EJERCICIOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

1. **Halla las ecuaciones de la recta *r* que pasa por los puntos A(1,4) y B(0,-1) en todas sus formas: vectorial, continua, punto-pendiente, explícita y general. Comprueba si el punto C(-1,3) pertenece a la recta.**

a) Vectorial: necesitamos un punto, un vector y un parámetro que llamaremos *t*.

Punto: A(1, 4)

Vector: $\overrightarrow{BA}=(1,4)-(0,-1)=(1,5)$

$$\boxed{(x,y)=(1,4)+t\,(1,5)}$$

b) Continua: necesitamos un punto y un vector.

Vamos a tomar el mismo punto y vector que en el caso anterior.

$$\boxed{\frac{x-1}{1}=\frac{y-4}{5}}$$

c) Punto-pendiente: requerimos un punto y la pendiente de la recta *r*.

Pendiente: $m=\frac{5}{1}=5\ \ (coordenada\ y\ del\ vector\ \overrightarrow{AB}\ entre\ coordenada\ x)$

Punto: B(0,-1)

$$y-(-1)=5(x-0)$$

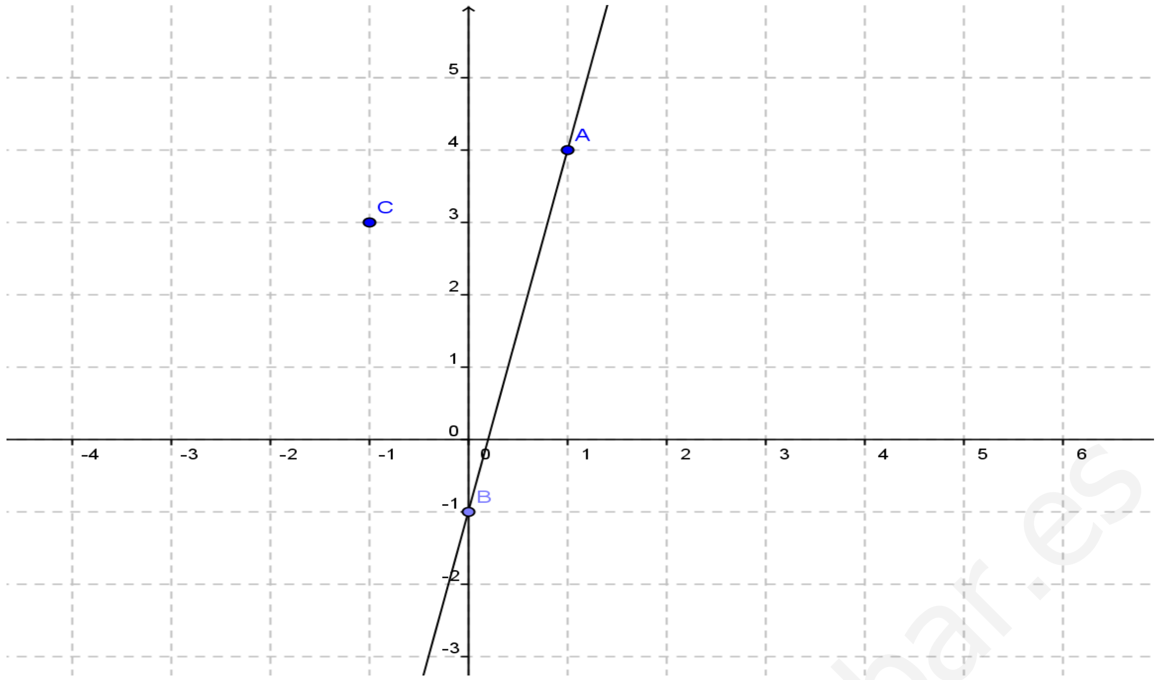
$$\boxed{y+1=5(x)}$$

d) Explícita: $y=mx+n$ m es la pendiente y n la ordenada en el origen.

Pendiente: ya la hemos calculado en el apartado anterior, $m=5$

Ordenada en el origen: B(0,-1) $-1=0\cdot 5+n$ $n=-1$

$$\boxed{y=5\cdot x-1}$$



e)<u>General:</u>Obtenemos la normal según el vector director $\vec{BA}=(1,5)$ $\vec{n}=(-5,1)$

$$-5\cdot x+1\cdot y+C=0$$

Despejamos el punto B(0,-1) para hallar C: $-5\cdot 0+1\cdot(-1)+C=0$ $C=1$

Luego,

$$\boxed{-5x+y+1=0}$$

f) Para comprobar si el punto C(-1,3) pertenece a la recta, lo sustituimos en la ecuación general $-5\cdot(-1)+3+1=0$ $9\neq 0$ Con lo que el punto $\boxed{C(-1,3)\notin r}$

2. Dada la siguiente recta: *2x+3y-4=0*. Halla el vector director, pendiente, vector normal y un punto que esté contenido en ella.

Como tenemos la recta en forma general, podemos obtener lo que nos piden directamente de dicha expresión:

<u>Vector director:</u> $\boxed{\vec{v}=(-3,2)}$ Invertimos los coeficientes de x e y, cambiado uno de ellos de signo.

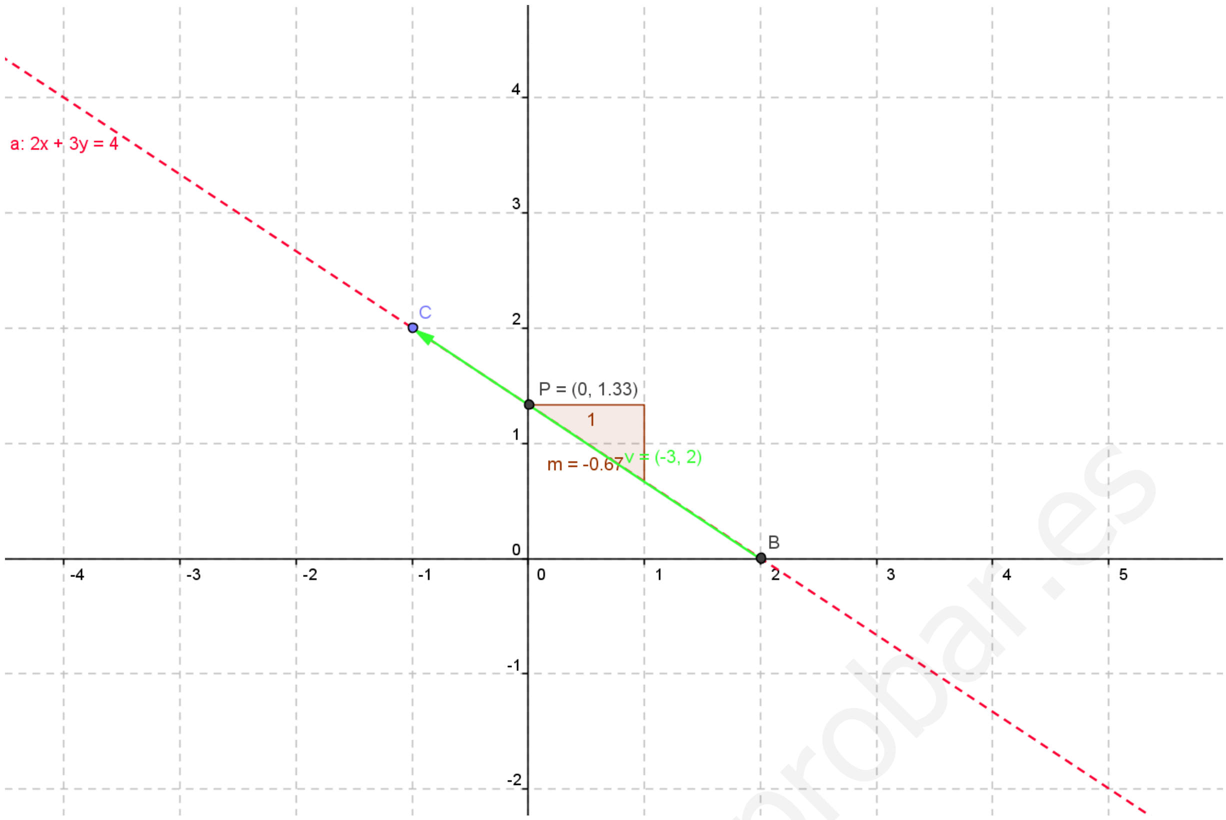
<u>Pendiente:</u> $\boxed{m=\frac{2}{-3}=\frac{-2}{3}}$

<u>Vector normal:</u> $\boxed{\vec{n}=(2,3)}$ Son los coeficientes de x e y.

<u>Un punto contenido en la recta:</u> Tomamos, por ejemplo, x=0

$x=0$ $2\cdot 0+3\cdot y-4=0$ $y=\frac{4}{3}$

Luego, un punto contenido en la recta es $\boxed{P\left(0,\frac{4}{3}\right)}$



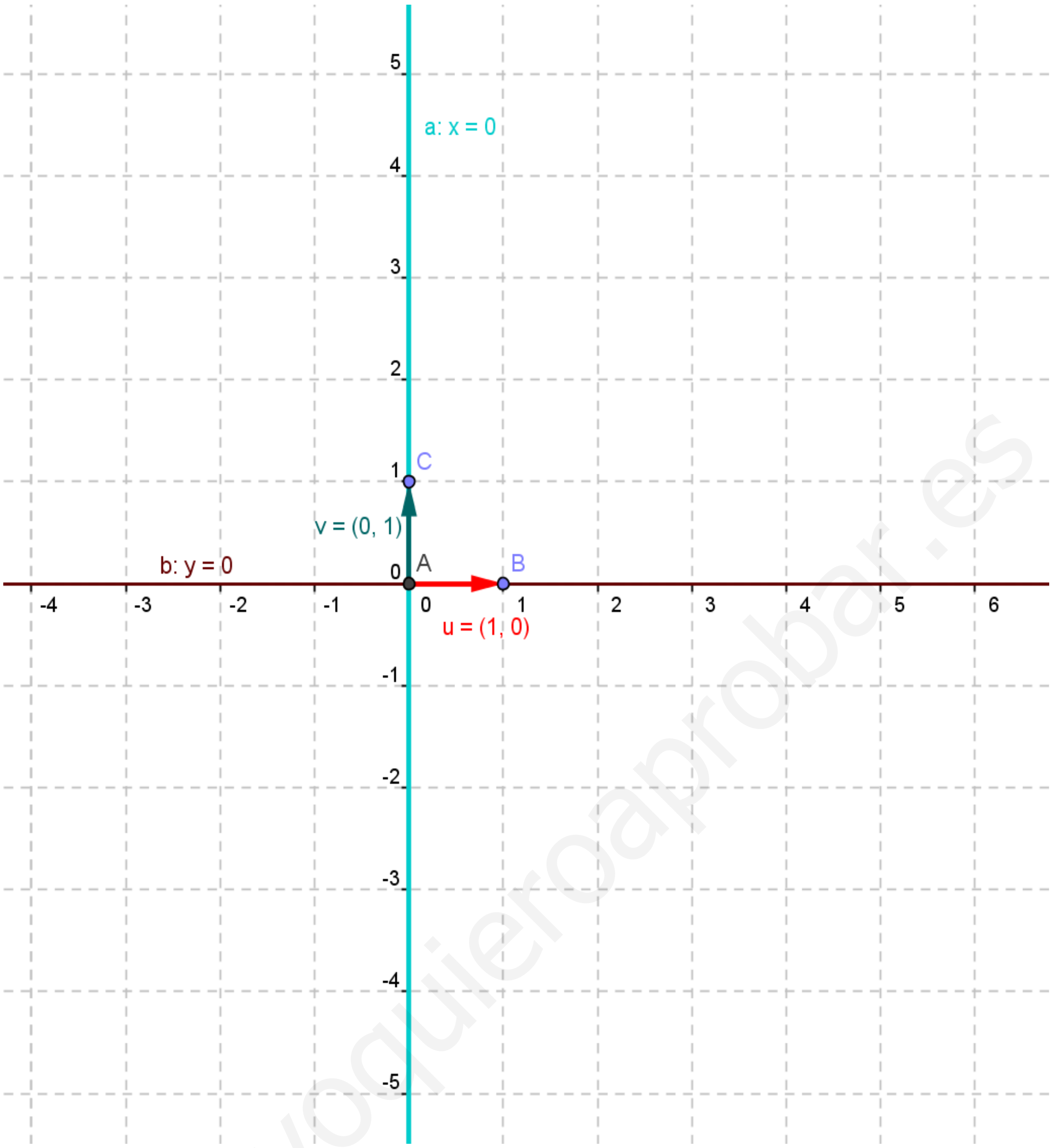
3. **Escribe las ecuaciones de los ejes de coordenadas de dos formas diferentes: general y vectorial.**

Eje x: $y=0$ Forma general.

$(x,y)=(0,0)+t(1,0)$ Forma vectorial. Es preciso darse cuente de que al darle al parámetro *t* cualquier valor real, obtenemos todos los puntos posibles del eje x.

Eje y: $x=0$ Forma general.

$(x,y)=(0,0)+\lambda(0,1)$ Forma vectorial. En este caso hemos denominado al parámetro con otra letra distinta, debido a que las dos rectas son diferentes.



4. Dados los puntos A(2,-4), B(-2,0) y C(-4,7):
a) Calcula la distancia entre A y C.
b) Encuentra la ecuación explícita de la recta que pasa por A y B.

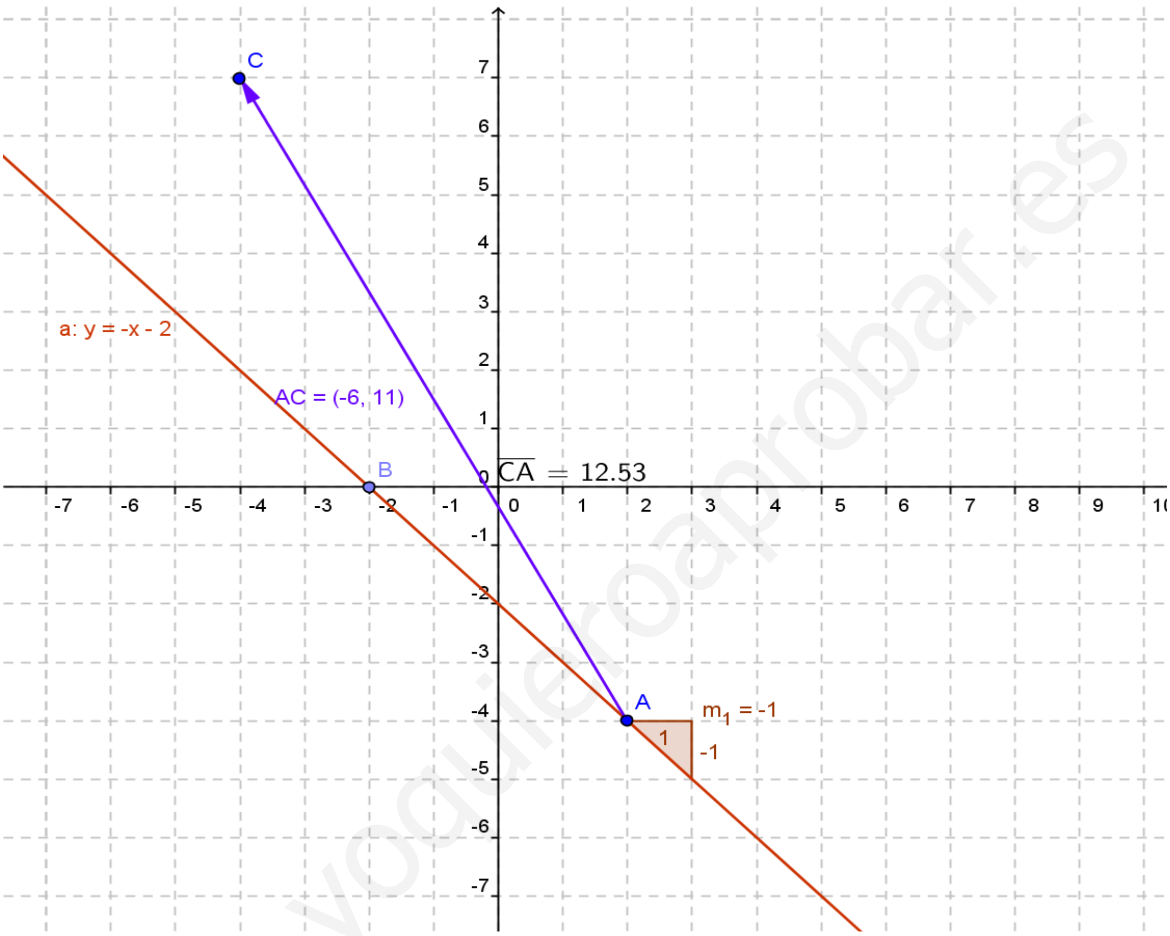
a) Para determinar la distancia, primero obtenemos el vector director $\vec{AC}=(-6,11)$. Sabemos que la distancia es el módulo de ese vector:

$$d=|\vec{AC}|=\sqrt{(-6)^2+(11)^2}=\sqrt{36+121}=\sqrt{157}\,u$$
$$d=12'53\,u$$

b) Ecuación explícita: $y=mx+n$

Obtenemos la pendiente a partir del vector director que hemos calculado en el apartado A: $m=\dfrac{4}{-4}=-1$

La ordenada en el origen la obtenemos sustituyendo el punto B(-2,0) en la ecuación: $0=-1\cdot(-2)+n \quad n=-2$. Entonces, $\boxed{y=-x-2}$



5. Dada la recta de ecuación r:x-2y+1=0 y el punto A(2,-2), calcula:
a) La ecuación de la recta s que pasa por el punto A(2,-2) y es paralela a r.
b) La ecuación de la recta t que pasa por el punto A(2,-2) y es perpendicular a r.
c)El punto M de intersección entre r y t.
d) El punto simétrico de A respecto de M.

a) Una recta paralela a s tiene el mismo vector normal, esto es, $\vec{n}=(1,-2)$, con lo que la ecuación general sería $x-2y+C=0$.

Ahora sustituimos el punto A(2,-2) en la ecuación anterior para hallar C:

$2-2\cdot(-2)+C=0 \quad C=-6$

Ecuación en la forma general: $\boxed{x-2y-6=0}$

b) Una recta perpendicular a *r* tiene como vector director la normal de *r*: $\vec{v}=(1,-2)$, como nos dan el punto A(2,-2), podemos expresar la recta *t* de forma continua:

$$\boxed{\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{-2}}$$

En forma continua la recta *t* viene dada como: $-2x-y+2=0$

c) Para obtener el punto de intersección entre dos rectas resolvemos el sistema de ecuaciones.

$$\begin{array}{l} r: x-2y+1=0 \\ t: -2x-y+2=0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2x-4y=-2 \\ \underline{-2x-y=-2} \\ -5y=-4 \end{array} \qquad y=\frac{-4}{-5}=\frac{4}{5} \quad x=2y-1=\frac{2\cdot 4}{5}-1=\frac{3}{5}$$

$$\boxed{M\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)}$$

d) A(2,-2) $\quad M\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$

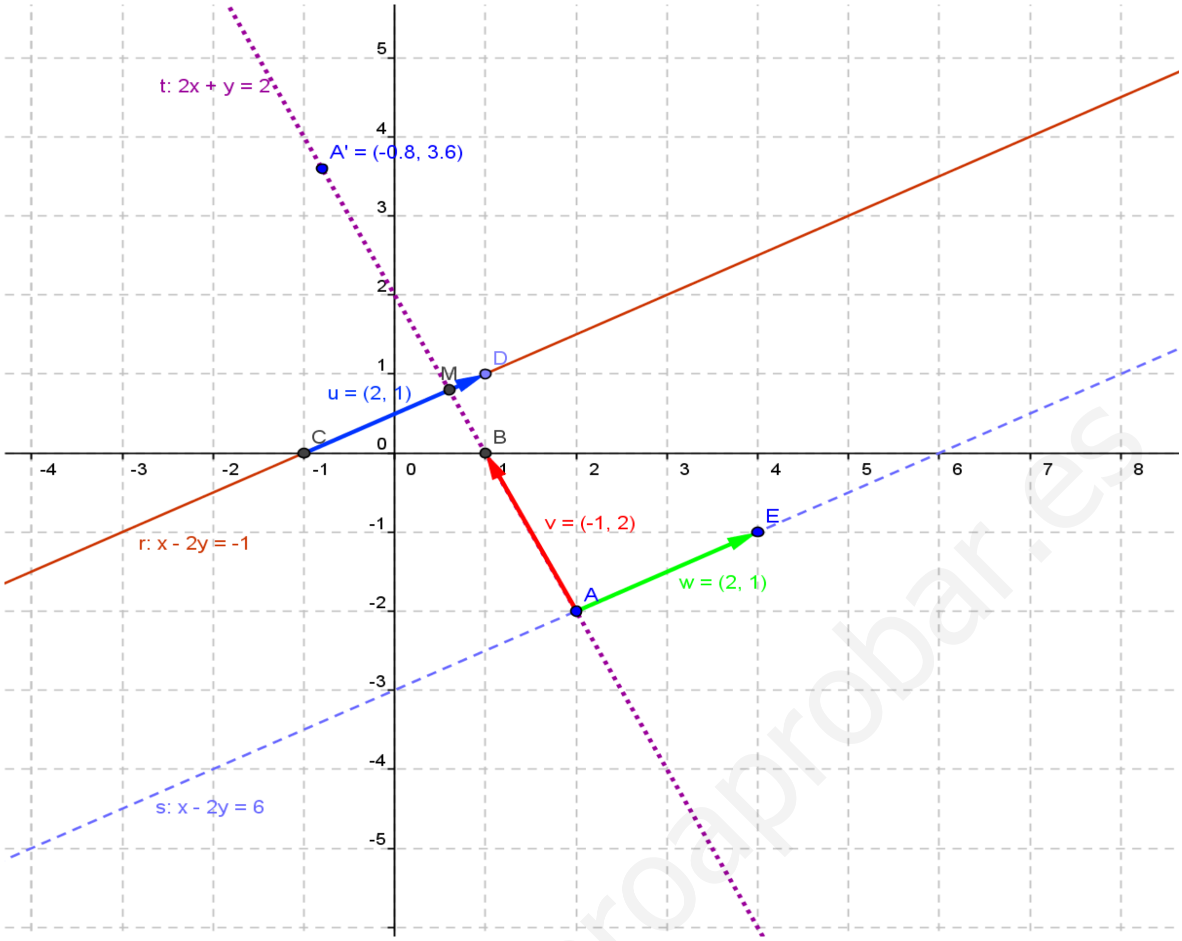
Empleando la fórmula del punto medio: $\dfrac{A+A'}{2}=M$

luego,

$$A+A'=2M\text{, entonces}$$

$$A'=2M-A=2\cdot\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)-(2,-2)=\left(\frac{6}{5},\frac{8}{5}\right)-(2,-2)=\left(\frac{-4}{5},\frac{18}{5}\right)$$

$$\boxed{A'\left(\frac{-4}{5},\frac{18}{5}\right) \textit{es el punto simétrico de } A \textit{ respecto de } M.}$$



6. En el triángulo de vértices A(-2,1), B(1,4) y C(4,1), hallar:
a)La ecuación de la altura que parte del vértice C.
b)La ecuación de la mediatriz m del lado AB.

a) Para obtener la ecuación de la altura que parte del vértice C, tenemos que obtener el vector perpendicular al vector de la recta de la base opuesta, esto es, el vector de la recta *r* que comprende a los puntos A y B.

Por ello, calculamos el vector director de dicha recta, que hemos denominado *r:*

$\vec{v}=(B-A)=(3,3)$

Vector perpendicular: $\vec{w}=(3,-3)$

Con el vector perpendicular y el punto C(4,1) podemos hallar la ecuación en forma continua de la altura:

$$\boxed{\frac{x-4}{3}=\frac{y-1}{-3}}$$

b) La mediatriz m del lado AB es, por definición, la recta perpendicular a ese lado que corta en el punto medio del segmento que tiene por extremos los puntos A y B.

Fórmula del punto medio: $M=\frac{A+B}{2}=\frac{(-2,1)+(1,4)}{2}=\frac{(-1,5)}{2}=\left(\frac{-1}{2},\frac{5}{2}\right)$

Una vez obtenido el punto medio, obtenemos el vector perpendicular al lado AB, ya lo habíamos hallado antes: $\vec{w}=(3,-3)$. Este es el vector director de la mediatriz.

Con el vector director, podemos obtener la pendiente de la mediatriz: $m=\frac{-3}{3}=-1$

Ya tenemos un punto M y la pendiente m de la mediatriz, con lo que podemos escribir fácilmente la ecuación de la recta punto-pendiente:

$$\boxed{\left(y-\frac{5}{2}\right)=-1\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$