f$  no está definida en  $x = 2$ .

53. ¿Puede una función tener límite en un punto y no ser continua en dicho punto? Razona la respuesta con un ejemplo.

Solución: Sí, la función del ejercicio 40.

54. Determina la constante  $a$  para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax & \text{si } x < 1 \\ ax + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

sea continua en  $x = 1$ . Representa la función para este valor de  $a$ .

Solución:  $a = -1$ .

55. Halla los puntos de discontinuidad de la función

$$f(x) = x - \frac{1}{x-2} - \frac{x}{x^2-x}$$
 y di si en alguno de ellos la discontinuidad es evitable.

Solución: Discontinuidad evitable en  $x = 0$ , discontinuidad inevitable en  $x = 1$  y  $x = 2$ .

56. Halla los puntos de discontinuidad de  $f(x) = -\frac{1}{x}$

Solución: en  $x=0$  discontinuidad inevitable con salto infinito

57. Demuestra que la función

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x < 0 \\ -x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

es discontinua en  $x = 0$

58. Estudia la discontinuidad de la función  $f(x) = \frac{3x^2-9}{x-\sqrt{3}}$  en  $x = \sqrt{3}$

Solución: discontinuidad evitable, valor verdadero  $6\sqrt{3}$

59. Indica si la siguiente función tiene algún punto de discontinuidad:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 3 \\ x^2 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 0 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Solución:  $x = 3, x = 4$  inevitables con salto finito en ambos puntos.

60. Prueba que la función  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3+7x-8}$  no es continua en  $x = 1$  e indica que tipo de discontinuidad presenta en dicho punto.

Solución: evitable, valor verdadero  $\frac{1}{5}$

61. Halla los puntos de discontinuidad de  $f(x) = \frac{1}{x^2-3}$

Solución: en  $x = \pm\sqrt{3}$  discontinuidad inevitable con salto infinito.

7.- LÍMITES DE SUCESIONES

62. Calcula los límites de las siguientes sucesiones:

a)  $a_n = \frac{5}{n}$

b)  $b_n = \frac{5+3n}{4n+1}$

c)  $c_n = \frac{n^2+1}{5n}$

Solución: a) 0, b)  $\frac{3}{4}$ , c)  $++$ .

63. Calcula los límites de las siguientes sucesiones:

a)  $a_n = \frac{(n-1)^2}{n^2+3}$

b)  $b_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{2n}$

Solución: a) 1, b)  $\frac{1}{2}$ .

64. Calcula los límites de las siguientes sucesiones:

a)  $a_n = \frac{3n+1}{\sqrt{n}}$

b)  $b_n = \sqrt{\frac{4n-3}{n+2}}$

Solución: a)  $+\infty$ , b) 2.

65. Calcula los límites de las siguientes sucesiones:

a)  $a_n = \frac{(1+n)^3}{(n-2)^2}$

b)  $b_n = \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$

Solución: a)  $\infty$ , b) 1.

66. Comprueba si tienen límite las siguientes sucesiones:

a)  $a_n = (-1)^n \frac{2n+1}{n}$

b)  $b_n = 1+(-1)^n$

Solución: a) No, b) No.

67. Comprueba si tienen límite las siguientes sucesiones:

a)  $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

b)  $b_n = \frac{1+\sqrt{2n}}{1+\sqrt[3]{n}}$

Solución: a) 0, b)  $+\infty$ .

68. Comprueba si tienen límite las siguientes sucesiones:

a)  $a_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$

b)  $b_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$

Solución: a) 0, b) 1.

69. Calcula los siguientes límites:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3+2n+1}{2n^2-1} - \frac{n^2}{n-1} \right)$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^4}{n^2+1} + \frac{-n^3+2}{n} \right)$

Solución: a)  $-\infty$ , b) -1.

70. Calcula los siguientes límites:  
 a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 4} - \sqrt{n^2 - 3n})$   
 b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n - \sqrt{n^2 + 5})$   
 Solución: a)  $\frac{3}{2}$  b)  $\frac{3}{4}$ .
71. Calcula los siguientes límites:  
 a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 3})$   
 b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 5} - n)$   
 Solución: a) 1 b) 0.
72. Calcula los siguientes límites:  
 a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{n-1}{(n+1)^2}\right)^{\frac{n+1}{n}}$   
 b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+3}\right)^{n-2}$   
 Solución: a) 3, b) e.
73. Calcula los siguientes límites:  
 a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{6n+3}\right)^n$   
 b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-3}\right)^{n^2+3n}$   
 Solución: a) 0, b)  $e^4$ .
74. Calcula los siguientes límites:  
 a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{5}}$   
 b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{2n}{3}}$   
 Solución: a)  $e^{\frac{1}{5}}$  b)  $e^{-\frac{2}{3}}$ .
75. Calcula los siguientes límites:  
 a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n$   
 b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2n}\right)^{3n-2}$   
 Solución: a)  $e^5$  b)  $e^{\frac{9}{2}}$ .
76. Dadas las sucesiones  $a_n = n^2$  y  $b_n = \frac{1}{n^2+1}$ , estudia el límite de:  
 a)  $a_n + b_n$   
 b)  $a_n \cdot b_n$   
 c)  $\frac{a_n}{b_n}$   
 Solución: a)  $+\infty$  b) 1 c)  $+\infty$ .
77. Dadas las sucesiones  $a_n = n + 3$  y  $b_n = 2-n$ , calcula los siguientes límites:  
 a)  $a_n + b_n$   
 b)  $a_n - b_n$   
 c)  $a_n \cdot b_n$   
 d)  $\frac{a_n}{b_n}$   
 Solución: a) 5 b)  $+\infty$  c)  $-\infty$  d) -1.