Planteamiento y resolución de los problemas de optimización

Se quiere construir una caja, sin tapa, partiendo de una lámina rectangular de 32 cm de larga por 24 de ancha. Para ello se recortará un cuadradito en cada esquina y se doblará. ¿Cuál debe ser el lado del cuadradito cortado para que el volumen de la caja resultante sea máximo?

A partir del enunciado puede seguirse el proceso que se detalla a continuación:

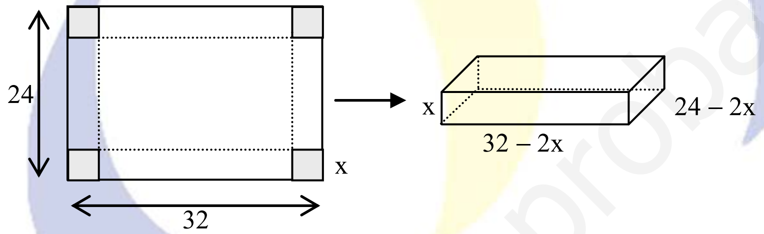
1. Determinar el objetivo del problema: lo que hay que hacer máxima o mínima.

En el ejemplo anterior el objetivo es que el *volumen de la caja sea máximo.*

2. Expresar en forma de función tal objetivo.

La caja es un prisma rectangular: volumen = área de la base por la altura.

Para mejor comprensión conviene hacer un dibujo.



Si se corta un cuadradito de lado x, el volumen de la caja obtenida será:

$$V = (32 - 2x)(24 - 2x)x \Rightarrow V = 4x^3 - 112x^2 + 768x$$

3. Los puntos máximos o mínimos se encuentran, si existen, entre las soluciones de $V' = 0$.

$$V' = 12x^2 - 224x + 768 = 0 \rightarrow x = \frac{28 \pm \sqrt{208}}{3} \quad \text{(hemos simplificado)}$$

Se obtienen x ≈ 4,53 y x ≈ 14,14

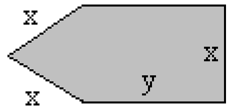
4. Para ver cuál de ellos es el máximo hacemos $V'' = 24x - 224$ y sustituimos.

Como $V''(4{,}53) < 0$ y $V''(14{,}14) > 0$, el máximo se da para x = 4,53. Esta es la solución buscada.

Nota: El valor x = 14,14 no es posible, pues 24 cm no da para cortar dos trozos de tamaño 14,14 cada uno.

PAJ05

1. Se dispone de una tela metálica de 100 metros de longitud para vallar una región como la de la figura. ¿Cuáles son los valores de x e y que hacen que el área encerrada sea máxima? (2,5 puntos)



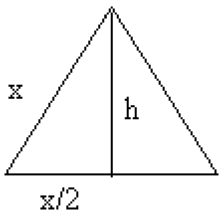
Solución:

Se trata de un problema de optimización.

Objetivo: que el área de la figura sea máxima.

La figura está formada por un triángulo equilátero de lado x y por un rectángulo de lados x e y.

Área del triángulo: $A_T = \dfrac{x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$. Véase la figura.



La altura del triángulo es: $h = \sqrt{x^2 - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

Área del rectángulo: $A_R = xy$

Área total: $A = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2 + xy$

Condición: perímetro de la figura = 100 m $\rightarrow$ 100 = 3x + 2y $\Rightarrow$ $y = 50 - \dfrac{3}{2}x$

Sustituyendo en la expresión anterior, se tiene:

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + 50x - \frac{3}{2}x^2$$

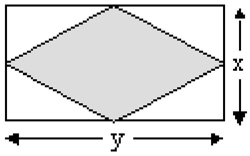
Esta función alcanza el máximo en las soluciones de A´(x) = 0 que hacen negativa a A´´(x).

$$A'(x) = \frac{\sqrt{3}-6}{2}x + 50 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{100}{6-\sqrt{3}} = \frac{100(6+\sqrt{3})}{33}$$

Como $A''(x) = \dfrac{\sqrt{3}-6}{2} < 0$, para ese valor hallado se tendrá el máximo buscado.

El valor de *y* será: $y = 50 - \dfrac{50(6+\sqrt{3})}{11}$.

2. Se dispone de una tela metálica de 100 metros de longitud para vallar una región rectangular. ¿Cuáles son los valores de x e y , dimensiones del rectángulo, que hacen que el área del romboide, formado por la unión de los puntos medios de los lados, sea máxima? (2,5 puntos)



Solución:

Se trata de un problema de optimización.

Objetivo: que el área del romboide sea máxima. Su área es la mitad que la del rectángulo. Por tanto:

Área del romboide: $A_R = \dfrac{x \cdot y}{2}$.

Condición: perímetro del rectángulo = 100 m $\rightarrow$ 100 = 2x + 2y $\Rightarrow$ $y = 50 - x$
Sustituyendo en la expresión anterior, se tiene:

$$A(x) = 25x - \frac{1}{2}x^2$$

Esta función alcanza el máximo en las soluciones de $A'(x) = 0$ que hacen negativa a $A''(x)$.

$$A'(x) = 25 - x = 0 \;\Rightarrow\; x = 25$$

Como $A''(x) = -1 < 0$, para ese valor hallado se tendrá el máximo buscado.
El valor de y será: $y = 25$.

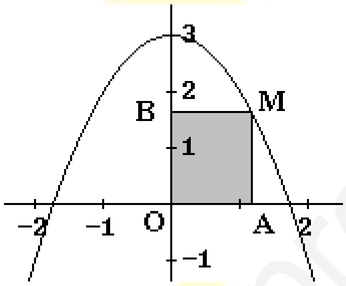
Por tanto, tanto el rectángulo como el romboide son cuadrados. El "rectángulo" tendrá lado 25; el "romboide" será un cuadrado de lado $\dfrac{25}{\sqrt{2}}$.

3. Considera la función $f(x) = 3 - x^2$ y un punto de su gráfica, M, situado en el primer cuadrante ($x \geq 0$, $y \geq 0$). Si por el punto M se trazan paralelas a los ejes de coordenadas, su intersección con OX y OY determina dos puntos, A y B, respectivamente.

a) Haz una gráfica de los elementos del problema.
b) Halla las coordenadas del punto M que hace que el rectángulo OAMB tenga área máxima.

Solución:

a) La curva es una parábola. Puede representarse dando valores.
La situación es la siguiente.



b) Si el punto M = (x, y), las coordenadas de A y B son: A = (x, 0) y B = (0, y).

El área del rectángulo será:

$$S = xy$$

Como $y = 3 - x^2$, sustituyendo se tiene:

$$S(x) = x(3 - x^2) = 3x - x^3$$

El máximo de S(x) se da en las soluciones de $S'(x) = 0$ que hagan negativa a $S''(x)$.

$$S'(x) = 3 - 3x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1 \text{ y } x = -1 \text{ (esta última no vale)}$$

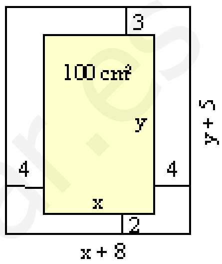
Como $S''(x) = -6x$, se tiene que $S''(1) = -6 < 0$; luego para ese valor de x se tendrá la superficie máxima.

Por tanto M = (1, 2).

4. Una imprenta recibe el encargo de diseñar un cartel con las siguientes características: la zona impresa debe ocupar 100 cm^2, el margen superior debe medir 3 cm, el inferior 2 cm, y los márgenes laterales 4 cm cada uno.
Calcula las dimensiones que debe tener el cartel de modo que se utilice la menor cantidad de papel posible.

Solución:

Si las dimensiones de la parte impresa son x por y, el cartel será como el que dibujamos.



La cantidad de papel que se necesita, y que se desea que sea mínima, es:

$S = (x + 8)(y + 5)$

Con la condición de que $xy = 100 \Rightarrow y = 100/x$

Sustituyendo en S, queda:

$$S(x) = (x+8)\left(\frac{100}{x}+5\right) \Rightarrow S(x) = 5x + \frac{800}{x} + 140$$

Esta función es mínima en las soluciones de $S' = 0$ que hacen positiva a S''.

$$S'(x) = 5 - \frac{800}{x^2} \Rightarrow S''(x) = \frac{1600}{x^3}$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 160 \Rightarrow x = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} \Rightarrow y = \frac{100}{4\sqrt{10}} = 2{,}5\sqrt{10}$$

Como para ese valor S'' es positiva se tiene la solución mínima buscada.

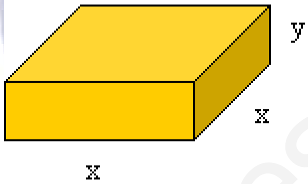
Las dimensiones del cartel deben ser:

ancho: $x + 8 = 8 + 4\sqrt{10}$

alto: $y + 5 = 5 + 2{,}5\sqrt{10}$

5. De todos los prismas rectos de base cuadrada y tales que el perímetro de una cara lateral es de 30 cm, halla las dimensiones del que tiene volumen máximo.

Solución:



Si x es el lado de la base e y la altura del prisma, el volumen será $V = x^2y$. Esta es la función que se desea hacer máxima. Se sabe que $2x + 2y = 30 \Rightarrow y = 15 - x$.

Luego

$$V(x) = x^2y = x^2(15 - x) = 15x^2 - x^3$$

El máximo de V se da en la solución de $V' = 0$ que hace negativa a V''.

$$V'(x) = 30x - 3x^2 = 3x(10 - x); \qquad V''(x) = 30 - 6x$$

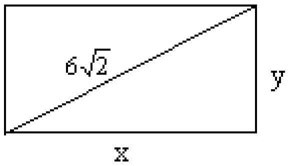
La derivada se anula para x = 0 y x = 10. Como $V''(!0) = -30 < 0$, para ese valor se tiene el máximo buscado.

Las dimensiones serán $10 \times 10 \times 5$; y el volumen 500 cm^3.

6. De todos los rectángulos de diagonal $6\sqrt{2}$, encontrar las dimensiones del de perímetro máximo.

Solución:

Los rectángulos son de la forma



Su perímetro es P = 2x + 2y, siendo la relación entre los lados $x^2 + y^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2$.

Despejando ($y = \sqrt{72 - x^2}$) y sustituyendo en P queda:

$$P(x) = 2x + 2\sqrt{72 - x^2}$$

El máximo de P se obtiene en las soluciones de P´(x) que hacen negativa a P´´(x).

$$P'(x) = 2 + \frac{2(-2x)}{2\sqrt{72 - x^2}} = 2 - \frac{2x}{\sqrt{72 - x^2}} = 0 \;\Rightarrow\; 2x = 2\sqrt{72 - x^2} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; x^2 = 72 - x^2 \;\Rightarrow\; x = 6$$

En vez de hacer P´´(x), porque resulta engorrosa, podemos estudiar el signo de P´(x) a izquierda y derecha de x = 6. Así,

si $x < 6$, $P'(x) > 0 \;\rightarrow\;$ P(x) es creciente.

si $x > 6$, $P'(x) < 0 \;\rightarrow\;$ P(x) es decreciente

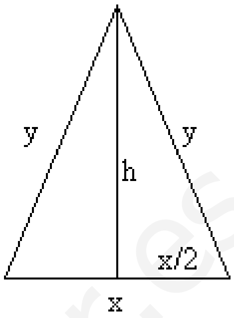
Como la función crece a la izquierda de x = 6 y decrece a su derecha, para x = 6 se da el máximo de P(x).

Si el lado x = 6, el otro lado vale también 6. Así pues, se trata de un cuadrado de lado 6.

7. Calcular la base y la altura de un triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

Solución:

Sea el triángulo de la figura.



Su perímetro vale 8 $\Rightarrow$ 2y + x = 8 $\Rightarrow$ $y = \dfrac{8-x}{2}$

Por Pitágoras: $y^2 = h^2 + \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \sqrt{y^2 - \dfrac{x^2}{4}}$

Sustituyendo el valor de $y = \dfrac{8-x}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{64-16x+x^2}{4} - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{16-4x}$$

El área del triángulo es $A = \dfrac{x \cdot h}{2}$.

Sustituyendo h por su valor, $A(x) = \dfrac{x\sqrt{16-4x}}{2} = \sqrt{4x^2 - x^3}$

Para que A sea máxima: A´(x) = 0 y A´´(x) < 0:

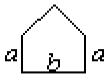
$$A'(x) = \frac{8x-3x^2}{2\sqrt{4x^2-x^3}} = 0 \Rightarrow 8x - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 8/3$$

En vez de calcular la derivada segunda, que resulta muy engorroso, estudiamos el crecimiento y el decrecimiento de A(x).

Para x < 0 no tiene sentido ver el signo de A´.
Para 0 < x < 8/3, A´(x) > 0 $\Rightarrow$ A(x) crece.
Para x > 8/3, A´(x) < 0 $\Rightarrow$ A(x) decrece.

Como la función crece a la izquierda de x = 8/3 y decrece a su derecha, en x = 8/3 se da el máximo.

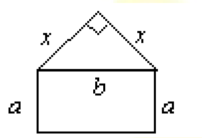
Por tanto, la base pedida es x = 8/3, mientras que la altura valdrá $h = \sqrt{16 - 4(8/3)} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

8. El perímetro de la ventana del dibujo mide 6 metros. Los dos lados superiores forman entre sí un ángulo de 90º. 

Calcula la longitud de los lados *a* y *b* para que el área de la ventana sea máxima.

Solución:

Suponemos que los dos lados superiores son iguales (el enunciado no lo dice, pero así lo sugiere la figura). Si su medida es x se tendrá:



Por Pitágoras:

$$x^2 + x^2 = b^2 \;\Rightarrow\; x = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

El perímetro es: $2a + b + 2x = 6 \;\rightarrow\; 2a + b + \dfrac{2b}{\sqrt{2}} = 6 \;\Rightarrow\; a = \dfrac{6 - b(1+\sqrt{2})}{2}$

El área de la ventana es la suma del área de la sección rectangular más la de la sección triangular:

$$A = ab + \frac{x^2}{2} = \frac{6 - b(1+\sqrt{2})}{2}\cdot b + \frac{b^2}{4} \;\Rightarrow\; A(b) = \frac{12b - (1+2\sqrt{2})b^2}{4}$$

Para que A sea máxima: $A' = 0$; $A'' < 0$.

$$A'(b) = \frac{12 - 2(1+2\sqrt{2})b}{4} = 0 \;\Rightarrow\; b = \frac{6}{1+2\sqrt{2}}$$

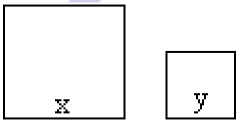
$A''(b) = -\dfrac{(1+2\sqrt{2})}{2} < 0 \rightarrow$ luego, para el valor de *b* hallado se tiene el máximo de A.

Si $b = \dfrac{6}{1+2\sqrt{2}} \rightarrow a = \dfrac{6 - \dfrac{6(1+\sqrt{2})}{1+2\sqrt{2}}}{2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}}$

9. Tenemos que hacer dos chapas cuadradas de dos distintos materiales. Los dos materiales tienen precios respectivamente de 2 y 3 euros por centímetro cuadrado. ¿Cómo henos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo y si además nos piden que la suma de los perímetros de los dos cuadrados ha de ser de un metro? (2,5 puntos)

Solución:

Sean los cuadrados siguientes:



Perímetro = $4x + 4y = 100$ cm

Superficie = $x^2 + y^2$

Coste = $2x^2 + 3y^2$

Despejando y en la ecuación del perímetro: $y = \dfrac{100 - 4x}{4} = 25 - x$

Sustituimos en la expresión del coste:

$$C(x) = 2x^2 + 3(25 - x)^2 \;\Rightarrow\; C(x) = 5x^2 - 150x + 1875$$

El coste será mínimo en la solución de $C'(x) = 0$ que haga positiva $C''(x)$.

$$C'(x) = 10x - 150 = 0 \;\Rightarrow\; x = 15$$

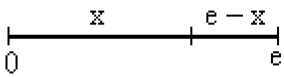
Como $C''(x) = 10 > 0$, para ese valor de $x = 15$ se obtiene el mínimo buscado.

Por tanto, los lados deben ser de 15 cm y de 25 – 15 = 10 cm.

10. Descomponer el número *e* en dos sumandos positivos de forma que la suma de los logaritmos neperianos de los sumandos sea máxima (1,5 puntos). Calcular dicha suma (1 punto)

Solución:

Sean los sumandos x y e –x:



Se desea que S(x) = ln x + ln(e – x) sea máxima.

El máximo se da en las soluciones de S´(x) = 0 que hacen negativa a S´´(x).

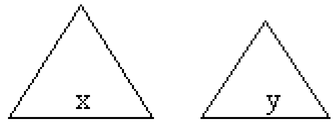
$$S'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e-x} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{e-x}{x(e-x)} - \frac{x}{x(e-x)} = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{e - x - x = 0} \;\Rightarrow\; x = \frac{e}{2}$$

Como $S''(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{(e-x)^2}$ es suma de dos números negativos, S´´(x) < 0 para cualquier valor de x; en consecuencia, para $x = \frac{e}{2}$ se tendrá el máximo buscado.

La suma pedida es:

$$S = \ln\frac{e}{2} + \ln\frac{e}{2} = 2\ln\frac{e}{2} = 2(\ln e - \ln 2) = 2 - 2\ln 2$$

11. Con 60 centímetros de alambre se construyen dos triángulos equiláteros cuyos lados miden x e y. ¿Qué valores de x e y hacen que la suma de las áreas de los triángulos sea mínima. (2,5 puntos)



Solución:

La altura del triángulo de lado x es:

$$h_x = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

la del triángulo de lado y es, $h_y = \frac{\sqrt{3}}{2}y$

Se cumple que 3x + 3y = 60 $\Rightarrow$ y = 20 – x

Se desea que

$$S = S_x + S_y = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} + \frac{y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 + y^2)$$

sea mínima.

Sustituyendo y = 20 – x, se tiene: $S = \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 + (20 - x)^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}(2x^2 - 40x + 400)$

Para que S sea mínima: S´= 0 y S´´ > 0:

$$S' = \frac{\sqrt{3}}{2}(x - 10) = 0 \Rightarrow x = 10$$

Como $S'' = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$, para ese valor de x = 10 se tiene el mínimo buscado.

En consecuencia, los lados será x = 10 e y = 10; o sea, dos triángulos equiláteros iguales.

12. Expresa el número 60 como suma de tres números positivos de forma que el segundo sea doble del primero.
Si el producto de los tres es máximo, determina el valor de dicho producto.

Solución:

Sean x, y, z los números.

Se sabe que $y = 2x$; y que $x + y + z = 60 \Rightarrow 3x + z = 60 \Rightarrow z = 60 - 3x$

El producto de los tres números es:

$$P = xyz = x \cdot 2x \cdot (60 - 3x) = -6x^3 + 120x^2$$

El producto en función de x es: $P(x) = -6x^3 + 120x^2$

Este producto es máximo en los valores de x que cumplen que $P'(x) = 0$ y $P''(x) > 0$

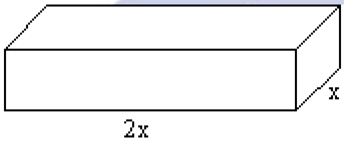
$$P'(x) = -18x^2 + 240x = 6x(-3x + 40) = 0 \Rightarrow x = 0; \; x = 40/3.$$

Como $P''(x) = -36x + 240$ se tiene que $P''(40/3) = -120 < 0$. Por tanto, el producto será máximo cuando $x = 40/3$.

Los otros dos números son $y = 2x = 80/3$; $z = 20$.

El producto máximo es $P = \frac{40}{3} \cdot \frac{80}{3} \cdot 20 \approx 7111{,}11$

13. Se desea construir un paralelepípedo rectangular de 9 litros de volumen y tal que un lado de la base sea doble que el otro. Determinar las longitudes de sus lados para que el área total de sus 6 caras sea mínima.



Solución:

Si su altura es h, el volumen de este paralelepípedo vale:

$V = 2x \cdot x \cdot h = 2x^2h$

El área total de sus 6 caras es:

$$A = 2 \cdot (2x \cdot x) + 2 \cdot (2x \cdot h) + 2 \cdot (x \cdot h) \Rightarrow A = 4x^2 + 6xh$$

Como $V = 2x^2h = 9 \Rightarrow h = \dfrac{9}{2x^2}$

Sustituyendo en A:

$$A(x) = 4x^2 + \frac{27}{x}$$

Esta función es mínima en las soluciones de $A' = 0$ que hacen positiva a A''.

$$A'(x) = 8x - \frac{27}{x^2} = 0 \Rightarrow 8x^3 - 27 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$$

Como $A''(x) = 8 + \dfrac{54}{x^3} > 0$ para todo $x > 0$, para $x = \dfrac{3}{2}$ se tiene la solución mínima.

Por tanto, el lado más largo valdrá 3, y la altura $h = \dfrac{9}{2(3/2)^2} = 2$

14. Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ se pide:

a) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a, f(a))$ para $a > 0$.

b) (1 punto). Hallar los puntos de corte de la recta tangente hallada en el apartado a) con los dos ejes coordenados.

c) (1 punto). Hallar el valor de $a > 0$ que hace que la distancia entre los dos puntos hallados sea mínima.

Solución:

a) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es:

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

En este caso:

$$f(x)=\frac{1}{x} \rightarrow f(a)=\frac{1}{a}$$

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2} \rightarrow f'(a)=-\frac{1}{a^2}$$

Se tendrá: $y-\dfrac{1}{a}=-\dfrac{1}{a^2}(x-a) \Rightarrow y=-\dfrac{1}{a^2}x+\dfrac{2}{a}$

b) Corte con eje OY, (se hace x = 0) $\Rightarrow$ $y=\dfrac{2}{a}$. Punto $\left(0,\dfrac{2}{a}\right)$.

Corte con eje OX, (la y = 0) $\Rightarrow$ $0=-\dfrac{1}{a^2}x+\dfrac{2}{a}$. $\Rightarrow$ $x=2a$. Punto $(2a,0)$.

c) La distancia entre los dos puntos de corte es:

$$d=\sqrt{(2a)^2+\left(\frac{2}{a}\right)^2}=\sqrt{4a^2+\frac{4}{a^2}}$$

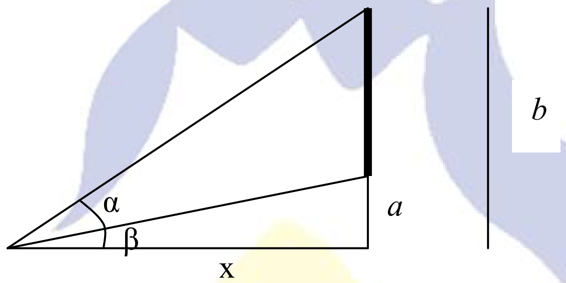
Esta distancia será mínima cuando lo sea su cuadrado, $d^2=D=4a^2+\dfrac{4}{a^2}$.

El valor mínimo se da en las soluciones de D´= 0 que hagan D´´ > 0.
(Derivamos con respecto a a.)

$$D'=8a-\frac{8}{a^3}=0 \Rightarrow 8a^4-8=0 \Rightarrow a=1 \text{ (la solución } a=-1 \text{ se descarta)}$$

Como $D''=8+\dfrac{24}{a^4}>0$, para $a = 1$ se dará el valor mínimo.

Un observador se encuentra frente a un cuadro colgado de una pared vertical. El borde inferior del cuadro está situado a una distancia a sobre el nivel de los ojos del observador, el borde superior a una distancia b. ¿A qué distancia de la pared debe situarse el observador para que el ángulo bajo el que ve el cuadro sea el máximo?



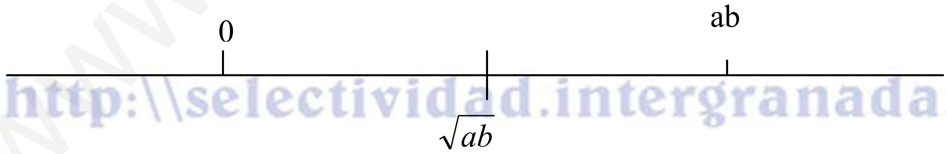
$tag(\alpha+\beta)=\frac{b}{x}$; $\frac{tag\alpha+tag\beta}{1-tag\alpha.tag\beta}=\frac{b}{x}$ puesto que $tag\beta=\frac{a}{x}$, resulta:

$(tag\alpha+\frac{a}{x})x=(1-tag\alpha.\frac{a}{x})b$; $tag\alpha(x+\frac{ab}{x})=b-a$; $tag\alpha=\frac{(b-a)x}{x^2+ab}$

$\alpha=arctag\frac{(b-a)x}{x^2+ab}$; como lo que hay que maximizar es α ya tenemos la función a derivar para calcular el extremo. Derivando se obtiene:

$$\frac{d\alpha}{dx}=\frac{\frac{(b-a)(x^2+ab)-2x^2(b-a)}{(x^2+ab)^2}}{1+\left[\frac{(b-a)x}{x^2+ab}\right]^2}=0; \quad \text{de donde} \quad (b-a)(-x^2+ab)=0$$

$x=\pm\sqrt{ab}$ que en nuestro caso solo nos servirá la solución positiva, es decir $\sqrt{ab}$ que lo estudiamos en el dominio de la función que es R.

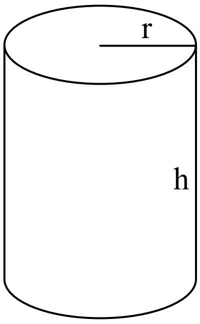


La derivada en 0 es positiva pues viene determinada por el signo de la expresión ab(b-a) que es positiva toda vez que b>a y ambos son positivos.
La derivada en ab es negativa pues viene determinada por el signo de la expresión $ab-(ab)^2 < 0$.

Hay un máximo.[1]

[1] A partir de este momento no volveremos a comprobar si el valor que anula la derivada determina un máximo o un mínimo salvo que haya necesidad de discernir. Damos por hecho la optimización establecida en el enunciado del problema.

Determinar la razón entre el radio de la base y la altura de un cilindro que, con el volumen dado, tenga la superficie total mínima.



$$V = \pi r^2 h \quad ; \quad h = \frac{V}{\pi r^2}$$

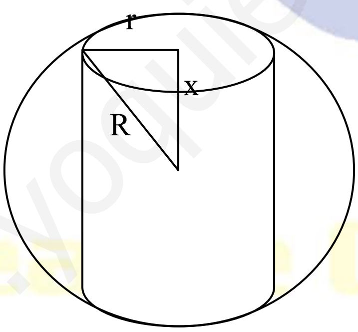
$$S_T = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

$$S_T = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2$$

Si la superficie total ha de ser mínima, la derivada respecto al radio se anula en dicho mínimo, es decir:

$\frac{-2V}{r^2} + 4\pi r = 0$ de donde, $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ y $h = \frac{V}{\pi \sqrt[3]{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2}}$ por tanto la relación entre el radio y la altura es $\frac{r}{h} = \frac{1}{2}$

Hallar el área total máxima de un cilindro inscrito en una esfera de radio R.



$A = 2\pi r^2 + 4\pi r x$, $R^2 = x^2 + r^2$ $x = \sqrt{R^2 - r^2}$

$A = 2\pi r^2 + 4\pi r\sqrt{R^2 - r^2}$; derivando e igualando a 0, se obtiene la ecuación bicuadrada en r:

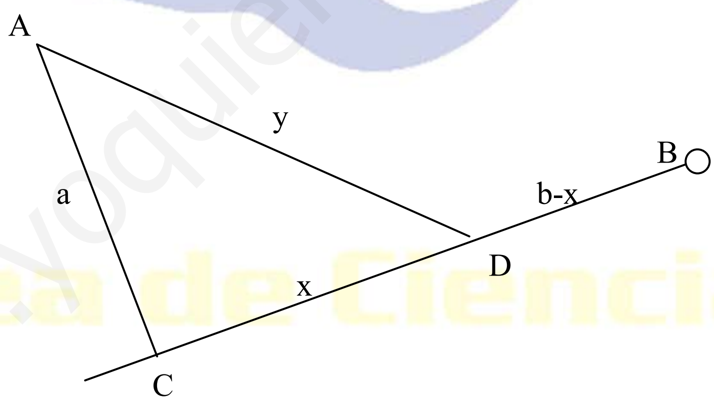
$$5r^4 - 5R^2r^2 + R^4 = 0, \text{ de donde}$$

$r^2 = \left(\frac{5 \pm \sqrt{5}}{10}\right)R^2$ Obtenemos para r dos posibles soluciones $r = R\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)}$ y

$r = R\sqrt{\left(\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}\right)}$, cuyos respectivos valores de x son $x = R\sqrt{\left(\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}\right)}$ y $x = R\sqrt{\left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}\right)}$

Veamos entonces cuánto vale el área lateral en ambos casos:
En el primer caso el área vale: $\pi R^2(1+\sqrt{5})$
En el segundo caso el área vale: $\pi R^2(1+\frac{3}{5}\sqrt{5})$ que es inferior a la anterior. Por tanto la solución es: $\pi R^2(1+\sqrt{5})$

La fábrica A debe unirse mediante una carretera con una línea férrea rectilínea en la que se encuentra el poblado B. La distancia AC desde la fábrica hasta el ferrocarril es igual a a, en tanto que la distancia BC por el ferrocarril es igual a b. El costo del transporte de las mercancías por la carretera es k veces (k>1) mayor que por el ferrocarril. ¿En que punto D del segmento BC hay que trazar la carretera desde la fábrica para que el costo del transporte de las mercancías desde la fábrica A hasta el poblado B sea el mínimo?



Si supongo que el precio por unidad de distancia por tren es 1, por carretera es k.
Por tanto la función coste es:

$$k.y + b-x$$

Ahora bien $y = \sqrt{x^2+a^2}$, por tanto la función coste es:

$$C(x) = k\sqrt{x^2+a^2} + b - x$$

$$C'(x)=\frac{kx}{\sqrt{x^2+a^2}}-1 \quad ; \quad C'(x)=0 \text{ implica } x=\frac{a}{\sqrt{k^2-1}}$$

por tanto el punto D ha de estar del pueblo B a una distancia por la línea del ferrocarril igual a

$$b-\frac{a}{\sqrt{k^2-1}}$$

A 10 Km de tu casa te acuerdas que te has dejado el agua corriendo, lo que te cuesta 10 ptas. la hora. Volver a casa a una velocidad constante de x Km/h te cuesta en combustible 9+(x/10) ptas. el Km.
a) ¿Cuánto te cuesta volver a casa a x km/h (en combustible)?
b) ¿Cuánto tiempo tardas en llegar a casa si viajas a esa velocidad?
c) ¿Cuánto te cuesta el consumo de agua mientras regresas a casa?
d) ¿A qué velocidad debes regresar a casa para que el coste total de consumo de agua y combustible sea mínimo.

SOLUCION:

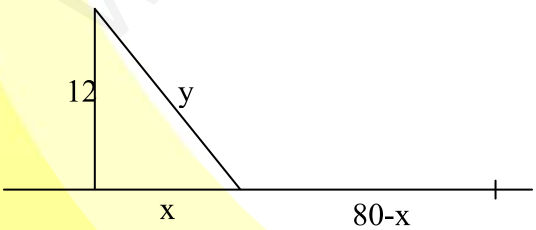
a) 10 [9+(x/10)] = 90 + x pesetas.

b) t = 10/x horas

c) 100/x pesetas

d) 100/x + 90+x ha de ser minimo; derivando $-100/x^2 + 1 = 0$: de donde x= 10 Km/h

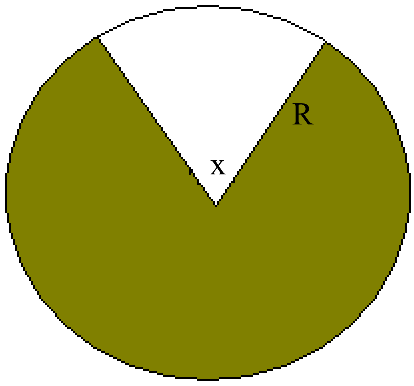
Una fábrica situada a 12 Km. de la orilla de un río rectilíneo, ha de transportar sus producto a una ciudad situada en la orilla del río y a 80 Km del punto de éste más próximo de la fábrica. El transporte de mercancías en camión cuesta 130 ptas por tonelada y km y el transporte en gabarra por el río cuesta 50 ptas. por tonelada y km. ¿En qué punto de la orilla se debería cargar la mercancía en gabarras para que el coste total del transporte sea mínimo?

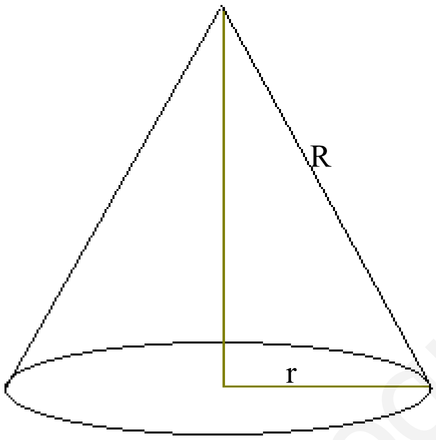


$y=\sqrt{144+x^2}$ Coste = 130. $\sqrt{144+x^2}$ + 50 (80-x) ; derivando se obtiene

$$\frac{130x}{\sqrt{144+x^2}}-50=0; \quad x=5\ Km.$$

De una chapa redonda de hojalata se corta un sector circular que se enrolla en forma de un embudo cónico. ¿Cuál debe ser el ángulo del sector para que el embudo tenga el volumen máximo?





El perímetro de la base del cono es 2πR-Rx = R(2π-x) y dado que a su vez es 2πr, resulta que:

$$r = \frac{R(2\pi - x)}{2\pi}$$

la altura del cono es $\sqrt{R^2 - r^2}$

Así pues el volumen es V = $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{R(2\pi - x)}{2\pi}\right)^2 . \sqrt{R^2 - r^2}$, sustituyendo r por su valor en función de x, derivando respecto a x e igualando a 0 se obtiene que

$$x = 2\pi\left(\frac{3-\sqrt{6}}{3}\right)$$

por tanto el ángulo que determina el vaso cónico es $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$

Un granjero compra una ternera de 270 Kg por 18000 ptas. Alimentar al animal cuesta 15 ptas al día y la ternera aumenta de peso 0,45 Kg cada día. Por otro lado, cada día que pasa, el valor del animal en el mercado disminuye, de modo que el valor al cabo de t días, dependiendo del peso del animal es (100-(t/18)) ptas por Kilo. Calcular:

a) Peso de la ternera al cabo de t días
b) Valor total de la ternera en el mercado al cabo de t días.
c) Coste total invertido en esos t días, incluyendo la compra y la alimentación.
d) Ganancia obtenida por el granjero si vende la ternera a los t días (la ganancia será el valor de la ternera en ese instante menos los costes invertidos)
e) ¿Cuándo deben vender la ternera para obtener la máxima ganancia?

a) 270 + 0,45t

b) (100-(t/18))(270 + 0,45t)

c) 18000 + 15 t

d) (100-(t/18))(270 + 0,45t) - (18000 + 15 t)

e) Derivando la expresión d) e igualando a 0, resulta t = $10\sqrt{3}$ días.

Entre todos los rectángulos que tienen el área dada S, hallen aquel que: 1) tenga el menor perímetro; 2) tenga la menor diagonal:

1) Sean x e y la altura y base respectivamente del rectángulo. x.y = S; de donde y = S/x

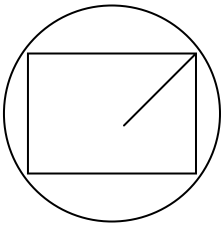
El perímetro P = 2 (x+y) = $\frac{2(x^2+S)}{x}$, cuya derivada es: $\frac{2x^2-2S}{x^2}$, e igualando a 0, resulta la única solución posible $x=\sqrt{S}$ y por tanto $y=\sqrt{S}$

La solución es un cuadrado de lado $\sqrt{S}$

2) La menor diagonal:

$d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{x^4+S^2}{x^2}}$ derivando e igualando a 0, resulta: $x=\sqrt{S}$ y por tanto $y=\sqrt{S}$

Hallar la mayor área del rectángulo inscrito en un círculo de radio R



Sean 2x y 2y la base y altura respectivamente del rectángulo. Obtenemos la relación:

$R^2 = x^2 + y^2$, de donde $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. El Area es entonces $A = \sqrt{R^2x^2 - x^4}$
Derivando e igualando a 0 se obtiene:

$2R^2x - 4x^3 = 0$, por tanto $x = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$, $y = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$

Hallar en la hipérbola $\dfrac{x^2}{2} - y^2 = 1$ ***el punto más próximo al punto (3, 0)***

Sea (x, y) el punto buscado. Hay que hacer la distancia a (3, 0) mínima, es decir

$d = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$; sabemos que $y^2 = \dfrac{x^2}{2} - 1$, con lo que

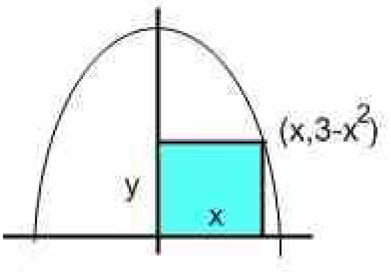
$d = \sqrt{\dfrac{3x^2 - 12x + 16}{2}}$, derivando d e igualando a 0, resulta 6x - 12 = 0, de donde x=2, y por tanto y = ±1. Los puntos buscados son (2,1) y (2,-1)

Hallar en la parábola y = x² ***el punto más próximo al punto (2, 1/2)***

Igual que en ejercicio anterior $d = \sqrt{(x-2)^2 + (x^2 - \tfrac{1}{2})^2}$, derivando e igualando a 0, resulta la ecuación $2(x-2) + (2x^2 - 1).2x = 0$; $4x^3 - 4 = 0$, de donde x = 1, y = 1
Solución: (1,1)

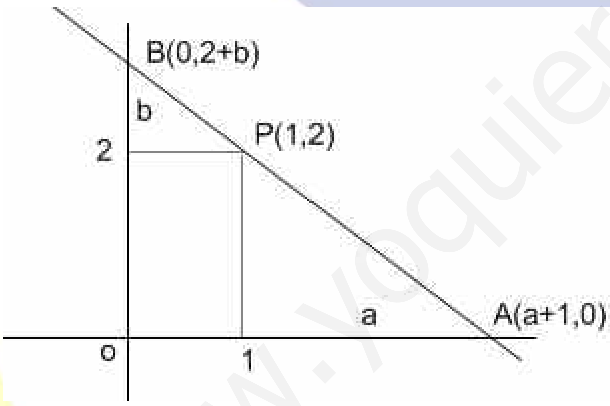
Hallar el área máxima de un rectángulo cuyos dos vértices yacen en los ejes X e Y de un sistema cartesiano de coordenadas, el tercero en el punto (0,0) y el cuarto está en la parábola $y = 3 - x^2$

El area es $x(3-x^2)$, cuya derivada es $3-3x^2$, igualando a 0, $x=\pm 1$. Solo nos vale la solución positiva. El área máxima es 2.



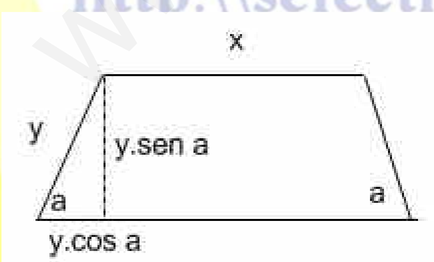
Hallar la pendiente de la recta que pasa por el punto A(1,2) y que corta al primer cuadrante de coordenadas en el triángula de área mínima.

El área del triángulo es $A = \frac{(a+1)(2+b)}{2}$, ahora bien, los triángulos B2P y P1A son semejantes, por tanto b/1 = 2/a. Sustituyendo a por 2/b en la ecuación del área, resulta



que $A = \frac{4+b^2+4b}{2}$, derivando e igualando a 0, resulta $2b^2 - 8 = 0$, por lo que b=2 y a =1, en consecuencia la pendiente de la recta y = mx + n que pasa por (1,2) y por (2,0) es -2. puesto que es el valor de m al resolver el sistema 2=m+n y 0=2m+n

Hallar la longitud del lado del trapecio que tenga el perímetro mínimo entre todos los trapecios isósceles con área prefijada S y ángulo α entre el lado y la base inferior.



En el desarrollo del problema sustituiremos el ángulo a por α

La base menor es x. La base mayor es x + 2y.cos α y la altura es y.sen α

Perímetro = 2(x + y + y.cos α)
El área de un trapecio es la semisuma de las bases por la altura:

S = $\dfrac{(x+x+2y.\cos\alpha)}{2}.ysen\alpha = xysen\alpha + y.\cos\alpha.sen\alpha$, de donde

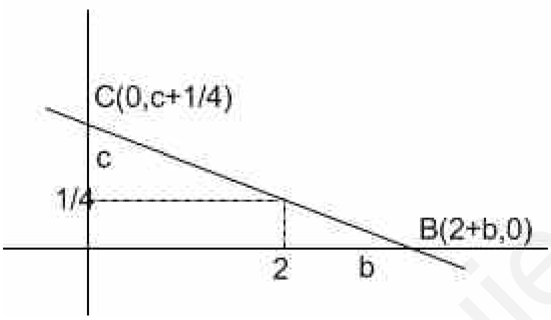
$x = \dfrac{S - y\cos\alpha.sen\alpha}{ysen\alpha}$, sustituyendo x en la fórmula del perímetro se obtiene:

$$P = \left(\frac{S - y\cos\alpha.sen\alpha}{ysen\alpha} + y + y.\cos\alpha\right) = \frac{S + y^2 sen\alpha}{ysen\alpha} = \frac{S}{ysen\alpha} + y$$

Derivando P, se obtiene

$\dfrac{-S}{y^2 sen\alpha} + 1 = 0$, de donde $y = \sqrt{\dfrac{S}{sen\alpha}}$

Por el punto (2, 1/4) se trazan rectas que cortan los semiejes positivos en los puntos B y C. Hallar la ecuación de aquella recta para la que el segmento BC tiene la longitud mínima.



La distancia entre B y C viene dada por $d = \sqrt{(2+b)^2 + (c + 1/4)^2}$

Observemos que por semejanza de triángulos c/2 = 1/4b, de donde c = 1/2b

Sustituyendo en la expresión de la distancia tenemos:

$d = \sqrt{(2+b)^2 + (1/2b + 1/4)^2}$, si derivamos e igualamos a 0 llegamos a la expresión:

$2(2+b) + 2(1/2b + 1/4)(-\dfrac{1}{4b^2}) = 0$, simplificando se obtiene la ecuación

$8b^4 + 16b^3 - b - 2 = 0$ que por Ruffini se descompone en $(b+2)(8b^3 - 1) = 0$.
La solución b=-2 no es válida por tanto la solución es b= 1/2
c = 1.

La ecuación de la recta pedida es $\dfrac{x}{5/2} + \dfrac{y}{5/4} = 1$ o 2x + 4y = 5

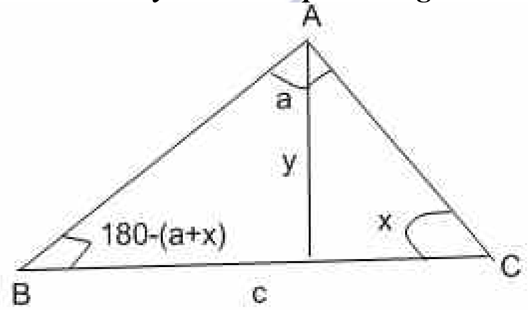
Hallar los ángulos agudos del triángulo rectángulo que tiene el área máxima entre todos los triángulos en los que la suma de las longitudes de uno de los catetos y la hipotenusa es constante.

Sea x un cateto (base del triángulo) e y la hipotenusa. El otro cateto, por el teorema de Pitágoras es $\sqrt{y^2 - x^2}$. El area es $A = \dfrac{x\sqrt{y^2 - x^2}}{2}$. Como x + y = k, y = k-x, de donde

$A=\dfrac{x\sqrt{(k-x)^2-x^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{k^2x^2-2kx^3}}{2}$; Derivando e igualando a 0, se obtiene:

$2k^2x-6kx^2=0;\quad 2kx(k-3x)=0;\quad x=\dfrac{k}{3}$ e $\;y=\dfrac{2k}{3}$, $\quad\cos\alpha$ = x/y = 1/2 . Por tanto α = 60º y β=30º.

Determinar los ángángulos del triángulo ABC de área máxima, si se da la longitud de su base BC y sabemos que el ángulo BAC vale a



En la resolución del problema sustituiremos el valor a del ángulo por α y los 180º los expresamos en radianes por π
Si descomponemos el triángulo en los dos triángulos rectángulos de la figura, obtenemos que los catetos que conforman sus bases se obtienen del cálculo de las tangentes de x y de la tangente de π-(α+x).

Se obtiene entonces:

$c=\dfrac{y}{tagx}+\dfrac{y}{tag(\pi-(\alpha+x))}$, ahora bien tag (π-(α+x)) = - tag (α+x), así pues:

$c=\dfrac{y}{tagx}-\dfrac{y}{tag(\alpha+x)}$; de donde $y=\dfrac{c}{\dfrac{1}{tagx}-\dfrac{1}{tag(\alpha+x)}}$

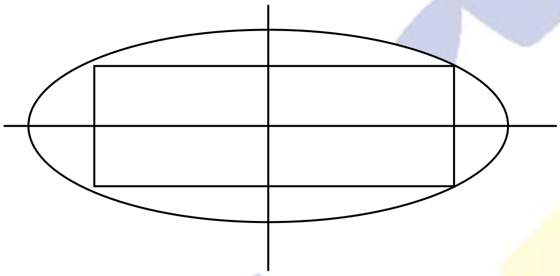
La función a maximizar, el área del triángulo, es:

$A=\dfrac{c^2}{2}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{1}{tagx}-\dfrac{1}{tag(\alpha+x)}}$, si derivamos respecto de x e igualamos a 0, llegamos a la ecuación:

$$tagx=\pm tag(\alpha+x)$$

Dos casos: Si $tagx=tag(\alpha+x)$, entonces α +x = π + x. Solución no válida pues α = π
Si $tagx=-tag(\alpha+x)$, entonces tenemos que α +x = π - x, de donde el ángulo buscado x es $\dfrac{\pi-\alpha}{2}$ y por tanto el tercero es $\dfrac{\pi-\alpha}{2}$

Determinar los lados del rectángulo de área máxima inscrita en la elipse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ***de forma que los lados del rectángulo sean paralelos a los ejes de la elipse.***



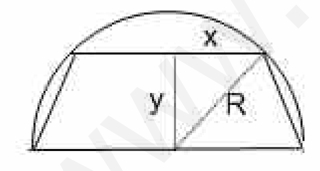
Sea x, la mitad de la base e y la mitad de la altura.
Despejando y de la ecuación de la elipse se tiene:

$y=\sqrt{\frac{a^2b^2-a^2x^2}{a^2}}$. El área del rectángulo es 2x.2y = 4xy, es decir

$4\sqrt{\frac{a^2b^2x^2-a^2x^4}{a^2}}$, derivando respecto a x e igualando a 0, se obtiene la ecuación:

$2a^2b^2x - 4a^2x^3 = 0$, de donde x=0 (No vale) y $x=\sqrt{\frac{2a^2b^2}{4a^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}b$, de donde la base del rectángulo es $\sqrt{2}b$ y la altura es $\sqrt{2}a$

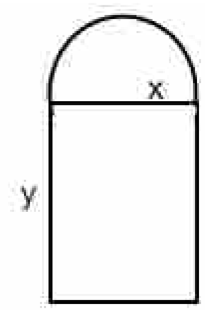
Calcular el área máxima del trapecio inscrito en un semicírculo de radio R, de forma que la base inferior del trapecio sea el diámetro del semicírculo.



$y=\sqrt{R^2-x^2}$ $\quad$ A $=\frac{(2x+2R)}{2}y=\sqrt{(x+R)^2(R^2-x^2)}$, derivando respecto de x e igualando a 0, llegamos a que x=R/2. e y=$\sqrt{\frac{3}{2}}R$

Por tanto el área pedida es: $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$

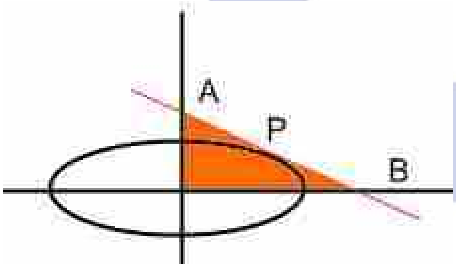
La sección de un túnel tiene la forma de un rectángulo que termina en un semicírculo. Determinar el radio del semicírculo con el que el área de la sección será la máxima si el perímetro de la sección es igual a p.



Si llamamos x al radio del semicírculo e y a la altura del rectángulo, el perímetro $p = 2y + 2x + \pi x$,
El área de la sección es $A = 2xy + \pi x^2/2$
De la primera ecuación tenemos que $y = (p-2x- \pi x)/2$
Por lo que el área queda en función de x del siguiente modo:

$A = px-2x^2-\pi x^2/2$; derivando respecto de x e igualando a 0 se obtiene: $p - 4x - \pi x = 0$, de donde $x = p/(\pi+4)$

¿Por qué punto de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ se debe trazar una tangente de forma que sea la mínima el área del triángulo formado por esta tangente y los semiejes positivos Ox y Oy?



Sea la recta tangente $y=mx + n$
Por tanto A (0,n) y B (-n/m, 0)
El área del triángulo es $-n^2/2m$

Para obtener la relación existente entre m y n partimos del hecho de que la recta es tangente, es decir que solamente tiene un único punto de corte con la elipse, por lo que al resolver el sistema de ambas ecuaciones obtenemos una ecuación de segundo grado en x cuyo discriminante tiene que ser 0, de donde se obtiene que $n=\sqrt{a^2m^2+b^2}$; sustituyendo en la expresión del área, resulta:

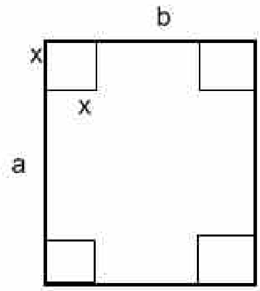
$A=\frac{-a^2m^2-b^2}{2m}$, derivando respecto de m e igualando a 0 tenemos que:

$m=\frac{-b}{a}$; $n=\sqrt{2}b$. De este modo he obtenido la recta tangente que va a hacer mínima el área del triángulo que es $y=\frac{-b}{a}x+\sqrt{2}b$

Como me piden el punto P, hemos de resolver el sistema formado por las ecuaciones de la elipse y de la recta, obteniendo de dicho sistema que

$x=\frac{a}{\sqrt{2}}$; $y=\frac{b}{\sqrt{2}}$ que son las coordenadas respectivamente del punto P.

Una hoja de cartón tiene la forma de un rectángulo con lados a y b. Cortando por sus ángulos cuadrados y doblando las partes sobresalientes de la figura cruciforme, obtenemos una caja abierta por arriba, cuya altura es igual al lado del cuadrado. ¿Cuál debe ser el lado del cuadrado para que el volumen de la caja sea el máximo?



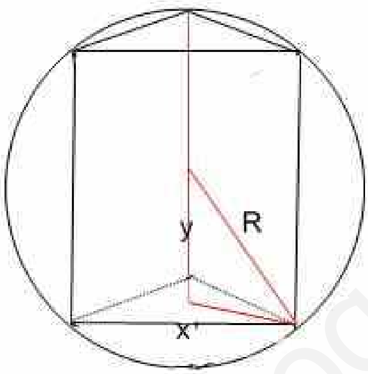
Volumen de la caja es V = (a-2x).(b-2x).x

Derivando respecto de x, otenemos
-2(b-2x)x-2(a-2x).x + (a-2x)(b-2x) = 0
$12x^2$ -(4a+4b)x + ab = 0

$$x = \frac{a+b-(\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}$$

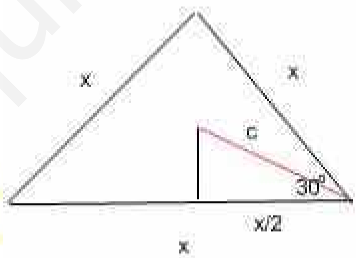
Hallar la altura de un prisma regular triangular de volumen máximo inscrito en una esfera de radio R.

En primer lugar un prisma regular triangular es aquel cuyas bases son sendos triángulos equiláteros y las aristas que determinan la altura son perpendiculares a las bases. Sea x el lado del triángulo. Sea y la mitad de la altura. Obtenemos la siguiente figura:



Vamos a averiguar el cateto del triángulo rectángulo (rojo) cuyo otro cateto e hipotenusa respectivamente son y , R.

Veamos el triángulo que conforma la base:



Como el triángulo es equilátero, la situación es la de la figura. Por tanto $\cos 30º = \frac{x/2}{c}$, de donde c = $\frac{\sqrt{3}}{3}x$

Por tanto la relación entre las dos variables x e y, yendo a la primera figura (triángulo rectángulo rojo) es $y^2 + c^2 = R^2$, o lo que es lo mismo $y^2 + \frac{1}{3}x^2 = R^2$

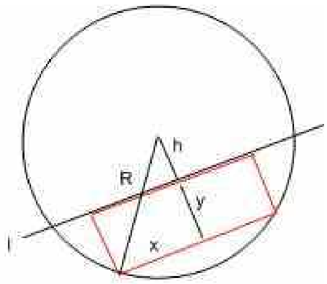
Como el volumen del prisma es Area de la base por la altura. Tenemos:

$V = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2.y$ **.** Sustituyendo x^2 por su valor obtenido en la relación anterior, resulta que

$V = \frac{\sqrt{3}}{2}(3R^2y - 3y^3)$, derivando e igualando a 0 $3R^2 - 9y^2 = 0$, de donde:

$y = \frac{R}{\sqrt{3}}$, por tanto la altura del prisma que hace el volumen máximo es $\frac{2R}{\sqrt{3}}$

Un círculo de radio R está dividido en dos segmentos con la recta l alejada del centro del círculo a una distancia h. Entre todos los rectángulos inscritos en el menor de dichos segmentos, hallar el de área máxima.



El área del rectángulo es 2x.y
La relación entre x e y es: $R^2 = x^2 + (h+y)^2$

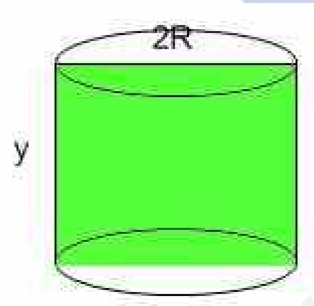
Despejando $x = \sqrt{R^2 - (h+y)^2}$

El área es entonces $2\sqrt{R^2y^2 - (h+y)^2y^2}$

derivando e igualando a 0, se obtiene la ecuación de segundo grado siguiente:

$4y^2 + 6hy + 2(h^2-R^2) = 0$, cuya solución es $y = \dfrac{-3h + \sqrt{h^2 + 8R^2}}{4}$ que es la altura del rectángulo inscrito de área máxima, y por tanto la distancia del centro al lado del rectángulo paralelo a la recta l es $y + h = \dfrac{h + \sqrt{h^2 + 8R^2}}{4}$

Hallar el volumen máximo de un cilindro cuyo perímetro en su sección axial es a.



La sección axial es el rectángulo coloreado, cuyo perímetro es 4R + 2y = a, de donde y = (a-4R)/2.
El volumen del círculo es:

$V = \pi R^2.y$; es decir $V = (a\pi R^2 - 4\pi R^3)/2$, derivando e igualando a 0 se obtiene:
$2a\pi R - 12\pi R^2 = 0$; R = 0 (No vale) y R = a/6. por tanto y =a/6

Así pues, el volumen pedido es $\pi a^3/216$

Calcular el volumen de un cilindro cuya área total es S.
Sirviéndonos de la figura anterior, sea R el radio de la base e y la altura.
$S = 2\pi R^2 + 2\pi Ry$. Por tanto $y = (S-2\pi R^2)/2\pi R$
El volumen es $V = \pi R^2.y = (SR-2\pi R^3)/2$, derivando e igualando a 0: $S - 6\pi R^2 = 0$

de donde $R^2 = S/6\pi$. $y = \dfrac{2\sqrt{S}}{\sqrt{6\pi}}$. El volumen pedido es $V = \dfrac{S\sqrt{S}}{3\sqrt{6\pi}}$

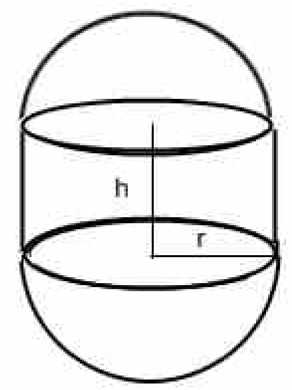
Una lata de conservas tiene forma cilíndrica. Hallar las dimensiones más ventajosas de la lata, es decir determinar la relación entre el diametro de la base y la altura del cilindro con la que tenga el volumen máximo con la superficie total prefijada.

Sirviéndonos de la figura anterior, sea R el radio de la base e y la altura.
$S = 2\pi R^2 + 2\pi Ry$. Por tanto $y = (S-2\pi R^2)/2\pi R$
El volumen es $V = \pi R^2.y = (SR-2\pi R^3)/2$, derivando e igualando a 0: $S - 6\pi R^2 = 0$

de donde $R^2 = S/6\pi$. $y = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt{6\pi}}$. la relación pedida es $2R/y = \frac{2\sqrt{S}/\sqrt{6\pi}}{2\sqrt{S}/\sqrt{6\pi}} = 1$

Resulta que diámetro de la base y altura han de tener el mismo valor.

¿Cómo debe ser una caldera constituida por un cilindro rematado en dos semiesferas, con las paredes del grosor prefijado, para que la capacidad prefijada v para su construcción se emplee la cantidad mínima de material?



Buscaremos sus dimensiones r y h.
El volumen prefijado es:

$v = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h$; de donde $h = \frac{-4/3\,\pi r^3 + \upsilon}{\pi r^2} = -\frac{4}{3}r + \frac{\upsilon}{\pi r^2}$

Y hay que minimizar la superficie total que es:

$S = 4\pi r^2 + 2\pi rh$, sustituyendo h por la expresión anterior $S = \frac{8}{3}\pi r - \frac{2\upsilon}{r}$ derivando respecto de r e igualando a 0, obtenemos que $r = \sqrt[3]{\frac{3\upsilon}{4\pi}}$ y h = 0. Con lo que la caldera tiene que ser una esfera de radio $\sqrt[3]{\frac{3\upsilon}{4\pi}}$

Determinar la razón entre el radio de la base y la altura de un cilindro que, con el volumen dado, tenga la superficie total mínima.

$V = \pi r^2 h$, de donde $h = V/\pi r^2$.
$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, sustituyendo h en la última expresión resulta que $S = 2(\pi r^2 + V/r)$, derivando respecto a r e igualando a 0, resulta que $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, siendo $h = \frac{V}{\pi\sqrt[3]{(\frac{V}{2\pi})^2}}$

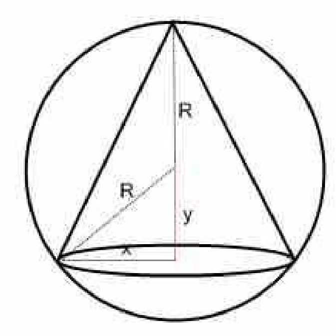
Si pasamos todo a potencias fraccionarias resulta:

$$\frac{r}{h} = \frac{\frac{V^{\frac{1}{3}}}{(2\pi)^{\frac{1}{3}}}}{\frac{V^{\frac{1}{3}}(2\pi)^{\frac{2}{3}}}{\pi}} = \frac{V^{\frac{1}{3}}\pi}{V^{\frac{1}{3}}(2\pi)} = \frac{1}{2}$$

PROBLEMAS CON CONOS:

Recordemos:
$V = \pi r^2 h/3$ Area lateral = $\pi r g$ (g es la generatriz, r el radio de la base y h es la altura)

Hallar la altura del cono de volumen máximo, inscrito en una esfera de radio R.



$V = \pi x^2(y+R)/3$

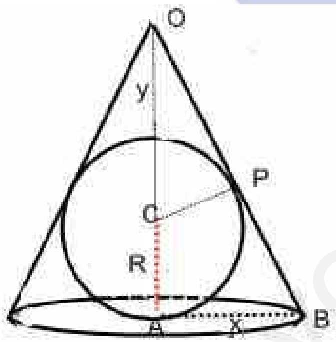
$x^2 = R^2 - y^2$

$V = \dfrac{\pi(R^2-y^2)(y+R)}{3}$ derivando respecto de y e igualando a 0, obtenemos la ecuación:

$-2y(y+R) + R^2 - y^2 = 0$; $-3y^2 - 2Ry + R^2 = 0$

de donde y = R/3, por tanto la altura pedida es R + R/3 = 4R/3

Hallar la altura del cono de volumen mínimo circunscrito en una esfera de radio R.



Los triángulos OPC y OAB son semejantes pues tienen un ángulo común O y un ángulo recto en P y A respectivamente.
Por tanto tenemos la siguiente relación de semejanza:

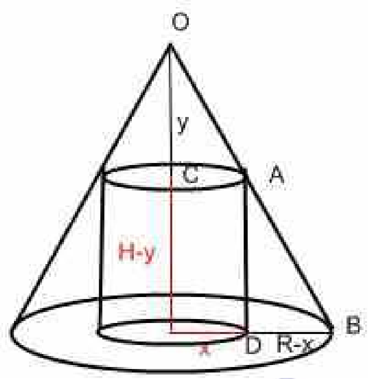
$\dfrac{y+R}{R} = \dfrac{\sqrt{x^2+(y+2R)^2}}{x}$, elevando al cuadrado:

$\dfrac{(y+R)^2}{R^2} = \dfrac{x^2+(y+2R)^2}{x^2}$; $\dfrac{(y+R)^2}{R^2} - 1 = \dfrac{(y+2R)^2}{x^2}$;

$x^2 = \dfrac{R^2(y+2R)}{y}$. El volumen del cono es $V = \dfrac{1}{3}\pi x^2(y+2R)$ por tanto

$V = \dfrac{\pi R^2(y+2R)^2}{3y}$, derivando respecto de y e igualando a 0, obtenemos y = 2R. Por tanto la altura del cono pedida es 4R.

En un cono, en el que el radio de la base es igual a R y la altura H, está inscrito el cilindro de volumen máximo. Hallar el radio de la base y la altura de dicho cilindro.



Los triángulos OCA y ADB son obviamente semejantes de donde se obtiene la relación de semejanza siguiente:

$\frac{y}{x}=\frac{H-y}{R-x}$, despejando y resulta: $y=\frac{xH}{R}$;

$H\text{-}y=\frac{H(R-x)}{R}$ El volumen del cilindro es:

V = $\pi x^2(H-y) = \frac{\pi x^2 H(R-x)}{R}$, derivando respecto de x e igualando a 0, resulta que x = 2R/3 y la altura del cilindro, es decir H-y es H/3

Hallar el área lateral mínima de un cono de volumen V

Sea g la generatriz del cono, h la altura y r el radio de la base.
Sabemos que V= $\pi r^2 h/3$ y el área lateral es π r g. Ahora bien, g = $\sqrt{r^2+h^2}$

Por lo que el área lateral se transforma en $\pi.r.\sqrt{r^2+h^2}=\pi.\sqrt{r^4+h^2r^2}$
Dado que h = $3V/\pi r^2$, el área lateral en función del Volumen dado y de la variable r:

$A_L=\pi\sqrt{r^4+\frac{9V^2}{\pi^2.r^2}}=$, derivando con respecto a r e igualando a 0 obtenemos:

$r=\sqrt[6]{\frac{9V^2}{2\pi^2}}$, por tanto el área lateral mínima es $\pi\sqrt{\sqrt[6]{\frac{9^4V^8}{2^4\pi^6}}+\frac{9V^2}{\pi\sqrt[6]{81V^4/4\pi^4}}}$,

simplificando esa expresión, el resultado es:

$3^{\frac{7}{6}}\sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{2}}$

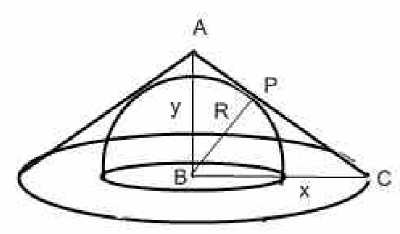
Hallar el volumen máximo de un cono con la generatriz l dada.

V= $\pi r^2 h/3$ y l = $\sqrt{r^2+h^2}$ $l^2=r^2+h^2$

V = $\pi(l^2-h^2).h/3$; derivando respecto de h e igualando a 0, h = $\frac{l}{\sqrt{3}}$ y $r^2=\frac{2l^2}{3}$

Así pues el volumen pedido es $\frac{2\pi\sqrt{3}l^3}{27}$

Hallar el volumen mínimo de un cono circunscrito una semiesfera de radio R (se supone que las bases de la semiesfera y del cono están en un mismo plano y son concéntricas).



Los triángulos rectángulos APB y ABC son semejantes pues tienen los tres ángulos iguales. Obteniendo la siguiente relación de semejanza:

$$\frac{y}{R}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$$

Despejando y de esa relación se obtiene que $y=\dfrac{Rx}{\sqrt{x^2-R^2}}$

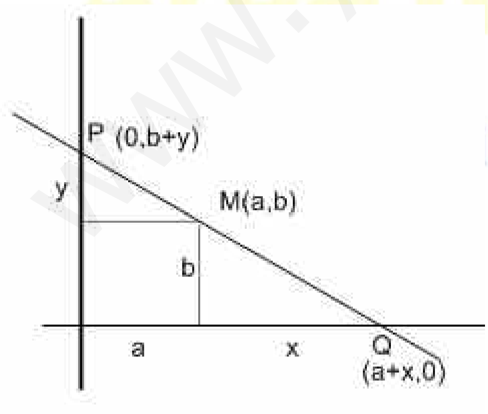
El volumen del cono es $V=\dfrac{\pi x^2 y}{3}=\dfrac{R\pi x^3}{3\sqrt{x^2-R^2}}$ cuya derivada es:

$$\frac{3R\pi x^2.3\sqrt{x^2-R^2}-\dfrac{3x}{\sqrt{x^2-R^2}}.R\pi x^3}{9(x^2-R^2)}=0,\quad 9R\pi x^2(x^2-R^2)-3\pi Rx^4=0;$$

$6\pi Rx^4 - 9\pi R^3 x^2 = 0$; $3R\pi x^2 (2x^2-3R^2) = 0$. de donde $x = R\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ y por tanto

$y=R\sqrt{3}$. Por tanto el volumen es $\dfrac{\sqrt{3}.\pi-R^3}{2}$

Consideremos un haz de rectas que pasan por el punto M(a,b), donde a>0 y b>0, y que cortan los semiejes positivos OX y OY. Hallen la longitud mínima del segmento PQ, donde P y Q son los puntos de intersección de una recta del haz con los semiejes positivos.



La función que hay que minimizar es la distancia entre P y Q que es:

$$\sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2}$$

La relación entre x e y viene dada por la semejanza de los triángulos rectángulos de hipotenusas PM y MQ, es decir:

$$\frac{y}{a}=\frac{b}{x},\ \text{de donde}\quad y=\frac{ab}{x}$$

La función distancia es:

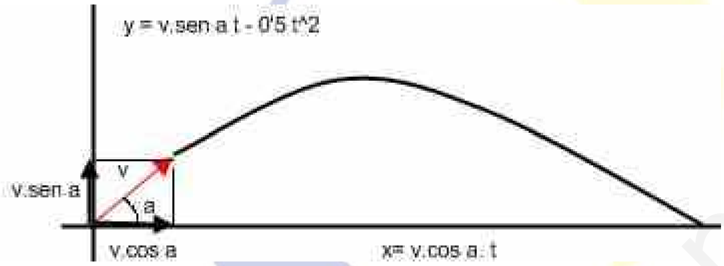
$\sqrt{(a+x)^2+(b+\dfrac{ab}{x})^2}$, derivando e igualando a 0 tenemos:

$2(a+x)+2(b+\frac{ab}{x})(\frac{-ab}{x^2})=0$, se sigue: $(x+a)(x^3 - ab^2) = 0$.

$x=\sqrt[3]{ab^2}$ $\quad y=\frac{ab}{\sqrt[3]{ab^2}}$. La distancia pedida es:

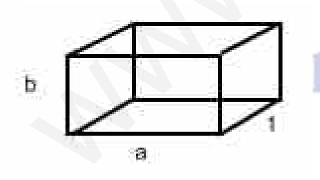
$$\sqrt{(a+(\sqrt[3]{ab^2})^2+(\frac{ab}{\sqrt[3]{ab^2}}+b)^2}$$

Una piedra ha sido lanzada a velocidad inicial prefijada v bajo el ángulo a respecto al horizonte. Despreciando la resistencia del aire, determinar con qué ángulo a, la distancia de vuelo de la piedra será la máxima.



La distancia máxima se alcanza en el valor de x = v cos a. t , cuando y = 0
es decir v.sen a. t - 0'5 t^2 = 0. de donde t = 0 (la piedra no ha recorrido ningún espacio) y t = 2vsen a.
Por tanto ha de ser máxima la función v cos a. 2v. sen a = v^2 sen 2a.
Derivando respecto de a e igualando a 0, tenemos:
$2v^2\cos 2a = 0$, de donde cos 2a = 0 ; 2a = π/2; a = π/4

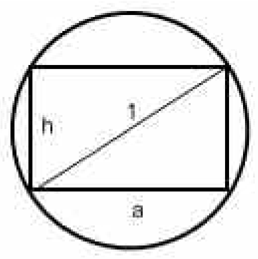
Con el fin de reducir el rozamiento del liquido por las paredes de un canal, el área que el agua humedece debe ser la menor posible. Demostrar que la mejor forma de un canal abierto rectangular con el area de la sección transversal prefijada, es tal que, con ella, la anchura del canal es dos veces mayor que su altura.



Sea A el area de la sección transversal, esto es ab = A
de donde a = A/b

La superficie de rozamiento del agua es:
S = a + 2b (ya que hemos tomado como longitud del canal 1)
Sustituyendo a, resulta que S = $(A + 2b^2)/b$, derivando respecto de b e igualando a 0, resulta $4b^2 - A - 2b^2 = 0$, de donde $b=\sqrt{\frac{A}{2}}=\frac{\sqrt{2A}}{2}$ y $a=\frac{2A}{\sqrt{2A}}=\sqrt{2A}$, quedando demostrado que la anchura (a) es doble que la altura (b).

De un tronco redondo se corta una viga de sección transversal rectangular. Considerando que la resistencia de la viga es proporcional a ah^2, donde a es la base y h la altura del rectángulo, hallar la razón h/a con la que la viga tendrá resistencia máxima.



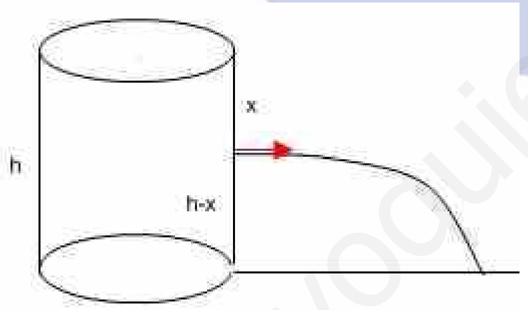
Consideramos el diámetro del tronco igual a 1 (La relación será la misma independientemente del diámetro del tronco)

$1 = h^2 + a^2$, $h^2 = 1 - a^2$

$R = k.a.h^2$, siendo k la constante de proporcionalidad.

$R = k(a - a^3)$, derivando respecto de a e igualando a 0, tenemos $1- 3a^2 = 0$, de donde $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y $h = \frac{\sqrt{6}}{3}$, de donde $\frac{h}{a} = \sqrt{2}$

Un recipiente con pared vertical de altura h se encuentra sobre un plano horizontal. De un orificio en la pared del recipiente fluye un chorro. Determinar la posición del orificio con la que el alcance del chorro será el máximo si la velocidad del líquido que fluye es igual a $\sqrt{2gx}$, donde x es la profundidad del orificio (Ley de Torricelli)



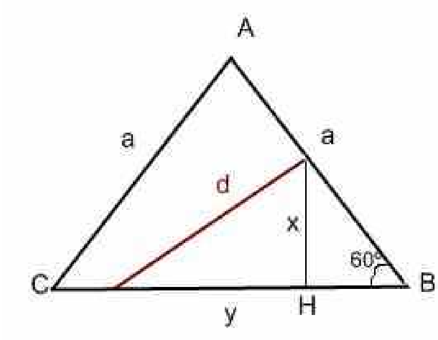
El espacio recorrido en sentido horizontal es $\sqrt{2gxt}$

Mientras que en sentido vertical es una caída libre, es decir $\frac{1}{2}gt^2$

El chorro llega al suelo cuando en vertical ha recorrido h-x, es decir:

$h - x = \frac{1}{2}gt^2$, de donde $t = \sqrt{\frac{2(x-h)}{g}}$, en consecuencia el espacio recorrido en sentido horizontal total es $\sqrt{2gx.\frac{2(x-h)}{g}} = 2\sqrt{x^2 - xh}$, derivando respecto de x e igualando a 0 llegamos a la ecuación 2x - h = 0, de donde x = h/2, es decir que el agujero debe encontrarse en medio del recipiente.

Hallar la longitud mínima del segmento que divide al triángulo equilátero de lado a en dos figuras de áreas iguales



El área del triángulo equilátero de lado a es $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, puesto que la base es a y la altura $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Por tanto, si el segmento d divide al triángulo en dos figuras de igual área, el área del triángulo que queda determinado en la parte inferior es $\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$

Teniendo en cuenta que HB = x/tag 60 = $\frac{x}{\sqrt{3}}$, tenemos:

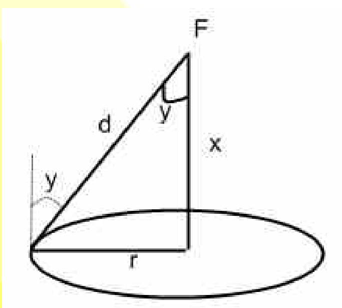
$\frac{\sqrt{3}}{8}a^2 = \frac{(y+\frac{x}{\sqrt{3}})}{2}x$, despejando y de esta relación, resulta $y = \frac{3a^2-4x^2}{4\sqrt{3}x}$

Por otra parte la función que hay que minimizar es $d = \sqrt{x^2+y^2}$, sustituyendo y por la expresión anterior resulta:

d = $\sqrt{x^2+(\frac{3a^2-4x^2}{4\sqrt{3}x})^2}$, derivando respecto de x e igualando a 0, llegamos a la ecuación simplificada: $64x^4 - 9a^4 = 0$, de donde $x = \frac{\sqrt{6}}{2}a$

Sustituyendo en el valor de d, obtenemos que la longitud mínima del segmento que divide al triángulo en dos áreas iguales es $d = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Un foco cuelga sobre el centro de una mesa redonda de radio r. ¿A qué altura de la mesa debe estar el foco para que la iluminación de un objeto que se encuentre en el borde de la mesa sea la mejor posible? (La iluminación es directamente proporcional al coseno del ángulo de incidencia de los rayos luminosos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco de luz)



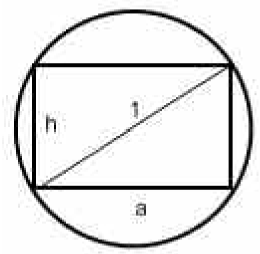
Sea I = $\frac{i.\cos y}{d^2}$ donde i es la intensidad de luz, y el ángulo de incidencia y de la distancia del foco al objeto iluminado en el borde de la mesa. Puesto que $d^2 = x^2+r^2$ y x = r/tag y. Tenemos que

$I = \frac{i.\cos y}{r^2(1+\cot g^2 y)} = \frac{i.\cos y.sen^2 y}{r^2}$, derivando respecto de y e igualando a 0, resulta la ecuación trigonométrica:

$seny(2\cos^2 y - sen^2 y) = 0$ de donde seny=0 lo descartamos por ser y=0.
por tanto resolvemos el otro factor obteniendo $2.\cos^2 y - sen^2 y = 0$ entonces
$tag^2 y = 2$, de donde $tagy = \sqrt{2}$
Pero sabemos que tag y = r/x, por tanto $x = \sqrt{2}r$

De un tronco redondo de diámetro d se debe cortar una viga de sección rectangular. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de dicha viga para que esta tenga una resistencia a la flexión máxima, sabiendo que la resistencia a la flexión es proporcional al producto de la anchura por el cuadrado de la altura de la sección.

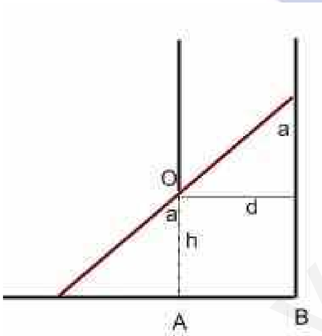
$R = k.a.h^2$, puesto que $d^2=h^2 + a^2$



$R = k.a\,(d^2-a^2) = kad^2 - ka^3$. Derivando respecto de a e igualando a 0 obtenemos $kd^2 - 3ka^2 = 0$, de donde a =

$$a = \frac{d}{\sqrt{3}} \quad y \quad h = \frac{\sqrt{2}d}{\sqrt{3}}$$

Determinar la altura mínima h= OA de la puerta de una torre vertical para que a través de ella se pueda introducir en la torre una barra rigida de longitud l, cuyo extremo resbalará a lo largo de la línea de tierra AB. La anchura de la torre es d < l



La línea roja es la barra de longitud l.
Tenemos que

$$l = h.\sec a + d.\cos eca$$
$$h = (l - d.\cos eca).\cos a$$

derivando respecto de a e igualando a 0 tenemos:

$$h' = d\cot ga.\cos eca.\cos a - l.sena + d.sena.\cos eca = d - l.sen^3 a = \mathbf{0}$$

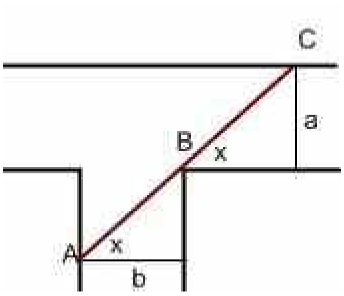
$$sena = \sqrt[3]{\frac{d}{l}} = \left(\frac{d}{l}\right)^{\frac{1}{3}},\ \mathbf{a} = arcsen\left(\frac{d}{l}\right)^{\frac{1}{3}}$$

con lo que $h = \left(l - d.\cos ec(arcsen\left(\frac{d}{l}\right)^{\frac{1}{3}})\right).\cos arcsen\left(\frac{d}{l}\right)^{\frac{1}{3}}$

Sabemos que cosec (arcsen x) = $\frac{1}{x}$ y cos(arcsen x) = $\sqrt{1-x^2}$. Así pues

$$h = \left(l - d.\frac{l^{\frac{1}{3}}}{d^{\frac{1}{3}}}\right).\left(1 - \frac{d^{\frac{2}{3}}}{l^{\frac{2}{3}}}\right)^{1/2} = \left(l - l^{\frac{1}{3}}d^{\frac{2}{3}}\right)\frac{\left(l^{\frac{2}{3}} - d^{\frac{2}{3}}\right)}{l^{\frac{1}{3}}} = \frac{l^{\frac{1}{3}}(l^{\frac{2}{3}} - d^{\frac{2}{3}})(l^{\frac{2}{3}} - d^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}{l^{\frac{1}{3}}} = (l^{\frac{2}{3}} - d^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

Hacia un río cuya anchura es igual a* a*, bajo un ángulo recto, se ha construido un canal de anchura* b*. Hallar la longitud máxima de un tronco que puede pasar del río al canal.



La longitud del tronco es AB+BC, es decir que

$l = b.\sec x + a.\cos ec x$, derivamos respecto del ángulo x y tenemos:

$$l' = -b\sec x.tagx + a\cos ecx.\cot gx = \frac{-b.senx}{\cos^2 x} + \frac{a.\cos x}{sen^2 x}$$

igualando a 0

$-bsen^3 x + a.\cos^3 x = 0$, dividiendo por $\cos^3$x $\quad a = b.tag^3 x$

$tagx = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, x= $arctg\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$l = b.\sec arctg\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} + a.\cos ecarctg\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Sabemos que sec.arctgα = 1/cos(arctgα), como cosα = $\sqrt{\frac{1}{1+tag^2\alpha}}$

$$b.\sec arctg\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{b}{\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}}}}} = \frac{b\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}}{b^{1/3}}$$

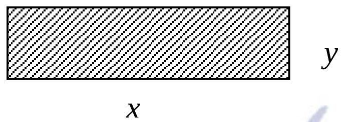
Sabemos tambien que cosec(arctagα)= 1/sen(arctagα), como $sen\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{tag^2\alpha}}}$

$$a.\cos ecarctg\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{a}{\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^{2/3}}}} = \frac{a\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}}{a^{1/3}}$$

De donde:

$$l = \frac{b\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}}{b^{1/3}} + \frac{a\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}}{a^{1/3}} = \left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{b}{b^{1/3}}+\frac{a}{a^{1/3}}\right) = \left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

1. En un concurso se da a cada participante un alambre de dos metros de longitud para que doblándolo convenientemente hagan con el mismo un cuadrilátero con los cuatro ángulos rectos. Aquellos que lo logren reciben como premio tantos euros como decímetros cuadrados tenga de superficie el cuadrilátero construido. Calcula razonadamente la cuantía del máximo premio que se pueda obtener en este concurso.



$A(x, y) = x\cdot y$ (Función Objetivo)
Condición: $2x+2y = 2$

Condición: $2x+2y = 2 \Rightarrow x+y = 1 \Rightarrow y = 1-x$

Función Objetivo: $A(x, y) = x\cdot y \Rightarrow A(x)= x\cdot(1-x) = x-x^2$

$$A'(x)=1-2x$$

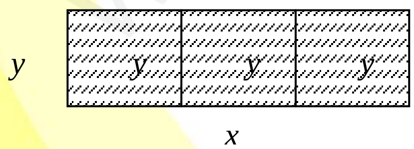
$$A'(x) = 0 \Rightarrow 1-2x = 0 \Rightarrow x = 1/2 \text{ m.}$$

$$A''(x) = -2 \Rightarrow A''(1/2) = -2 < 0 \quad \text{(es un máximo)}$$

Solución: $x = 5$ dm. e $y = 5$ dm., siendo Área = 25 dm^2.

Cuantía máxima a percibir por el premio = 25 €.

2. Un jardinero dispone de 160 metros de alambre que va a utilizar para cercar una zona rectangular y dividirla en tres partes. Las alambradas de las divisiones deben quedar paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Qué dimensiones debe tener la zona cercada para que su área sea la mayor posible?



$A(x, y) = x\cdot y$ (Función objetivo)

Condición: $2x+4y = 160$

Condición: $2x+4y = 160 \Rightarrow y = \dfrac{80-x}{2}$

Función: $A(x, y) = x\cdot y$

$$A(x) = x\cdot\left(\frac{80-x}{2}\right) = 40x-\frac{x^2}{2}$$

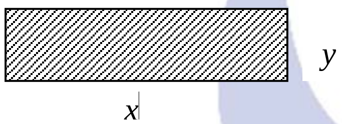
$$A'(x) = 40-x \quad \Rightarrow \quad A'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 40 \text{ m.}$$

$$A''(x) = -1 < 0 \;\; \text{(el punto es un máximo)}$$

Para $x = 40$ m. resulta $y = \dfrac{80-40}{2} \;\Rightarrow\; y = 20$ m.

Solución: $x = 40$ m, $y = 20$ m.

3. Se dispone de 400 metros de alambrada para vallar un solar rectangular. ¿Qué dimensiones deberá tener el solar para que con esa alambrada se limite la mayor área posible? Razonar el proceso.



Función: $A(x, y) = x \cdot y$
Condición: $2x+2y = 400$

Condición: $2x+2y = 400 \;\Rightarrow\; x + y = 200 \;\Rightarrow\; y = 200-x$

Función: $A(x, y) = x \cdot y$

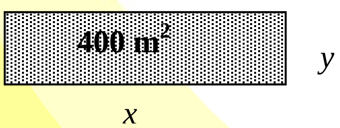
$$A(x) = x \cdot (200-x) = 200x - x^2$$

$$A'(x) = 200-2x \;\Rightarrow\; A'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 100 \text{ m}$$

$A''(x) = -2 < 0 \;\Rightarrow\; x = 100$ es un máximo, siendo $y = 200-100 = 100$

Solución: $x = 100$ e $y = 100$, es un cuadrado

4. Un terreno de forma rectangular tiene 400 m^2 y va a ser vallado. El precio del metro lineal de valla es de 4 euros. ¿Cuáles serán las dimensiones del solar que hacen que el costo de la valla sea mínimo?



Perímetro del vertedero: $P = 2x+2y$

Coste cerca: $4 \cdot P = 4(2x)+4(2y) = 8x+8y$ (función objetivo)

Condición: $x \cdot y = 400$

Condición: $x \cdot y = 400 \;\Rightarrow\; y = \dfrac{400}{x}$

Coste cerca: $C(x, y) = 8x+8y$

$$C(x) = 8x+8\left(\frac{400}{x}\right) = 8x+\frac{3200}{x}$$

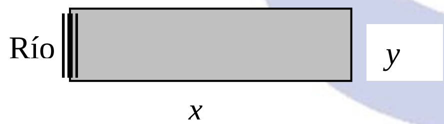
$$C'(x) = 8-\frac{3200}{x^2} \Rightarrow C'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2=400 \quad \Rightarrow x = \pm 20; \text{ Solución válida } x = 20 \text{ m.}$$

$$C''(x) = 3200\cdot\frac{2}{x^3} \quad \Rightarrow \quad C''(20)= 0.8 > 0 \qquad \text{Es un mínimo}$$

Para $x = 20$ m., siendo $y = \frac{400}{x} \Rightarrow y = 400/20 = 20$ m.

Solución: Las dimensiones del solar son cuadradas con $x = 20$m. e $y = 20$m.

5. Supongamos que el solar del problema anterior tiene 200 m^2 y un lado a lo largo del río requiere una valla más costosa de 5 euros el metro lineal. ¿Qué dimensiones darán el costo más bajo?



Función: $C(x, y) = 4\cdot(2x) + 4y + 5y$
Condición: $x\cdot y = 200$

Condición: $x\cdot y = 200 \Rightarrow y = \frac{200}{x}$

Función objetivo: $C(x, y) = 4\cdot(2x) + 4y + 5y = 8x + 9y$

$$C(x) = 8x + 9\frac{200}{x} = 8x + \frac{1800}{x}$$

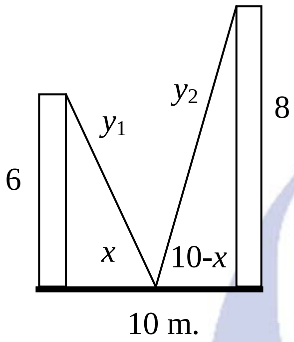
$$C'(x) = 8x+\frac{1800}{x^2} \Rightarrow C'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{225} = \pm 15 \text{ (Solución válida: 15 m.)}$$

$$C''(x) = 1800\frac{2}{x^2} = \frac{3600}{x^3} \quad \Rightarrow \quad C''(15) = \frac{3600}{15^3} > 0 .$$

Luego, en $x = 15$ hay un mínimo, siendo $y = 40/3$.

Solución: Las dimensiones del solar serán en este caso $x = 15$ m. e $y = 40/3$ m.

6. *(El Problema del Cable más Corto)* Dos postes con longitudes de 6 y 8 metros respectivamente se colocan verticalmente sobre el piso con sus bases separadas una distancia de 10 metros. Calcule aproximadamente la longitud mínima de un cable que pueda ir desde la punta de uno de los postes hasta un punto en el suelo entre los postes y luego hasta la punta del otro poste.



Función: $L_{cable} = y_1 + y_2$

Condición: $y_1^2 = 36+x^2$

$y_2^2 = 64+(10-x)^2$

$$L_{cable} = L(x) = \sqrt{36+x^2} + \sqrt{64+(10-x)^2}$$

$$L'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{36+x^2}} + \frac{-2(10-x)}{2\sqrt{64+(10-x)^2}}$$

$$L'(x) = 0 \Rightarrow x\cdot\sqrt{64+(10-x)^2} = (10-x)\sqrt{36+x^2}$$

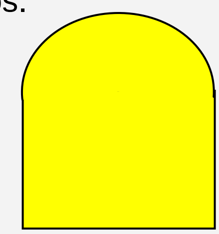
$$\Rightarrow 7x^2+180x-900 = 0 \quad \begin{cases} x_1 = -30 & \text{solución no válidad} \\ x_2 = \dfrac{30}{7} \end{cases}$$

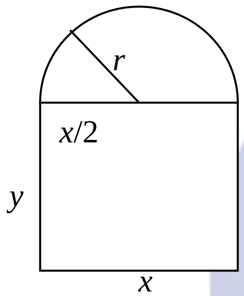
$$L''(x) = \frac{36}{\sqrt{(36+x^2)^3}} + \frac{64}{\sqrt{\left[64+(10-x)^2\right]^3}} > 0 \Rightarrow L''(30/7) > 0 \Rightarrow x = 30/7 \text{ es un mínimo}$$

$$L(30/7) = \sqrt{36+\left(\frac{30}{7}\right)^2} + \sqrt{64+\left(10-\frac{30}{7}\right)^2}$$

Solución: Longitud mínima = L(30/7) = 2.32 + 9.83 = 17.20 m.

7. *(El Primer Problema de la Ventana)* Una ventana tiene la forma de un rectángulo coronado con un semicírculo. Encuentre las dimensiones de la ventana que deja pasar más luz, si su perímetro mide 5 metros.





$L_{\text{circunferencia}} = L = 2\pi r \Rightarrow L_{\text{semicircunferencia}} = \frac{L}{2} = \pi r$

Perímetro rectángulo = $x+2y$

Perímetro total = $x + 2y + \pi r = 5$ (condición)

Función: Área: $A(x, y) = x \cdot y + \frac{\pi \cdot r^2}{2}$

Condición: $x + 2y + \frac{\pi \cdot x}{2} = 5 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{10-(2+\pi)\cdot x}{4}$

Función: $A(x, y) = x \cdot y + \frac{\pi \cdot r^2}{2} = x \cdot y + \frac{\pi \cdot x^2/4}{2}$

$$A(x) = x \cdot \frac{10-(2+\pi)\cdot x}{4} + \frac{\pi \cdot x^2}{8}$$

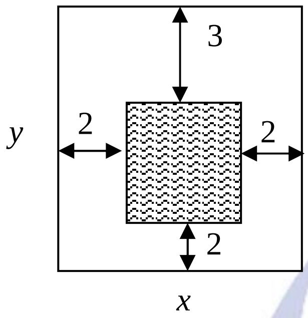
$$A'(x) = \frac{10-4x-\pi \cdot x}{4} \quad \Rightarrow \quad A'(x)=0 \quad \Rightarrow x = \frac{10}{4+\pi} = 1.4\,\text{m}$$

$$A''(x) = \frac{-4-\pi}{4} < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1.4 \text{ es un máximo}$$

$$y = \frac{10-(2+\pi)\cdot 10/4+\pi}{4} = 0.7 \text{ m}$$

Solución: Dimensiones de la ventana: Ancho: x = 1.4 m.; Alto: $y + r$ = 0.7 + 0.7 =1.4 m.

8. Las páginas de un libro deben medir cada una 600 cm^2 de área. Sus márgenes laterales y el inferior miden 2 cm. y el superior mide 3 cm. Calcular las dimensiones de la página que permitan obtener la mayor área impresa posible.



Alto de la página impresa: y-5
Ancho de la página impresa: x-4
Área impresa = $(x-4)\cdot(y-5)$ (función objetivo)
Área páginas = $x\cdot y = 600$ (condición)

Condición: $x\cdot y = 600 \Rightarrow y = 600/x$

Función: $A(x, y) = (x-4)\cdot\left(\frac{600}{x} - 5\right)$

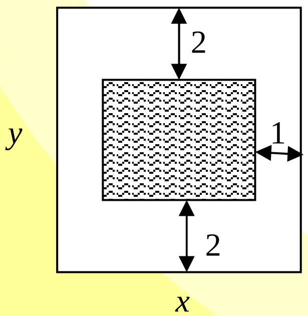
$$A(x) = -5x+620-\frac{2400}{x}$$

$A'(x) = -5+\frac{2.400}{x^2} \Rightarrow A'(x)=0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{480} \Rightarrow x=\pm 4\sqrt{30}$ (La solución negativa no es válida)

$$A''(4\sqrt{30}) = \frac{-4.800}{\left(4\sqrt{30}\right)^3} < 0 \text{, es un máximo, siendo } y = \frac{150\sqrt{30}}{30} \Rightarrow y = 5\sqrt{30}$$

Solución: $x = 4\sqrt{30}$ cm. e $y = 5\sqrt{30}$ cm.

9. Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior han de tener 2 cm. cada uno, y los laterales 1 cm. Halla las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.



Función: $A(x, y) = x \cdot y$
Condición: $(x-4)\cdot(y-2)=18$

Condición: $(x\text{-}4)\cdot(y\text{-}2)=18 \quad \Rightarrow \quad y=\dfrac{10+2x}{x-4}$

Función: $A(x, y) = x \cdot y$

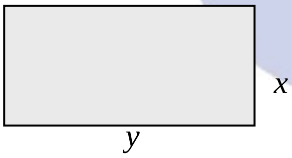
$$A(x) = x\cdot\frac{10+2x}{x-4} \Rightarrow A(x)=\frac{10+2x^2}{x-4}$$

$$A'(x) = \frac{2x^2-16x-40}{(x-4)^2} \Rightarrow A'(x) = 0 \Rightarrow x=10 \text{ y } x=-2 \text{ (solución negativa no es válida).}$$

$$A''(x)=\frac{(4x-16)(x-4)^2-2(x-4)(2x^2-16x-40)}{(x-4)^4} \Rightarrow A''(10)>0\text{, es un mínimo.}$$

Solución: $x=10$ e $y=5$.

10. Un pastor dispone de 1000 m de tela metálica para construir una cerca rectangular aprovechando una pared ya existente. Halla las dimensiones de la cerca para que el área encerrada sea máxima.



Función: $f(x, y) = x\cdot y$

Condición: $2x + y = 1.000 \Rightarrow y=1000\text{-}2x$

$f(x, y) = x\cdot y$

$f(x) = x\cdot(1.000\text{-}2x)$

$f(x)=1.000\,x-2\,x^2$

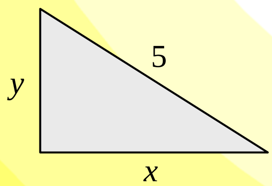
$f'(x)=1.000-4x \Rightarrow f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x=250$

$f''(x)=-4 \Rightarrow f''(250)<0.$

Por lo tanto, $x = 250$ es un máximo.

Solución: $x=250$ e $y=500$.

11. Un segmento de longitud de 5 cm. apoya sus extremos en los semiejes positivos OX y OY, de tal manera que forma con éstos un triángulo. Halla las dimensiones del triángulo de área máxima así construido.



Función: $f(x, y)=\dfrac{x\cdot y}{2}$

Condición $x^2 + y^2 = 5$

Condición: $x^2 + y^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{5 - x^2}$

Función: $f(x, y) = \dfrac{x \cdot y}{2}$

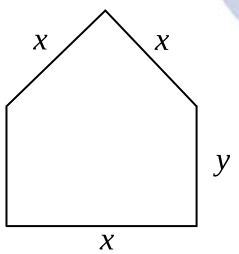
$$f(x) = \frac{x \cdot \sqrt{5 - x^2}}{2}$$

$$f'(x) = \frac{5 - 3x^2}{2\sqrt{5 - x^2}} \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \Rightarrow x = \pm\sqrt{5/3} \quad \text{(La solución negativa no es válida).}$$

$$f''(x) = \frac{-10x}{5 - x^2} \Rightarrow f''\left(\sqrt{5/3} < 0\right). \text{ Por lo tanto, es un máximo.}$$

Solución: $x = \sqrt{5/3}; \ y = \sqrt{\dfrac{10}{3}}$

12. Se considera una ventana rectangular en la que el lado superior se ha sustituido por un triángulo equilátero. Sabiendo que el perímetro de la ventana es 6,6 m, hallar sus dimensiones para que la superficie sea máxima.



Función: $A_{\text{total}} = A_{\text{triángulo}} + A_{\text{rectángulo}}$

Condición: $3x + 2y = 6.6$

Condición: $3x + 2y = 6.6 \quad \Rightarrow \quad y = 3.3 - 1.5x$

$$A_{\text{total}} = f(x, y) = x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} + x \cdot y = \frac{x^2\sqrt{3}}{2} + x \cdot y$$

$$f(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{2} + x \cdot (83.3 - 1.5x)$$

$$f(x) = 3.3x - 1.07x^2$$

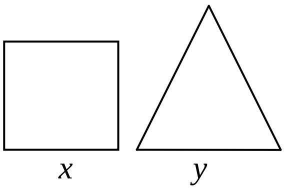
$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3.3 - 2.14x = 0 \quad \Rightarrow x = 1.54$$

$$f''(x) = -2\acute{}14 \quad \Rightarrow f''(1.54) < 0.$$

Luego, $x = 1.54$ es máximo.

Solución: $x = 1.54; \quad y = 0.99$

13. Dividir un segmento de 6 cm. de longitud en dos partes, con la propiedad de que la suma de las áreas del cuadrado y del triángulo equilátero construidos sobre ellos sea máxima.



A$_{total}$ = A$_{triángulo}$ + A$_{cuadrado}$

Condición: $x + y = 6$

Condición: $x + y = 6 \quad \Rightarrow \quad x = 6 - y$

Función: A$_{total}$ = $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{3}y^2}{4} + x^2$

Sustituimos y obtenemos:

$f(y) = \dfrac{\sqrt{3}y^2}{4} + (6-y)^2$

$f(y) = 1.43y^2 - 2y + 36$

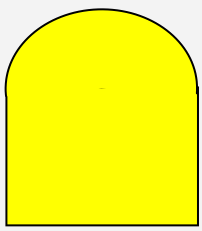
$f'(y) = 2'86y - 2 \quad \Rightarrow \quad f'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0.7$

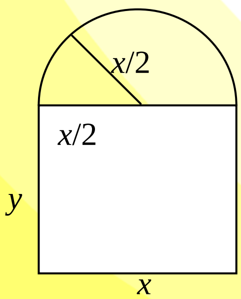
$f''(y) = -2 \quad \Rightarrow \quad f''(0.7) < 0$

Luego, en $y = 0.7$ es máximo.

Solución: $x = 5.3$; $y = 0.7$

14. Se considera una ventana como la que se indica en la figura (la parte inferior es rectangular y la superior una semicircunferencia). El perímetro de la ventana mide 6 m. Halla las dimensiones "x" e "y" del rectángulo para que la superficie de la ventana sea máxima (Expresa el resultado en función de π).





Condición: $x + 2y + \dfrac{\pi x}{2} = 6$, luego $y = \dfrac{12 - 2x - \pi x}{4}$

Función: $f(x,y) = xy + \dfrac{\pi\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{2}$

$$f(x) = x\left(\frac{12-2x-\pi x}{4}\right) + \frac{\pi x^2}{8}$$

$$f(x) = \frac{24x-4x^2-\pi x^2}{8}$$

$$f'(x) = \frac{1}{8}(24-8x-2\pi x)$$

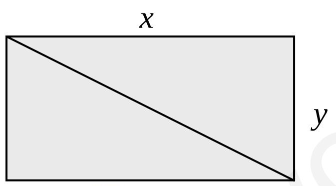
$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{12}{4+\pi}$$

$$f''(x) = -1-\frac{\pi}{4}$$

$$f''\left(\frac{12}{4+\pi}\right) = -1-\frac{\pi}{4} < 0 \Rightarrow x = \frac{12}{4+\pi} \text{ es un máximo}$$

Solución: $x = \dfrac{12}{4+\pi} = 1.68$; $y = \dfrac{12-2\cdot 1.68-\pi\cdot 1.68}{4} = 0.84$

15. Entre todos los rectángulos de perímetro 12 m. ¿cuál es el que tiene la diagonal menor? Razonar el proceso seguido.



Condición: $2x + 2y = 12 \Rightarrow y = 6-x$

Función: $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$

$$f(x) = \sqrt{x^2+(6-x)^2}$$

$$f(x) = \sqrt{2x^2-12x+36}$$

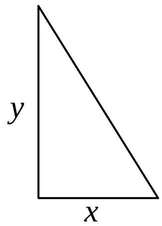
$$f'(x) = \frac{2x-6}{\sqrt{2x^2-12+36}}$$

Para $f'(x) = 0$ tenemos que $x = 3$

$$f''(x) = \frac{36}{\left(\sqrt{2x^2-12x+36}\right)^3}$$ y sustituimos $x = 3$, $f''(3) > 0$, por lo tanto es mínimo.

Solución: $x = 3$ e $y = 3$

16. Calcula el área máxima que puede tiene un triángulo rectángulo tal que la suma de la longitudes de sus dos catetos vale 4 cm.



Condición: $x+y = 4$; $y = 4-x$

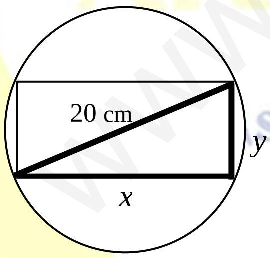
Función: Área = $f(x,y) = x \cdot y/2$

$$f(x,y) = \frac{xy}{2}$$
$$f(x) = \frac{x(4-x)}{2}$$
$$f(x) = \frac{4x-x^2}{2}$$
$$f'(x) = 2-x$$
$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$
$$f''(x) = -1 \Rightarrow \quad f''(2) < 0$$

de donde tenemos que $x = 2$ es máximo.

Solución: $x = 2$ e $y = 2$.

17. Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de 10 cm. de radio. Razonar el proceso seguido.



Condición: $x^2 + y^2 = (20)^2 = 400 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{400 - x^2}$

Función = Área = $x \cdot y$

$$f(x,y) = xy$$
$$f(x) = x\sqrt{400-x^2}$$
$$f'(x) = \frac{400-2x^2}{\sqrt{400-x^2}}$$
$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 10\sqrt{2}$$

La solución negativa no es válida.

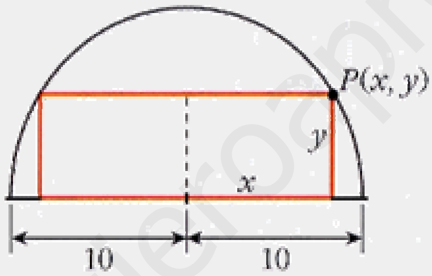
$$f''(x)=\frac{-4x\sqrt{400-x^2}-\frac{-2x}{2\sqrt{400-x^2}}\left(400-2x^2\right)}{400-x^2}$$

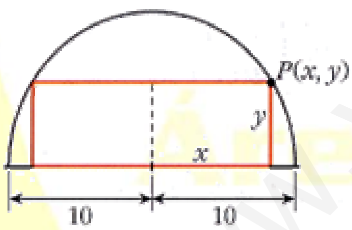
$$f''(10\sqrt{2})=\frac{-\sqrt{400}}{5}<0 \quad \text{es un mínimo}$$

$$y=\sqrt{400-\left(10\sqrt{2}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad y=10\sqrt{2}$$

Solución: $x=10\sqrt{2}; \quad y=10\sqrt{2}$

18. En un jardín con forma semicírculo de radio 10 m se va a instalar un parterre rectangular, uno de cuyos lados está sobre el diámetro y el opuesto a él tiene sus extremos en la parte curva. Calcula las dimensiones del parterre para que su área sea máxima.





Condición: P(x,y) pertenece a la Circunferencia

$$x^2+y^2=100 \Rightarrow y=\sqrt{100-x^2}$$

Función: $f(x,y)=2xy$

$$f(x,y)=2xy$$

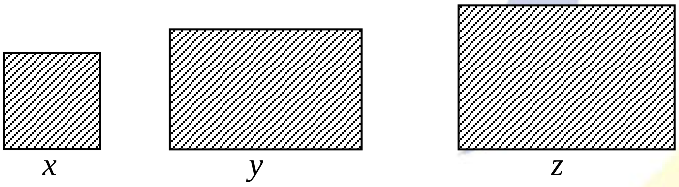
$$f(x)=2x\sqrt{100-x^2}$$

$$f'(x)=\frac{200-4x^2}{\sqrt{100-x^2}} \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow x=\pm 5\sqrt{2} \text{ (La solución negativa no es válida)}$$

$$f''(5\sqrt{2})<0 \text{ (máximo)}$$

Solución: Dimensión del parterre será de base = $10\sqrt{2}$ m ; altura $=5\sqrt{2}$ m. Siendo el área máxima de 100 m^2.

19. Calcule las dimensiones de tres campos cuadrados de modo que: el perímetro de uno de ellos sea triple del perímetro de otro, se necesiten exactamente 1248 metros de valla para vallar los tres y la suma de las áreas de los tres campos sea la mínima posible.



Llamamos x, y, z, a los lados de las tres parcelas.

Condiciones:

i) $z = 3x$

ii) $4x+4y+4z = 1248$

de donde $z = 3x$, entonces $y = 312 - 4x$

Función: $S(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

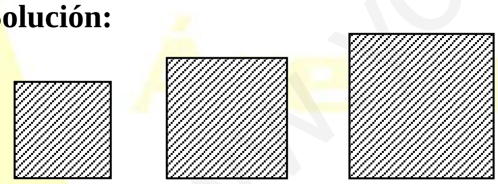
$$S(x) = x^2 + (312-4x)^2 + 9x^2$$

$$S(x) = 26x^2 - 2496x + 312^2$$

$S'(x) = 52x - 2496$ y para $S'(x) = 0$ tenemos que $x = 48$

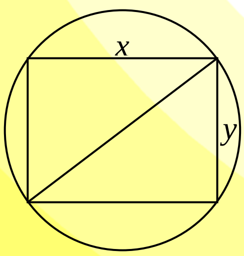
$S''(x) = 52 \Rightarrow S''(48) > 0$, por tanto, es mínimo.

Solución:



$x = 48$ m $y = 120$ m $z = 144$ m.

20. Una arquitecta quiere construir un jardín rectangular en un terreno circular de 100 metros de radio. Halla las dimensiones de dicho jardín para que el área sea máxima.



Condición: $x^2 + y^2 = 100^2$, luego tenemos que $y = \sqrt{100^2 - x^2}$

Función: Área del jardín rectangular

$$A(x,y)=xy$$
$$A(x)=x\sqrt{100^2-x^2}$$

El valor que haga máxima el área, también hará máxima a $A^2(x)$ y los cálculos se simplifican haciendo:

$$B(x)=A^2(x)=x^2\left(10000-x^2\right)=10000x^2-x^4$$
$$B'(x)=20000x-4x^3\Rightarrow B'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0 \text{ Se descarta}\\ x=70.71\text{m}\end{cases}$$
$$B''(x)=20000-12x^2\Rightarrow B''(70.71)<0\ (\text{máximo})$$

Solución: Para $x=$ 70.71 resulta $y=\sqrt{100^2-70.71^2}=70.71\text{m}$

21. Descomponer el número *e* en dos sumandos positivos de forma que la suma de los logaritmos neperianos de los sumandos sea máxima. Calcular dicha suma.

Condición: $x+y=e$, de donde tenemos que $y=e-x$

Función: $S(x,y)=\ln(x)+\ln(y)$

$S(x)=\ln(x)+\ln(e-x)$

$$S'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e-x}\Rightarrow S'(x)=0\Rightarrow x=\frac{e}{2}$$

$$S''(x)=\frac{-1}{x^2}-\frac{1}{(e-x)^2}\Rightarrow S''\left(\frac{e}{2}\right)=\frac{-8}{e^2}<0$$

luego, tenemos que es máximo.

La suma pedida será: $suma=\ln\frac{e}{2}+\ln\left(e-\frac{e}{2}\right)=2-2\ln 2$.

Solución: $x=e/2$ y la suma $S=2-2\ln 2$

22. Una empresa ha decidido mejorar su seguridad instalando 9 alarmas. Un especialista en el tema señala que dada la estructura de la empresa sólo puede optar por dos tipos de alarmas, de tipo A o de tipo B; además, afirma que la seguridad de la empresa se puede expresar como la décima parte del producto entre el número de alarmas de tipo A instaladas y el cuadrado del número de alarmas instaladas de tipo B. ¿Cuántas alarmas de cada tipo se deben instalar en la empresa para maximizar su seguridad?

Alarmas tipo A = x

Alarmas tipo B = y

Condición: $x + y = 9$, luego $y = 9-x$

Función: La Seguridad se expresa como: $\frac{xy^2}{10} = f(x,y)$

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{10}$$
$$f(x) = \frac{x(9-x)^2}{10}$$
$$f(x) = \frac{81x - 36x^2 + x^3}{10}$$
$$f'(x) = \frac{81 - 36x + 3x^2}{10} \Rightarrow f'(x) = 0$$

los valores de la x que anulan la primera derivada son $x = 9$ y $x = 3$

$$f''(x) = \frac{-36 + 6x}{10}$$
$$f''(9) = \frac{-36 + 54}{10} > 0$$
$$f''(3) = \frac{-36 + 18}{10} < 0$$

luego, x=9 es mínimo y x=3 es máximo.

Solución: Será necesario instalar de tipo A = x = 3 alarmas y de tipo B = y = 6 alarmas.

23. Calcula dos números que cumplan que al sumarlos resulte 10 y la resta de uno de ellos menos el inverso del otro sea mínima.

Condición: $x + y = 10$, de donde $y = 10-x$

La función:

$$f(x,y) = x - \frac{1}{y}$$
$$f(x) = x - \frac{1}{10-x} = \frac{9-x^2}{10-x}$$
$$f'(x) = \frac{x^2 - 20x + 9}{(10-x)^2}$$

Como $f'(x) = 0$ tenemos que $x = 19.54$ y $x = 0.46$.

$$f''(x)=\frac{-180}{(10-x)^3}$$
$$f''(19.54)>0 \quad \text{mínimo}$$
$$f''(0.46)<0 \quad \text{máximo}$$

Solución: x=19.54 e y=-9.54.

24. Si un cultivador valenciano planta 200 naranjos por hectárea, el rendimiento promedio es de 300 naranjas por árbol. Por cada árbol adicional que siembre por hectárea, el cultivador obtendrá 15 naranjas menos por árbol. ¿Cuántos árboles por hectárea darán la mejor cosecha?

Nº naranjos / hectárea = 200
Rendimiento / árbol = 300 naranjas
x = nº árboles a plantar
R (x) = Rendimiento(x)

$$R(x)=(200+x)\cdot(300-15x)$$
$$R(x)=60000-2700x-15x^2$$
$$R'(x)=-2700-30x$$
$R'(x)=0 \Rightarrow x=-90$. Solución absurda.

Conclusión: Sin plantar árboles la producción que se obtiene es mejor que si aumentamos el número de frutales de esta variedad.

25. El propietario de un edificio tiene alquilados los 40 pisos del mismo a un precio de 600 € cada uno. Por cada 60€ que el propietario aumenta el precio observa que pierde un inquilino. ¿a qué precio le convienen alquilar los pisos para obtener la mayor ganancia posible?(Ayuda: llamar x = nº de 60 € que aumenta o lo que es lo mismo el nº inquilinos perdidos.)

40 pisos
600 euros / cada uno

- Si aumenta x euros por cada piso cobra 600 + x, pero alquila $40-\frac{x}{60}$ pisos.
- La función es el beneficio obtenido:

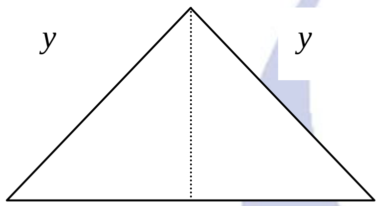
$$B(x)=(600+x)\cdot\left(40-\frac{x}{60}\right) \quad \text{con} \quad 0<x<2400$$
$$B(x)=2400+30x-\frac{x^2}{60}$$

$$B'(x) = 30 - \frac{2x}{60} \Rightarrow B'(x) = 0 \Rightarrow x = 900$$

$$B''(x) = \frac{-x}{30} \Rightarrow B''(900) < 0 \Rightarrow \text{ Es Máximo.}$$

Solución: Aumentará 15·60€ = 900

26. Entre todos los triángulos isósceles (dos lados iguales) de perímetro 30 cm., ¿cuál es el de área máxima?



Condición: $x + 2y = 30 \Rightarrow y = \frac{30 - x}{2}$

$$h = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}$$

Función: $A(x, y) = \frac{x \cdot \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}}{2}$

$$A(x) = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{30 - x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{225 - 15x} = \sqrt{\frac{225\ x^2}{4} - \frac{15x^3}{4}}$$

$$A'(x) = \frac{450 - 15x}{4 \cdot \sqrt{225 - 15x}} \Rightarrow A'(x) = 0 \Rightarrow x = 10$$

$A''(10) < 0 \Rightarrow$ Es un máximo

Solución: $x = 10$, $y = 10$

27. Para la fabricación de un determinado producto, se necesita invertir dinero en contratar empleados y comprar máquinas. El dueño de la fábrica ha estimado que si compra x máquinas y contrata "y" empleados, el número de unidades de producto que podía fabricar vendría dado por la función: $f(x, y) = 90x \cdot y^2$ Cada máquina le supone una inversión de 2500 € y cada contrato de un nuevo empleado otro de 1500 € Si el empresario sólo dispone de un presupuesto de 22500€ para este fin, determine el número de obreros que debe contratar y el número de máquinas que debe comprar para maximizar la producción.

x = máquinas.
y = empleados.

Condición: $2500x + 1500y = 22500 \Rightarrow y = \dfrac{45-5x}{3}$

Función: $f(x,y) = 90xy^2$

$$f(x) = 90x \cdot \left(\frac{45-5x}{3}\right)^2$$
$$f(x) = 250x^3 - 4500x^2 + 20500x$$
$$f'(x) = 750x^2 - 9000x + 20500$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 3\ ;\ x_2 = 9$$
$$f''(x) = 1500x - 9000$$
$$f''(3) < 0 \Rightarrow \text{ Es Máximo.}$$
$$f''(9) > 0 \Rightarrow \text{ Es Mínimo.}$$

Solución: $x = 3$, $y = 30$.

28. Una esmeralda pesa 16 grs. y sabemos que su valor es proporcional al cuadrado de su peso. Si partimos en dos trozos la esmeralda, halla el peso que debe tener cada uno de ellos para que su valor sea mínimo.

Condición: $x + y = 16 \Rightarrow y = 16 - x$

x = peso de un trozo.
y = peso del otro trozo.

La función que queremos optimizar es la que nos da el valor de la esmeralda después de dividirla, que dependerá del peso de cada trozo.

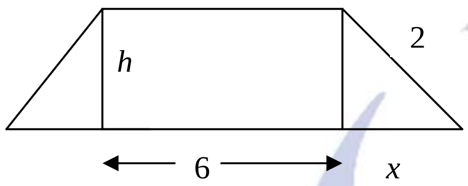
Función: $f(x,y) = kx^2 + ky^2$

$$f(x,y) = k\left(x^2 + y^2\right)$$
$$f(x) = k\left(x^2 + (16-x)^2\right)$$
$$f(x) = k\left(2x^2 - 32x + 256\right)$$
$$f'(x) = k(4x - 32)$$
$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 8, \text{ consideramos } k > 0$$
$$f''(x) = 4k$$
$$f''(8) > 0 \Rightarrow \text{ Es mínimo.}$$

Solución: x = 8 gramos e y = 8 gramos.

Ejercicios de ampliación

29. La base menor de un trapecio isósceles mide 6 metros y la longitud de los lados no paralelos es de 2 metros. Calcula cuánto debe medir la base mayor para que el área del trapecio sea máxima.



Condición (por Pitágoras): $h^2 + x^2 = 4 \;\Rightarrow\; h = \sqrt{4 - x^2}$

Función: $A_{trapecio}$

$$A_{trapecio} = \frac{(BASE + base)\cdot h}{2} = \frac{(6 + 2x)\cdot h}{2} = (3 + x)h = f(x,h)$$

$$f(x) = (3 + x)\sqrt{4 - x^2}$$

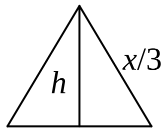
$$f'(x) = \frac{4 - 6x - 3x^2}{\sqrt{4 - x^2}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-3 - \sqrt{21}}{2} < 0 \text{ Se descarta} \\ x_2 = \dfrac{-3 + \sqrt{21}}{2} > 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{6x^3 + 24x^2 - 32x - 24}{\left(\sqrt{4 - x^2}\right)^3} \Rightarrow f''\left(\frac{-3 + \sqrt{21}}{2}\right) < 0 \text{ es máximo}$$

Solución: $x = \dfrac{-3 + \sqrt{21}}{2}$ e $y = -3 + \sqrt{21}$

(el valor $y = -3 - \sqrt{21}$ se descarta)

30. Se divide un alambre de 100 m de longitud en dos segmentos de longitudes x y 100-x. Con el de longitud x se forma un triángulo equilátero y con el otro segmento se forma un cuadrado. Sea f(x) la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado. Indicar razonadamente para qué valor de x se obtiene que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado es mínima.



Condición:

Altura del triángulo $h=\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2-\left(\frac{x}{6}\right)^2}=\frac{x\sqrt{3}}{6}$

Área del triángulo $a_{triángulo}=\frac{\frac{x}{3}\frac{x\sqrt{3}}{6}}{2}=\frac{x^2\sqrt{3}}{36}$

Área del cuadrado $a_{cuadrado}=\left(\frac{100-x}{4}\right)^2$

Función: $a_{triángulo}+a_{cuadrado}=f(x)$

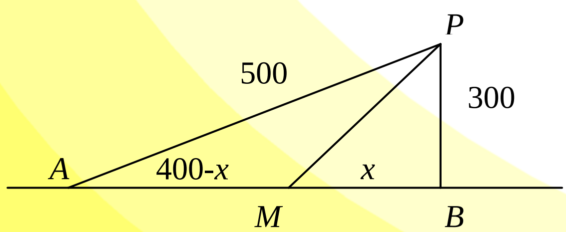
$$f(x)=\frac{x^2\sqrt{3}}{36}+\left(\frac{100-x}{4}\right)^2$$

$$f'(x)=\frac{x\sqrt{3}}{18}-\frac{100-x}{2}\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow x=\frac{900}{\sqrt{3}+9}=83.86$$

$$f''(x)=\frac{\sqrt{3}+9}{18}>0\ \text{(mínimo)}$$

Solución: Para $x=83.86$ resulta la suma de áreas mínima, siendo $h=\frac{83.86\cdot\sqrt{3}}{6}=24.21$

31. En una carretera a través del desierto un automóvil debe de ir desde la ciudad A hasta el oasis P situado a 500 Km de distancia de A. Puede aprovechar para ello una carretera recta que une las ciudades A y B y que le permite ir a una velocidad de 100 Km/h, mientras que por el desierto la velocidad es de 60 Km/h. Sabiendo que la distancia más corta de P a la carretera que une las ciudades A y B es de 300 Km, determina la ruta que deberá usar para ir de A a P en el menor tiempo posible.



La ruta a seguir es *AMP*

Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo *ABP* se obtiene: $\overline{AB}=\sqrt{500^2-300^2}=400$

En el triángulo *MBP* se obtiene $\overline{MP}=\sqrt{x^2+300^2}$

Y el tiempo que tarda el automóvil en recorrer la distancia $AM + MP$ es: $t(x) = \frac{4-x}{100} + \frac{\sqrt{x^2+300^2}}{60}$

Derivando, $t'(x) = \frac{-1}{100} + \frac{x}{60\sqrt{x^2+300^2}}$

Si hacemos $t'(x) = 0 \Rightarrow$ obtenemos $\frac{x}{60\sqrt{x^2+300^2}} = \frac{1}{100} \Rightarrow x = \pm 225$

La solución negativa no tiene sentido: $\overline{AM} = 400 - 225 = 175$

El automóvil deja la carretera a 175 km de la ciudad *A*.

Podemos comprobar que es un mínimo utilizando la segunda derivada:

$$t''(x) = \frac{60(x^2+300^2) - 60x}{60^2 \cdot (x^2+300^2) \cdot \sqrt{x^2+300^2}} \Rightarrow t''(x) = \frac{x^2+300^2-x}{60\ (x^2+300^2) \cdot \sqrt{x^2+300^2}}$$

Para $x = 225 \Rightarrow t''(x) > 0$, por lo tanto, es un mínimo.

Solución: La ruta a seguir es *AMP*, de A a M hay 175 Km. y de M a P hay $\sqrt{225^2+300^2} = 375$ Km., con lo que recorrerá en total 550 Km. a una velocidad de 100 Km/h.

32. Sea T un triángulo de perímetro 60 cm. Uno de los lados del triángulo T mide x cm. y los dos lados tienen la misma longitud.

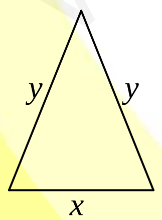
a) Deducir razonadamente las expresiones de las funciones A y f tales que:

A(x) = Área del triángulo T

F(x) = $\{A(x)\}^2$

Indicar además entre que valores puede variar x.

b) Obtener, razonadamente, el valor de x para el que f (x) alcanza el valor máximo.



Condición: $x + 2y = 60 \Rightarrow y = \frac{60-x}{2}$

La altura del triángulo será: $h = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}$

a)

Solución:

$$A(x,y)=\mathrm{A}_{\text{triángulo}}=\frac{x\sqrt{y^2-\frac{x^2}{4}}}{2}\qquad\Rightarrow\quad A(x)=\frac{x\sqrt{\left(\frac{60-x}{2}\right)^2-\frac{x^2}{4}}}{2}$$

$$F(x,y)=\left(A(x,y)\right)^2=\frac{x^2}{4}\left(y^2-\frac{x^2}{4}\right)\quad\Rightarrow\quad F(x)=\frac{x^2}{4}\left(\left(\frac{60-x}{2}\right)^2-\frac{x^2}{4}\right)$$

b)

$$F(x)=\frac{x^2}{4}\left(\frac{(60-x)^2}{4}-\frac{x^2}{4}\right)=\frac{x^2}{4}(900-3x)$$

$$F'(x)=900x-45x^2$$

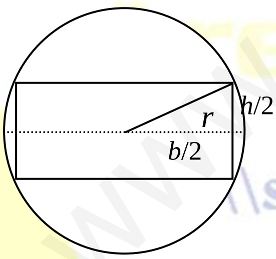
$$F'(x)=0\quad\Rightarrow 900x-45x^2=0\Rightarrow\ x=0\ \text{ y }\quad x=20$$

Por las condiciones del problema descartamos x = 0, siendo:

$F''(x)=-90x\quad\Rightarrow\quad F''(20)<0$. Por lo tanto es máximo.

Solución: x = 20 e y = 20.

33. Comprueba que el rectángulo de mayor área que puede inscribirse en una circunferencia de ecuación $x^2+y^2=r^2$ es un cuadrado de lado $\sqrt{2}r$ **.**



Condición:

$$r^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$r^2=\frac{b^2+h^2}{4}$$

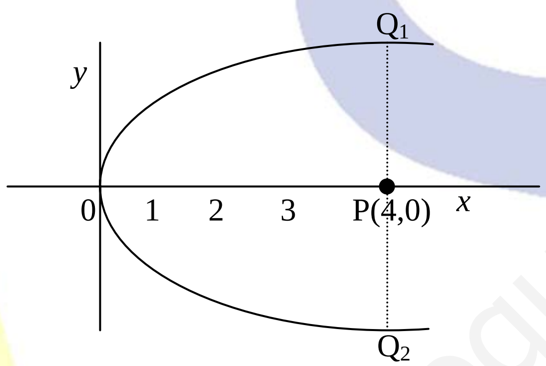
$$h=\sqrt{4r^2-b}$$

Función = Área = $b\cdot h$

$$f(b,h) = b \cdot h$$
$$f(b) = b\sqrt{4r^2 - b^2}$$
$$f'(b) = \sqrt{4r^2 - b^2} - \frac{b^2}{\sqrt{4r^2 - b^2}} \Rightarrow f'(b) = 0 \Rightarrow b = \sqrt{2}r$$
$$f''(b) = -\frac{b^2}{\sqrt{4r^2 - b^2}} - \frac{2b\left(4r^2 - b^2\right) + b^4}{\sqrt{\left(4r^2 - b^2\right)^3}} < 0$$
$$h = \sqrt{4r^2 - b^2} = \sqrt{4r^2 - \left(\sqrt{2}r\right)^2} = \sqrt{2}r$$

Solución: El área es máxima para: $b = \sqrt{2}r$; $h = \sqrt{2}r$

34. Determine los puntos de la curva $y^2 = 4x$ que están a distancia mínima del punto P (4, 0).



Condición: $y^2 = 4x$ de donde $y = 2\sqrt{x}$

Un punto de la curva tiene la forma P(x, $\pm 2\sqrt{x}$)

Función: $d(P,Q) = \sqrt{(x-4)^2 + \left(\pm 2\sqrt{x}\right)^2}$

$$d(P,Q) = \sqrt{(x-4)^2 + \left(\pm 2\sqrt{x}\right)^2}$$
$$d(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 16}$$
$$d'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 16}} \Rightarrow d'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$$
$$d''(x) = \frac{12}{\sqrt{\left(x^2 - 4x + 16\right)^3}} \Rightarrow d''(2) > 0$$

El punto $x = 2$ es mínimo.

Solución: $Q_1(2, 2\sqrt{2})$ y $Q_2(2, -2\sqrt{2})$

35. Un rectángulo tiene por vértices los puntos de coordenadas $(0,0)$, $(a,0)$, $(0,b)$ y (a,b), de modo que el punto (a,b) tiene coordenadas positivas y está situado en la curva de ecuación: $y=\dfrac{1}{x^2}+4$. De todos estos rectángulos hallar razonadamente el de área mínima.

Condición: Si (a, b) pertenece a la curva, verifica: $b=\dfrac{1}{a^2}+4$

Función: El área del rectángulo es $A(a)=a\left(\dfrac{1}{a^2}+4\right)=\dfrac{1}{a}+4a$

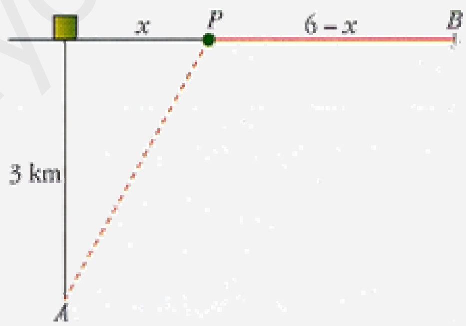
$$A'(a)=\frac{-1}{a^2}+4\Rightarrow A'(a)=0\Rightarrow a=\pm\frac{1}{2}$$

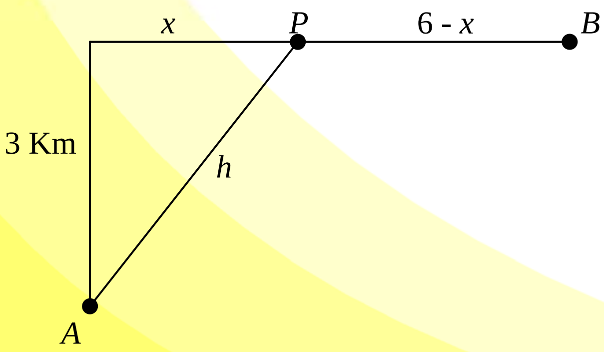
El valor a = -1/2 no es valido por que se indica que las coordenadas son positivas.

$$A''(a)=\frac{2}{a^3}\Rightarrow A''(\tfrac{1}{2})>0 \text{ (es mínimo)}$$

Solución: Los vértices serán (0,0), (1/2,0), (1/2,8) y (0,8)

36. (Problema del tiempo mínimo).- Un nadador, A, se encuentra a 3 km. De la playa enfrente de una caseta. Desea ir a B, en la misma playa, a 6 Km. De la caseta. Sabiendo que nada a 3 km/h y que anda por la arena a 5 km/h, averigua a qué lugar debe dirigirse a nado para llegar a B en el menor tiempo posible.





$h=\sqrt{9+x^2}$ a 3 Km/h
Recorre $6-x$ a 5 Km/h

Tiempo empleado:

$$t(x)=\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}+\frac{6-x}{5}$$

$$t'(x) = \frac{2x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{5}$$

Haciendo $t'(x) = 0 \Rightarrow 10x - 6\sqrt{x^2+9} = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{9}{4} = 2'25\ ;\ x_2 = \frac{-9}{4}$ (No valida)

$t''(2'25) > 0 \Rightarrow$ Es mínimo.

Solución:

- Debe dirigirse a un punto que esté a 2.25 Km de la caseta.
- Tiempo que tarda en llegar:

$$t = \frac{\sqrt{2'25^2+9}}{3} + \frac{6-2'25}{5}$$

t = 2 horas.

37. Determina el punto de la gráfica de la función $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 7x + 5$ en el que la pendiente de la recta tangente es máxima. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en ese punto?

Condición: $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 7x + 5$

Pendiente: $p(x) = f'(x) = -3x^2 + 12x - 7$

$p'(x) = -6x + 12 \quad , \quad p'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

$p''(x) = -6 \quad , \quad p''(2) < 0 \quad \Rightarrow \quad Es\ Máximo$

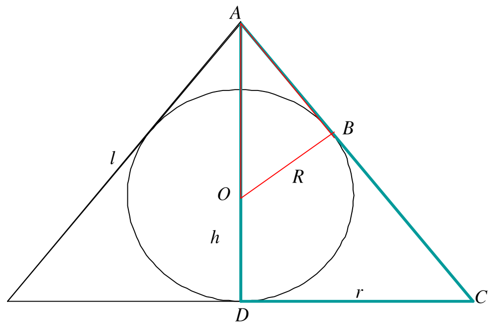
Solución:

Punto buscado: P(2, f(2))
P(2, 7)

Ecuación Recta Tangente: $y - 7 = p(2)\,(x-2)$
$y - 7 = 5\cdot(x-2)$

Ejercicio 8 Determinar las dimensiones del cono de volumen mínimo circunscrito a una esfera de radio R.

Solución:



El volumen del cono es $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Los triángulos AOB y ADC son semejantes, la relación de semejanza: $\frac{\overline{DC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$, puede escribirse $\frac{r}{R} = \frac{h}{\sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OB}^2}}$ ó $\frac{r}{R} = \frac{h}{\sqrt{\left(\overline{AD}-\overline{OD}\right)^2 - R^2}}$ ó $\frac{r}{R} = \frac{h}{\sqrt{(h-R)^2-R^2}}$ con ello $r = \frac{Rh}{\sqrt{h^2-2hR}}$, y

$v = \frac{1}{3}\pi \frac{R^2h^2}{h^2-2hR} h = \frac{\pi R^2}{3} \frac{h^3}{h^2-2hR}$

Extremos de v:

$v' = \frac{\pi R^2}{3} \frac{3h^2\left(h^2-2hR\right)-(2h-2R)h^3}{\left(h^2-2hR\right)^2} = \frac{\pi R^2}{3} \frac{h^3(3h-6R-2h+2R)}{\left(h^2-2hR\right)^2} = \frac{\pi R^2}{3} \frac{h^3(h-4R)}{\left(h^2-2hR\right)^2}$

$v' = 0 \Rightarrow h^3(h-4R) \Rightarrow h = \begin{cases} 0 \\ 4R \end{cases}$

Dado que, evidentemente $h > 0$, debe excluirse $h = 0$, y el signo de v' depende de $h - 4R$:

Para $h < 4R$ $v' < 0$, por lo que v decrece

Para $h > 4R$ $v' > 0$, por lo que v crece

Por tanto, usando el criterio de la primera derivada, en $h = 4R$ hay un mínimo.

$h = 4R \Rightarrow r = \frac{R4R}{\sqrt{16R^2-8R^2}} = \frac{2R}{\sqrt{2}} = R\sqrt{2}$,

Con ello el volumen del cono será $v = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi\left(R^2 2\right)(4R)}{3} = \frac{8\pi R^3}{3}$, que es el doble del volumen de la esfera $\left(\frac{4\pi R^3}{3}\right)$. ■