

FRACCIONES ALGEBRAICAS

1. Comprueba en cada caso si las fracciones dadas son equivalentes:

a) $\frac{x+2}{3x+6} y \frac{1}{3}$ b) $\frac{x^2+x}{x^2} y \frac{x+1}{x}$
 c) $\frac{3x}{x^2-x} y \frac{3}{x-2}$ d) $\frac{3x-3}{9x^2-9} y \frac{1}{3x-3}$

Sol: a) Sí; b) Sí; c) No; d) No

2. Calcula:

a) $\frac{1}{3x} + \frac{3}{2x} - \frac{1}{x}$ b) $\frac{2}{3x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2x^2}$ c) $\frac{3}{x} - \frac{x}{x-1}$ d) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$

Sol: a) $\frac{5}{6x}$; b) $\frac{4x+3}{6x^2}$; c) $\frac{-x^2+3x-3}{x(x-1)}$; d) $\frac{2}{x^2-1}$

3. Sacar factor común y luego simplificar:

a) $\frac{5x+5}{3x+3}$ b) $\frac{x^2-3x}{2x-6}$ c) $\frac{x^2+x}{x^2-1}$ d) $\frac{12x}{4x^2+2x}$

Sol: a) $\frac{5}{3}$; b) $\frac{x}{2}$; c) $\frac{x}{x-1}$; d) $\frac{6}{2x+1}$

4. Recuerda los productos notables, descompón en factores y simplifica:

a) $\frac{x^2-1}{x+1}$ b) $\frac{x^2-1}{(x-1)^2}$ c) $\frac{x^2-4}{2x-4}$ d) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$
 e) $\frac{x^2-16}{x^2+8x+16}$ f) $\frac{x(x+2)}{x^2+4x+4}$ g) $\frac{x^2-6x+8}{x^2-9}$ h) $\frac{x^2-9}{x^4-81}$

Sol: a) $x-1$; b) $\frac{x+1}{x-1}$; c) $\frac{x+2}{2}$; d) $\frac{x+2}{x-2}$; e) $\frac{x-4}{x+4}$; f) $\frac{x}{x+2}$; g) $\frac{x-3}{x+3}$; h) $\frac{1}{x^2+9}$

5. Descompón en factores el dividendo y el divisor y después simplifica:

a) $\frac{x^2+3x}{x^2+x-6}$ b) $\frac{x^2+2x-3}{x^3-x^2}$ c) $\frac{x^3+4x^2+3x}{x^2+x-6}$ d) $\frac{x^2+2x-3}{x^2+4x-5}$

Sol: a) $\frac{x}{x-2}$; b) $\frac{x+3}{x^2}$; c) $\frac{x^2+x}{x-2}$; d) $\frac{x+3}{x+5}$

6. Opera y simplifica:

a) $\left(\frac{4}{x} - x\right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)$ b) $\frac{x+2}{(x+2)^2} \cdot \frac{x^2-4}{x}$

c) $\left[\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1}\right) : \left(x - \frac{1}{x+1}\right)\right] \cdot x$

d) $\frac{x^2}{2} \cdot \left(\frac{2}{x} : \frac{1}{x+2}\right)$ e) $\left(\frac{3}{x^2} + \frac{x+2}{x} - \frac{x+1}{x-2}\right) \cdot 2x^2$

Sol: a) $4-2x$; b) $\frac{x-2}{x}$; c) $3x+2$; d) x^2+2x ; e) $-\frac{x^2+x+2}{x^2(x-2)}$

7. Reduce a una sola fracción y resuelve:

a) $-\frac{x^2}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} = 0$ b) $\frac{x+3}{x^2-2x+1} - \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+1} = 0$

c) $\frac{x+2}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} - \frac{x+5}{x+2} = 0$

Sol: a) $x=2$, $x=0$; b) $x=3$, $x=-1/3$; c) $x=0$

8. Haz las operaciones indicadas y simplifica:

a) $\left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} \right) \cdot \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right)$ b) $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{x+y}{xy} \right) \cdot \frac{2xy}{x+y}$

c) $\left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x}{x+1} \right) \cdot \left(x - \frac{1}{x} \right)$

Sol: a) 4; b) $\frac{4y}{x+y}$; c) $\frac{3x+1}{x}$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{1+x}{x-3} - \frac{x}{x+2} = \frac{3x+5x^2}{x^2-x-6}$ b) $\frac{x}{x-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{x+1}{x^2-1}$

c) $\frac{x^2}{x^2+2x+1} = \frac{x+2}{x+1} - 2$ d) $\frac{x+1}{x-2} + \frac{x}{x+2} = \frac{7x+2}{x^2-4}$

Sol: a) $x=1$, $x=-2/5$; b) $x=0$, $x=-1/2$; c) $x=-4$; d) $x=3$, $x=0$

10. Opera:

a) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} - \frac{x-1}{x^2-4x+3}$ b) $\frac{1}{x+2} + \frac{3}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+x-2}$

c) $\frac{x}{x^2-x-2} - \frac{3}{x+1} - \frac{x-1}{x^2-3x+2}$ d) $\frac{x}{x^2-1} - \frac{3}{x+1} - \frac{x+2}{x^2+x-2}$

Sol: a) $\frac{1}{x-1}$; b) $\frac{3x+4}{x^2+x-2}$; c) $\frac{-3x+5}{x^2-x-2}$; d) $\frac{2-3x}{x^2-1}$

11. Simplifica:

a) $\frac{\frac{9+6x+x^2}{9-x^2} \cdot \frac{3x^2-x^3}{3x^2+x^3}}{\frac{2x-4}{3/4+2/8} : \frac{2x^2-8x+8}{x-2}}$

b) $\frac{x^2+6x+5}{x^2-5x+4} \cdot \frac{x-2}{x^2-4} + \frac{x^3-2x}{x^2-4x}$

c) $\frac{\frac{x^2+2x+1}{x^2-1} \cdot \frac{4x^2-4x}{x+1}}{\frac{2x^2+14x+20}{x^3-50+2x^2-25x} : \frac{x-5}{2x^3-20x^2+50x}}$

d) $\frac{\frac{x^2-1}{x^2+2x+1} \cdot \frac{2x^2-8x-10}{x-1}}{\frac{2x+2}{x^2+x-2} : \frac{x+1}{x^3-4x^2-7x+10}}$

$$e) \frac{\left(\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 9} \cdot \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 3x + 2} \right) \cdot \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 4x + 4}}{\frac{2x^2 - 2x}{3x^2 + 3x - 6} - \frac{3x^2 + 12x + 12}{2x}} \quad f) \frac{1 + \frac{x-3}{x+3}}{\frac{3-x}{3x}} - \frac{\frac{x+3}{x} - \frac{x+3}{3}}{x-3} - 1$$

$$g) \left(\frac{x^3 + x^2 - 6x}{x^2 + x} - \frac{x^2 - 9}{x^3 + 6x^2 + 9x} \right) \cdot \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x} \quad h) \frac{1 + \frac{x}{y}}{\frac{x^2 - y^2}{xy - y^2}}$$

$$i) \frac{\frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} - \frac{a^2 + 1}{a^2 - 1}}{\frac{a - 1}{a + 1} - \frac{a + 1}{a - 1}} \cdot \left(\frac{a^2 + 1}{a} - \frac{a^2 - 2a + 1}{(a - 1)^2} \right) \quad j) \frac{1 + \frac{a+b}{a-b}}{1 - \frac{a+b}{a-b}}$$

Sol: a) 1; b) $\frac{x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 10x + 18}{(x-1)(x-4)(x+2)}$; c) 1; d) 1; e) 1; f) $\frac{x(x-3)}{3}$; g) 1;

h) 1; i) $\frac{a^2}{(a^2 + 1)^2}$; j) $-\frac{a}{b}$

12. Simplifica:

$$a) \frac{a^2 + 6a + 9}{a^2 - 9} : \frac{a^2 + 9}{a^2 - 81} \quad b) \frac{2a^2 - 4ab + 2b^2}{3x - 6} : \frac{a - b}{4x - 8}$$

$$c) \frac{16 - x^4}{4x + 8} : (32 - 8x^2) = \quad d) \frac{16 - x^4}{4x + 8} : (32 + 8x^2) =$$

$$e) \frac{\frac{36}{x+y}}{6} : \frac{\frac{3x}{x+y}}{1} = \quad f) \frac{x^2 - 4}{a^2 - b^2} : \frac{x - 2}{a + b} =$$

$$g) \frac{2y}{y-1} - \frac{y-1}{3y} - \frac{3-y}{y} = \quad h) \frac{y}{y-2} - \frac{y}{y^2 - 3y + 2} - \frac{y}{y-1} =$$

Sol: a) $(a+3)^2$; b) $8(a-b)/3$; c) $\frac{4+x^2}{32(x+2)}$; d) $\frac{2-x}{32}$; e) $\frac{2}{x(x+y)}$;

f) $\frac{x+2}{a-b}$; g) $\frac{2(4y^2 - 5y + 4)}{3y(y-1)}$; h) 0

13. Opera y simplifica cuando sea posible:

$$a) \frac{3+x}{3-x} - \frac{1}{-x-3} - \frac{x^2}{9-x^2} = \quad b) \frac{1}{y^2 - y} + \frac{2y+1}{y^2 - 1} + \frac{y}{y+1} =$$

$$c) \frac{\frac{x^2 - 3x - 10}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} \cdot \frac{x^2 - 4}{x-5}}{\frac{x+2}{3-x} \cdot \frac{6x - 2x^2}{2x^2 - 4x}} = \quad d) \frac{x^4 - 3x^3}{x^4 - 6x^3 + 9x^2} =$$

$$e) \frac{2x^2 + 5x + 2}{2x^3 + x^2 - 8x - 4} =$$

$$f) \frac{2x+6}{x^2-3x} - \frac{x+5}{x^2-4x+3} + \frac{x-1}{2x-6} =$$

$$\text{Sol: a) } \frac{5x+12}{(x+3)(3-x)}; \text{ b) } \frac{y^3+y^2+2y+1}{y(y-1)(y+1)}; \text{ c) } 1; \text{ d) } \frac{x}{x-3}; \text{ e) } \frac{1}{x-2}; \text{ f) } \frac{x^3-x-12}{2x(x-3)(x-1)}$$

14. Divide y comprueba:

$$a) z^5 - 2z^4 - 3z^3 + 6z^2 + 2z - 4 : z^2 - 2$$

$$b) x^5 - 3x^2 - 1 : x^2 - 1$$

$$c) y^6 - 3y^4 + 3y^3 + 2 : y^3 - y + 1$$

$$\text{Sol: a) } z^3 - 2z^2 - z + 2; \text{ b) } C: x^3 + x - 3, R: x - 4; \text{ c) } C: y^3 - 2y + 2, R: -2y^2 + 2y$$

15. Halla a para que $x^3 - ax + 125$ sea divisible entre $x + 5$. Sol: $a = 0$

16. Hallar el valor que toma el polinomio $p(x) = x^2 - 6x + 1$ para $x = 2 - \frac{5}{\%}$. Sol: $2 - \frac{5}{\%}$

17. Opera y simplifica:

$$a) \frac{x-1}{x^2+2x+1} - \frac{x}{x+1} - \frac{1}{x-1} =$$

$$b) \frac{x}{x^2-x} + \frac{1}{x-1} + \frac{x-1}{x^2-1} =$$

$$c) \frac{x^2+x}{x^2-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} =$$

$$d) \frac{x}{x^2-1} + \frac{x}{x+1} - \frac{x}{x-1} =$$

$$e) \frac{1}{x+1} - \frac{x^2+1}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} + \frac{x}{x+1} =$$

$$f) \frac{x-1}{x^2+x} - \frac{3(x-1)}{x} + \frac{2x}{x+1} =$$

$$g) 2 \quad h) \frac{x+2}{x^2-x} - \frac{2}{x-1} + \frac{3x}{x^2-1} =$$

$$\text{Sol: a) } \frac{-x^3-3x}{(x^2+2x+1)(x-1)}; \text{ b) } \frac{3x+1}{x^2-1}; \text{ c) } \frac{x^2+x-2}{x^2-1}; \text{ d) } -\frac{x}{x^2-1}; \text{ e) } \frac{-x-3}{x^2-1};$$

$$f) \frac{-x^2+x+2}{x^2+x}; \text{ g) } 1; \text{ h) } \frac{2x^2+x+2}{x(x^2-1)}$$

18. Opera y simplifica si es posible:

$$a) \frac{\frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1} - \frac{x}{x-1}} =$$

$$b) \frac{\frac{x^2-2x+1}{x-1} - \frac{x^2-1}{x+1}}{\frac{x}{x^2-1} + \frac{1}{x-1}} =$$

$$c) \frac{\frac{2x-2x^2}{(x+1)^2} - \left(\frac{x^2+3x+2}{(x-1)^2} - \frac{x^2-x+1}{x-1} \right)}{\frac{x^2+2x+1}{x^2-1} + \frac{x^2-2x+1}{(x+1)^2}} =$$

$$d) \frac{\frac{x^2-1}{x+1} + \frac{x^2+2x+1}{x+1}}{\frac{1}{x^2-3x+2} - \frac{1}{x^2+x-6}} =$$

$$e) \frac{x^2+2x-3}{x-1} + \frac{3x+1}{2x} - \frac{x^2-2x+1}{3x} =$$

$$f) \frac{\frac{x^2+2x+1}{(x-1)^2} - \frac{x^2-x+1}{x-1}}{\frac{x+1}{x^2-1} + \frac{x^2+2x+1}{x+1}} =$$

$$g) \frac{x-1}{x-1} + \frac{x-1}{x+3} - \frac{x-3}{x+1} =$$

$$h) \frac{x-2}{x^2-1} + \frac{2x}{x+1} - \frac{3}{(x-1)^2} =$$

$$\text{Sol: a) } -x; \text{ b) } 0; \text{ c) } \frac{x^3 - 3x^2 - x - 3}{x^2 + 3}; \text{ d) } \frac{x(x+3)(x^2 - 3x + 2)}{2}; \text{ e) } \frac{4x^2 + 31x + 1}{x^2 + 3};$$

$$f) \frac{-x^2 + 2x - 2}{x^2}; \text{ g) } \frac{x^2 + 4x + 11}{(x+3)(x+1)}; \text{ h) } \frac{2x^3 - 3x^2 - 4x - 1}{(x^2 - 1)(x - 1)}$$

19. Opera y simplifica:

$$a) \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2} =$$

$$b) \frac{x^2 - 1}{x + 2} + \frac{3x - 3}{x + 3} - \frac{x - 3}{x^2 + 5x + 6} =$$

$$c) \frac{x-1}{x+2} + \frac{x-3}{x+3} - \frac{x-3}{x^2+5x+6} =$$

$$d) \frac{x-1}{x+2} - \frac{3x-3}{x+3} + \frac{2x-2}{x+2} =$$

$$e) \frac{x-2}{x+1} - \frac{x-1}{x+3} + \frac{x+2}{x+1} =$$

$$f) \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} + \frac{2x}{x-1} =$$

$$\text{Sol: a) } \frac{1}{x+2}; \text{ b) } \frac{x^3 + 6x^2 + x - 6}{x^2 + 5x + 6}; \text{ c) } \frac{2x^2 - 6}{x^2 + 5x + 6}; \text{ d) } \frac{3(x-1)}{(x+3)(x+2)}; \text{ e) } \frac{x^2 + 6x + 1}{(x+3)(x+1)};$$

$$f) \frac{2x^2 + 5x - 5}{x^2 - 1}$$

20. Opera y simplifica:

$$a) \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} + \frac{x}{x-1} =$$

$$b) \frac{3x}{x-1} - \frac{x+2}{x+1} - \frac{3x-1}{x^2-1} =$$

$$c) \frac{\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} + \frac{x}{x-1}}{\frac{x+5}{x-5}} =$$

$$d) \frac{\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} + \frac{x}{x-1}}{\frac{x^2-25}{x^2-4x-5}} =$$

$$e) \frac{\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} + \frac{x}{x-1}}{\frac{x^2-6x+5}{x^2-1}} =$$

$$f) \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{x}{x^2-1} =$$

$$\text{Sol: a) } \frac{x+5}{x+1}; \text{ b) } \frac{2x^2 - x + 3}{x^2 - 1}; \text{ c) } \frac{x-5}{x+1}; \text{ d) } 1; \text{ e) } \frac{x+5}{x-5}; \text{ f) } \frac{2x^2}{(x-1)^2(x+1)}$$