

1. Determina el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{16-x^2}$ b) $g(x) = \log \frac{x+1}{2x-5}$ c) $h(x) = 2^{x+3} - 1$

2. Dadas las funciones $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ y $g(x) = 4x-5$, halla:

a) $\frac{g}{f}$ b) $f \circ g$ c) $(f+g)(3)$ d) $(g \circ f)(2)$

3. Dada la función $h(x) = 2^{x+3} - 1$, se pide:

- a) ¿Qué relación existe entre las gráficas de la función h y f siendo $f(x) = 2^x$?
b) Halla la expresión de la función inversa de h y explica cómo son las gráficas de h y h^{-1} .

4. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+2}{x+3} & \text{si } x < -3 \\ x^2 + 2x - 4 & \text{si } -3 \leq x < 2 \\ -\frac{1}{2}x + 7 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

se pide:

- a) Estudio analítico de la continuidad.
b) Gráfica.
c) Tiene asíntotas. Justifica la respuesta.

5. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 7x + 3}{3x^2 - 8x - 3}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \sqrt{9x^2 - 5x + 4})$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{x+3}$

6. Estudia las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^2+2}{1-x}$.

Soluciones

1. a) $f(x) = \sqrt{16-x^2}$

$$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} / 16-x^2 \geq 0\}$$

$$16-x^2 \geq 0$$

$$16-x^2 = 0$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

$$\text{signo}(16-x^2)$$



$$\text{Dom } f = [-4, 4]$$

b) $g(x) = \log \frac{x+1}{2x-5}$

$$\text{Dom } f = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{x+1}{2x-5} > 0 \text{ y } 2x-5 \neq 0\right\}$$

$$\frac{x+1}{2x-5} > 0$$

$$x+1 = 0$$

$$x = -1$$

$$2x-5 = 0$$

$$x = \frac{5}{2}$$

$$\text{signo} \frac{x+1}{2x-5}$$



$$\text{Dom } g = (-\infty, -1) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$$

c) $\text{Dom } h = \mathbb{R}$

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x+3 \in \mathbb{R} \Rightarrow 2^{x+3} \in \mathbb{R} \Rightarrow 2^{x+3} - 1 \in \mathbb{R}$$

2. a) $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{4x-5}{\frac{2x-1}{x+3}} = \frac{(4x-5)(x+3)}{2x-1}$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{(4x-5)(x+3)}{2x-1}$$

b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(4x-5) = \frac{2(4x-5)-1}{4x-5+3} = \frac{8x-10-1}{4x-2} = \frac{8x-11}{4x-2}$

$$(f \circ g)(x) = \frac{8x-11}{4x-2}$$

c) $(f+g)(3) = f(3) + g(3) = \frac{2 \cdot 3 - 1}{3+3} + 4 \cdot 3 - 5 = \frac{5}{6} + 7 = \frac{47}{6}$

$$(f+g)(3) = \frac{47}{6}$$

d) $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g\left(\frac{2 \cdot 2 - 1}{2+3}\right) = g\left(\frac{3}{5}\right) = 4 \cdot \frac{3}{5} - 5 = \frac{12}{5} - 5 = -\frac{13}{5}$

$$(g \circ f)(2) = -\frac{13}{5}$$

3. a) La gráfica de h es la gráfica de f trasladada tres unidades a la izquierda y una unidad hacia abajo.

$f(x) = 2^x$	$g(x) = 2^{x+3}$	$h(x) = 2^{x+3} - 1$
	La gráfica de g es la gráfica de f trasladada 3 unidades a la izquierda.	La gráfica de h es la gráfica de g trasladada 1 unidad hacia abajo.

b) $h(x) = 2^{x+3} - 1$

$$y = 2^{x+3} - 1 \Rightarrow y + 1 = 2^{x+3} \Rightarrow x + 3 = \log_2(y + 1) \Rightarrow x = \log_2(y + 1) - 3 \Rightarrow y = \log_2(x + 1) - 3$$

$$h^{-1}(x) = \log_2(x + 1) - 3$$

Las gráficas de h y h^{-1} son simétricas respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrante, es decir, respecto a la gráfica de la función identidad, $I(x) = x$.

4. Dom $f = \mathbb{R}$

- a) f es continua en $(-\infty, -3)$ por estar definida en ese intervalo por una función racional, continua en $\mathbb{R} - \{-3\}$ y, en particular, en ese intervalo.

f es continua en $(-3, 2)$ y $(2, +\infty)$ por estar definida en esos intervalos por funciones polinómicas, continuas en \mathbb{R} y, en particular, en esos intervalos.

Puntos conflictivos: -3 y 2 .

- $x = -3$

Estudiamos la continuidad en $x = -3$

1) $f(3)$

$$f(3) = (-3)^2 + 2(-3) - 4 = 9 - 6 - 4 = -1$$

$$\exists f(3) \text{ y } f(3) = -1$$

2) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2x+2}{x+3} = \frac{-4}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -3^+} (x^2 + 2x - 4) = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow -3} f(x)$$

Por lo tanto, f no es continua en $x = -3$

Como los límites laterales en $x = -3$ existen y uno de ellos es infinito,

f tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = -3$.

- $x = 2$

Estudiamos la continuidad en $x = 2$

1) $f(2)$

$$f(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2 + 7 = -1 + 7 = 6$$

$$\exists f(2) \text{ y } f(2) = 6$$

2) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 2x - 4) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(-\frac{1}{2}x + 7\right) = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

Por lo tanto, f no es continua en $x = 2$

Como los límites laterales en $x = 2$ existen y son finitos, pero distintos,

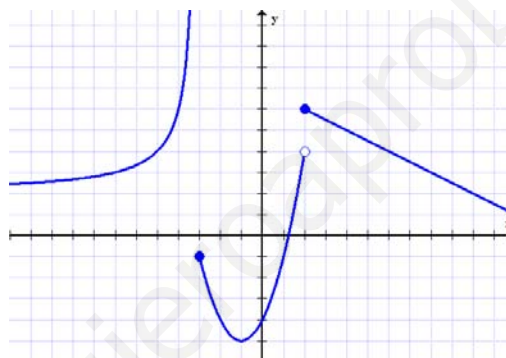
f tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 2$.

Así pues:

- f es continua en $\mathbb{R} - \{-3, 2\}$
- f tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = -3$.
- f tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 2$.

b) Gráfica

$x < -3$	$-3 \leq x < 2$	$x \geq 2$																																				
$f(x) = \frac{2x+2}{x+3}$	$f(x) = x^2 + 2x - 4$	$f(x) = -\frac{1}{2}x + 7$																																				
(Hipérbola)	(Parábola)	(Recta)																																				
<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$f(x)$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>-3,5</td><td>10</td></tr> <tr><td>-4</td><td>6</td></tr> <tr><td>-5</td><td>4</td></tr> <tr><td>-6</td><td>3,3</td></tr> <tr><td>-7</td><td>3</td></tr> <tr><td>-8</td><td>2,8</td></tr> <tr><td>-9</td><td>2,6</td></tr> </tbody> </table>	x	$f(x)$	-3,5	10	-4	6	-5	4	-6	3,3	-7	3	-8	2,8	-9	2,6	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$f(x)$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>-3</td><td>-1</td></tr> <tr><td>-2</td><td>-4</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-5</td></tr> <tr><td>0</td><td>-4</td></tr> <tr><td>1</td><td>-1</td></tr> </tbody> </table> $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \cdot 1} = -1$ $V(-1, -5)$	x	$f(x)$	-3	-1	-2	-4	-1	-5	0	-4	1	-1	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$f(x)$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>2</td><td>6</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>6</td><td>4</td></tr> </tbody> </table>	x	$f(x)$	2	6	4	5	6	4
x	$f(x)$																																					
-3,5	10																																					
-4	6																																					
-5	4																																					
-6	3,3																																					
-7	3																																					
-8	2,8																																					
-9	2,6																																					
x	$f(x)$																																					
-3	-1																																					
-2	-4																																					
-1	-5																																					
0	-4																																					
1	-1																																					
x	$f(x)$																																					
2	6																																					
4	5																																					
6	4																																					
Extremos de los intervalos																																						
	$(-3, -1) \bullet -$ $(2, 4) - \circ$	$(2, 6) \bullet -$																																				



c) Asíntotas horizontales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+2}{x+3} = 2 \Rightarrow f \text{ tiene una asíntota horizontal por la izquierda en } y = 2.$$

Por la derecha no tiene asíntota horizontal por estar definida por una función polinómica.

Asíntotas verticales

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2x+2}{x+3} = \frac{-4}{0^-} = +\infty \Rightarrow f \text{ tiene una asíntota vertical por la izquierda en } x = -3.$$

5. a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 7x + 3}{3x^2 - 8x - 3} = \frac{0}{0}$ Indeterminación

$$\begin{array}{r|rrr} (x-3) & 2 & -7 & 3 \\ \hline 3 & 6 & -3 & \\ \hline & 2 & -1 & 0 \end{array}$$

$(2x-1)$

$$\begin{array}{r|rrr} (x-3) & 3 & -8 & -3 \\ \hline 3 & 9 & 3 & \\ \hline & 3 & 1 & 0 \end{array}$$

$(3x+1)$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 7x + 3}{3x^2 - 8x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(2x-1)}{(x-3)(3x+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-1}{3x+1} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \sqrt{9x^2 - 5x + 4}) = +\infty - \infty$ Indeterminación

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \sqrt{9x^2 - 5x + 4}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x - \sqrt{9x^2 - 5x + 4})(3x + \sqrt{9x^2 - 5x + 4})}{3x + \sqrt{9x^2 - 5x + 4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x)^2 - (\sqrt{9x^2 - 5x + 4})^2}{3x + \sqrt{9x^2 - 5x + 4}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2 - (9x^2 - 5x + 4)}{3x + \sqrt{9x^2 - 5x + 4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2 - 9x^2 + 5x - 4}{3x + \sqrt{9x^2 - 5x + 4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x - 4}{3x + \sqrt{9x^2 - 5x + 4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{5x}{x} - \frac{4}{x}}{\frac{3x}{x} + \sqrt{\frac{9x^2}{x^2} - \frac{5x}{x^2} + \frac{4}{x^2}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - \frac{4}{x}}{3 + \sqrt{9 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}}} = \frac{5 - 0}{3 + \sqrt{9 - 0 + 0}} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x+3} = 1^{+\infty}$ Indeterminación

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x+3} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{x+1}{x-1} - 1\right)(x+3)\right]} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{x+1-x-1}{x-1}\right)(x+3)\right]} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{2}{x-1}\right)(x+3)\right]} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+6}{x-1}} = e^2$$

7. $f(x) = \frac{x^2 + 2}{1 - x}$.

Asíntotas horizontales $y = k$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \text{ no tiene asíntotas horizontales}$$

(Puede tener asíntotas oblicuas)

Asíntotas verticales $x = a$

$$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 2}{1 - x} = \frac{3}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 2}{1 - x} = \frac{3}{0^-} = -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \text{ tiene una asíntota vertical en } x = 1 \text{ por ambos lados}$$

Asíntotas oblicuas $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2 + 2}{1 - x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2}{x - x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-1) = -1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 2}{1 - x} - (-1)x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 2}{1 - x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2 + x - x^2}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 + x}{1 - x} = -1$$

Por lo tanto,

f tiene una asíntota oblicua en $y = -x - 1$ por ambos lados

Posición de la curva respecto a la asíntota

$x = 10$ $f(10) = \frac{102}{-9} = -11,3$ $a_o(10) = -10 - 1 = -11$ Por la derecha la curva está por debajo de la asíntota oblicua.	$x = -10$ $f(-10) = \frac{102}{11} = 9,27$ $a_o(-10) = 10 - 1 = 9$ Por la izquierda la curva está por encima de la asíntota oblicua.	
--	---	--