Problemas de optimización

1º) La producción de cierta hortaliza en un invernadero (Q(x) en Kg) depende de la temperatura x (ºC) **según la expresión** $Q(x) = (x+1)^2(32-x)$**.**
a) Calcula razonadamente cuál es la temperatura óptima a mantener en el invernadero.
b) ¿Qué producción de hortaliza se obtendría?

Solución

a) Temperatura óptima 21ºC
b) Producción de 5324 Kg

2º) Una empresa de telefonía quiere lanzar al mercado una oferta de tarifa plana de internet. Se ha realizado un estudio que determina que si la tarifa fuera de 36 € podrían conseguirse 4800 contratos. Sin embargo, por cada euro menos en la tarifa, el número de contratos previsto anteriormente se incrementaría en 150. Se pide:
a) Expresar el ingreso total previsto en función del descuento x.
b) ¿Cuál debería ser la tarifa para que la empresa obtuviera el ingreso máximo?. ¿Cuál es éste y con cuántos abonados se conseguiría?. Justificar que el ingreso realmente obtenido es máximo.

Solución

a) $I(x) = (36-x)\cdot(4800+150x)$, siendo x el descuento en la tarifa.
b) La tarifa debería ser de 34 €, el ingreso máximo 173400 € y se consigue con 5100 clientes.

3º) El coste de fabricación en euros de x unidades de un artículo viene dado por la función $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 20$.
a) ¿Cuál es la función que determina el precio unitario?
b) ¿Para qué producción resulta mínimo el coste unitario?. ¿Cuánto vale éste?. Justifica que es un mínimo

Solución

a) $C(x) = \frac{x-2\sqrt{x}+20}{x}$
b) Mínimo en 400 unidades y coste mínimo de $19/20 = 0{,}95$ euros.

4º) El precio de coste de una unidad de un cierto producto es de 120 €. Si se vende a 150 € la unidad, lo compran 500 clientes. Por cada 10 € de aumento en el precio de venta, las ventas disminuyen en 20 clientes.
a) Halla una fórmula que describa el beneficio.
b) Calcula a qué precio p por unidad hemos de vender el producto para obtener un beneficio máximo.
c) En el caso anterior, encuentra el número de unidades que se venden y calcula el beneficio máximo.

Resolución

a) $p =$ precio de venta ;

$$B(p) = p\cdot n^{\underline{o}}unidades - 120\cdot n^{\underline{o}}unidades = (p-120)\cdot\left(500 - 20\cdot\left(\frac{p-150}{10}\right)\right)$$

$$B(p) = (p-120)\cdot(500-2\cdot(p-150)) = (p-120)\cdot(-2p+800) = -2p^2 + 040p - 96000$$

b) Máximo: $p =$ 260 €

c) Se venden 280 unidades y el beneficio es de 39200 €

5º) Disponemos de 200 m de tela metálica. Halla las dimensiones del campo rectangular de mayor área posible que se puede cercar con dicha tela.

6º) Queremos construir dos placas cuadradas con dos materiales distintos cada una de ellas a razón de 2 y 3 euros el cm^2 respectivamente . Si queremos que el perímetro total de las placas sea de 1 m, halla sus dimensiones para que el coste sea mínimo.

7º) En un campo se quiere limitar una parcela de 864 m^2 por medio de una valla rectangular y además dividirla en dos partes iguales por medio de otra valla paralela a uno de los lados. Determina las dimensiones de la parcela para que la longitud total de la valla empleada sea mínima.

Resolución

Sean x e y las dimensiones de la parcela rectangular.

Planteamiento del problema: $\left[\begin{array}{ll} \text{minimizar } P(x,y) = 2x+3y & \text{función objetivo} \\ s.a \quad x\cdot y = 864 & \text{restricción} \end{array}\right.$

Despejando de la restricción tenemos: $y = \frac{864}{x}$ [1] y sustituyendo en la función objetivo:

$P(x) = 2x + \frac{2592}{x}$ que es la función perímetro dependiente de una sola variable

Buscamos el máximo de la función $P(x)$:

$P'(x) = 2 - \frac{2592}{x^2}$; $P'(x) = 0 \iff 2 = \frac{2592}{x^2} \iff x = \sqrt{1296} = 36$ m e $\underbrace{y = 24}_{[1]}$ m

Comprobamos que, efectivamente, el valor $x = 36$ es mínimo de la función perímetro $P(x)$:

$P''(x) = \frac{5184}{x^3}$; $P''(36) > 0$ Mínimo en $x = 36$

Las dimensiones de la parcela rectangular de 864 m^2 de área que minimizan la longitud total de valla empleada son 36 metros por 24 metros.

8º) Se quiere vallar un campo rectangular que está junto a un camino. Si la valla del lado del camino cuesta 80€/m y la de los otros lados 10€/m, halla el área del mayor campo rectangular que puede cercarse con 28800 €.

Resolución

Sea x la longitud del lado de la valla que está junto al camino e y la longitud del lado perpendicular.

Planteamiento del problema: $\left[\begin{array}{ll} \text{maximizar } A(x,y) = x\cdot y & \text{función objetivo} \\ s.a \quad 80x+30y = 28800 & \text{restricción} \end{array}\right.$

Despejando de la restricción tenemos: $y = \frac{2880-8x}{3}$ [1] y sustituyendo en la función objetivo:

$A(x) = x\cdot\frac{2880-8x}{3} = \frac{1}{3}\cdot(2880x - 8x^2)$ que es la función área dependiente de una sola variable.

Buscamos el máximo de la función $A(x)$:

$A'(x) = \frac{1}{3}\cdot(2880-16x)$; $A'(x) = 0 \iff 2880 - 16x = 0 \iff x = \frac{2880}{16} = 180$ m e $\underbrace{y = 480}_{[1]}$ m

Comprobamos que, efectivamente, el valor $x = 180$ es máximo de la función área $A(x)$:

$A''(x) = \frac{1}{3}\cdot(-16)$; $A''(180) = -\frac{16}{3} < 0$ Máximo en $x = 180$

El área del mayor campo rectangular que puede cercarse con 28800 € es A =180·480=86400 m^2, y sus dimensiones son 180 m por 480 m.

9º) Un alambre de longitud 3 m de divide en dos partes. Con la primera se construye un cuadrado y con la segunda una circunferencia. Determina cómo debe dividirse el alambre para que la suma de las áreas de las figuras que se forman sea mínima.

Resolución

Sea x la longitud de uno de los trozos e y la del otro.

El lado del cuadrado construido con x metros de alambre es $\frac{x}{4}$ y su área $A_1(x) = \frac{1}{16}x^2$

La longitud de la circunferencia de radio r construida con y metros de alambre es $2\pi r = y$.

Despejando de esta última igualdad, obtenemos el radio del círculo $r = \frac{y}{2\pi}$ en función de y; su área será, por tanto $A_2(y) = \pi r^2 = \pi\left(\frac{y}{2\pi}\right)^2 = \frac{1}{4\pi}y^2$

La suma de las áreas de las figuras construidas es $A(x,y) = A_1(x) + A_2(y) = \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4\pi}y^2$

Planteamiento del problema: $\left[\begin{array}{lll} minimizar \ \ A(x,y) = \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4\pi}y^2 & & función\ objetivo \\ s.a \quad x + y = 3 & & restricción \end{array}\right.$

Despejando de la restricción tenemos: $y = 3 - x$ [1] y sustituyendo en la función objetivo:

$A(x) = \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4\pi}(3-x)^2$ que es la función área dependiente de una sola variable.

Buscamos el mínimo de la función $A(x)$:

$A'(x) = \frac{1}{8}x - \frac{1}{2\pi}(3-x)$; $A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}x = \frac{1}{2\pi}(3-x) \Leftrightarrow x = \frac{12}{\pi+4}$ m

Comprobamos que, efectivamente, el valor $x = \frac{12}{\pi+4}$ es mínimo de la función área $A(x)$:

$A''(x) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi}$; $A''\left(\frac{12}{\pi+4}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi} > 0$ Mínimo en $x = \frac{12}{\pi+4}$ m

Sustituyendo en [1] obtenemos $y = \frac{3\pi}{\pi+4}$ m

Los trozos en los que hay que dividir el alambre, para que la suma de las áreas de las figuras que se forman sea mínima, miden $x = \frac{12}{\pi+4} \cong 1{,}68$ metros e $y = \frac{3\pi}{\pi+4} \cong 1{,}32$ metros.

10º) Una ventana normanda está formada por un rectángulo cuya parte superior se ha sustituido por un triángulo isósceles cuya altura es 3/8 de la longitud de la base. Queremos, además, que el perímetro de la ventana sea 30 cm. Calcula las dimensiones de la ventana para que el flujo de luz sea máximo.

11º) Una hoja de papel rectangular debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes, superior e inferior y derecho e izquierdo, deben ser de 2 cm y 1 cm respectivamente. Halla las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.

12º) Lanzamos al mercado una nueva bebida y la presentamos en latas cilíndricas de medio litro de capacidad. ¿Cuáles son las dimensiones de la lata más económica ?.

Resolución

Sea r el radio de la base del cilindro y h su altura.

La lata más económica, de volumen 500 cm^3, será la que tiene área total mínima.

Planteamiento del problema $\left[\begin{array}{lll} minimizar \ \ A_T(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h & & función\ objetivo \\ s.a \quad \pi r^2 h = 500 & & restricción \end{array}\right.$

Despejando de la restricción tenemos: $h = \frac{500}{\pi r^2}$ [1] y sustituyendo en la función objetivo:

$A_T(r) = 2\pi r^2 + \frac{1000}{r}$ que es la función área total dependiente de la variable r.

Buscamos el máximo de la función $A_T(r)$:

$A_T'(r) = 4\pi r - \frac{1000}{r^2}$; $A_T'(r) = 0 \Leftrightarrow 4\pi r = \frac{1000}{r^2} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}$ cm y $\underbrace{h = \frac{20}{\sqrt[3]{4\pi}}}_{[1]}$ m

Comprobamos que, efectivamente, el valor $r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}$ es mínimo de la función área $A_T(r)$:

$A_T''(r) = 4\pi + \frac{2000}{r^3}$; $A_T''\left(\sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}\right) > 0$ Mínimo en $r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}$

Las dimensiones de la lata más económica son las del cilindro de radio de la base $r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} \cong 4{,}301$ cm y altura $h = \frac{20}{\sqrt[3]{4\pi}} \cong 8{,}603\ cm$

13º) Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en un semicírculo de radio r=2 cm.

14º) Aprovechando como hipotenusa una valla de $\sqrt{200}$ m de longitud, se desea acotar una superficie triangular de área máxima. ¿ Qué medidas deberán tener los otros dos lados ?.

Solución

10 metros cada uno

15º) Halla las dimensiones de una piscina de base cuadrada de 200 m^3 de capacidad de forma que el coste del revestimiento sea mínimo.

Resolución

Sea x la longitud del lado de la base cuadrada e y la altura de la piscina.

El coste del revestimiento es mínimo cuando el área total de la piscina también lo sea.

Planteamiento del problema: $\left[\begin{array}{ll} minimizar\ \ A_T(x,y) = x^2 + 4xy & \textit{función objetivo} \\ s.a\ \ x^2 \cdot y = 200 & \textit{restricción} \end{array}\right.$

Despejando de la restricción tenemos: $y = \frac{200}{x^2}$ [1] y sustituyendo en la función objetivo:

$A_T(x) = x^2 + \frac{800}{x}$ que es la función área dependiente de una sola variable.

Buscamos el máximo de la función $A_T(x)$:

$A_T{}'(x) = 2x - \frac{800}{x^2}$; $A_T{}'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{800}{x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{400} = 2\sqrt[3]{50}$ m e $\underbrace{y = \sqrt[3]{50}}_{[1]}$ m

Comprobamos que, efectivamente, el valor $x = 2\sqrt[3]{50}$ es mínimo de la función área $A_T(x)$:

$A_T{}''(x) = 2 + \frac{1600}{x^3}$; $A_T{}''\left(2\sqrt[3]{50}\right) > 0$ Mínimo en $x = 2\sqrt[3]{50}$

Las dimensiones de la piscina de 200 m^3 de capacidad y coste del revestimiento mínimo deben ser: la base, un cuadrado de $2\sqrt[3]{50} \cong 7{,}386$ metros de lado y la altura $y = \sqrt[3]{50} \cong 3{,}684$ metros.

16º) Un jardinero debe construir un parterre en forma de sector circular con perímetro 20 m. ¿ Cuál será el radio que debe tomar si quiere que el área encerrada sea máxima ?. ¿ Cuál será la amplitud en radianes ?.

Resolución

Sea r el radio, en metros, del sector circular y α la amplitud en grados sexagesimales.

Planteamiento del problema: $\left[\begin{array}{ll} maximizar\ \ A(r,\alpha) = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} & \textit{función objetivo} \\ s.a\ \ \ \ 2r + \frac{\pi r \alpha}{180} = 20 & \textit{restricción} \end{array}\right.$

Despejando de la restricción tenemos: $\alpha = \frac{360(10-r)}{\pi r}$ [1] y sustituyendo en la función objetivo:

$A(r) = 10r - r^2$ que es la función área dependiente de una sola variable.

Buscamos el máximo de la función A(x):

$A'(x) = 10 - 2r$; $A'(x) = 0 \Leftrightarrow 10 - 2r = 0 \Leftrightarrow r = 5$ m y $\underbrace{\alpha = \frac{360}{\pi}}_{[1]}$ grados

Comprobamos que, efectivamente, el valor $r = 5$ es máximo de la función área A(r):

$A''(r) = -2$; $A''(5) = -2 < 0$ Máximo en $r = 5$

El radio del sector circular de área máxima y perímetro 20 metros debe tener radio $r = 5$ metros y amplitud $\alpha = 2$ radianes.

17º) Una persona se encuentra en la orilla de un río de 50 m de ancho my quiere alcanzar un punto de la otra orilla situado 200 m río abajo. Su velocidad por tierra es 6 Km/h y por el agua de 2 Km/h. ¿Qué distancia debe recorrer por la orilla para alcanzar su objetivo lo antes posible ? (Nota: las orillas se suponen rectas y paralelas)

18º) El coste de un marco para una ventana rectangular es de 50 euros por cada metro de lado vertical y de 25 euros por cada metro de lado horizontal. Se desea construir una ventana de superficie igual a $2m^2$. Calcúlense sus dimensiones (largo y alto) para que el marco sea lo más

barato posible. Calcúlese el precio mínimo del marco de dicha ventana.
Selectividad: Madrid Septiembre 2010 Opción A Fase General

19º) Se desea fabricar un acuario con base cuadrada y sin tapa, de capacidad 500 dm3. La base y las paredes del acuario han de estar realizadas en cristal. ¿Cuáles deben ser sus medidas para minimizar la superficie total del cristal empleado?
Selectividad: Madrid Septiembre 2008 Opción A

20º) Una empresa ha decidido mejorar su seguridad instalando 9 alarmas. Un especialista en el tema señala que dada la estructura de la empresa sólo puede optar por dos tipos de alarmas, de tipo A o de tipo B; además, afirma que la seguridad de la empresa se puede expresar como el producto entre el número de alarmas de tipo A instaladas y el cuadrado del número de alarmas instaladas de tipo B. ¿Cuántas alarmas de cada tipo se deben instalar en la empresa para maximizar su seguridad? Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta.

Solución

3 alarmas tipo A y 6 alarmas tipo B