## Semejanza **Resumen**

**Proporcionalidad geométrica. Teorema del cateto y de la altura**

<u>Repaso de proporciones</u>:

Una proporción es la igualdad de dos razones; esto es, una igualdad de la forma: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Los términos $a$ y $d$ se llaman *extremos* de la proporción; $b$ y $c$ se llaman *medios*.

- En toda proporción se verifica que el producto de los medios es igual al producto de los extremos; esto es: $ad = bc$.
- Esta propiedad permite encontrar el <u>valor desconocido</u> de uno cualquiera de los cuatro términos de la proporción, conocidos los otros tres.
- Conocidos los términos $a$, $b$, y $c$, el valor de $d$, supuesto desconocido, recibe el nombre de <u>cuarta proporcional</u>. En la igualdad $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, la cuarta proporcional es $x$.

(Dados tres segmentos de longitudes $a$, $b$, y $c$, utilizando el teorema de Tales se puede construir la cuarta proporcional, como se verá más abajo.)

- Si en la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ los valores de $b$ y $c$ son iguales, el valor $d$ recibe el nombre de <u>tercera proporcional</u>. En la igualdad $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$, la tercera proporcional es $x$.
- Cuando los dos medios son iguales, la proporción queda $\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$. En este caso, se dice que $b$ es la <u>media proporcional</u> entre $a$ y $d$. En la igualdad $\frac{a}{x} = \frac{x}{d}$ ($\Leftrightarrow x^2 = a \cdot d \Leftrightarrow x = \sqrt{a \cdot d}$), la media proporcional es $x$.
- La media proporcional de dos números también se llama <u>media geométrica</u>.

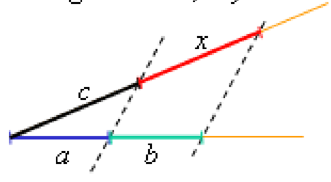
**Ejemplos**:

a) Algebraicamente, el cálculo de $x$ en cualquiera de las proporciones anteriores es inmediato; basta con despejar. Así:

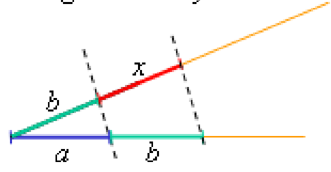
1) de $\frac{2}{3} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = \frac{15}{2}$ 2) de $\frac{8}{7} = \frac{7}{x} \Rightarrow x = \frac{49}{8}$ 3) de $\frac{3}{x} = \frac{x}{4} \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \sqrt{12}$.

b) Geométricamente, la determinación de la cuarta y de la tercera proporcional es sencilla aplicando el teorema de Tales. Los siguientes esquemas gráficos resuelven el problema.

Cuarta proporcional de los segmentos $a$, $b$ y $c$




Tercera proporcional de los segmentos $a$ y $b$

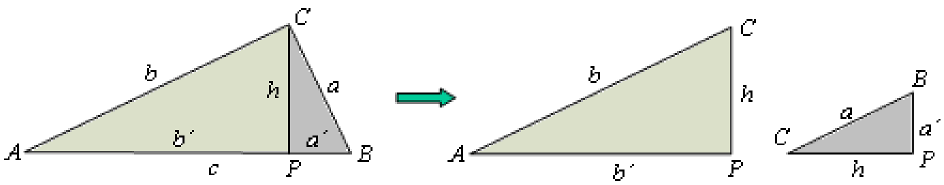



Para la construcción de la media proporcional se necesita conocer el teorema de la altura

Teorema de la altura

En un triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa es media proporcional entre la proyección de los catetos sobre ella.

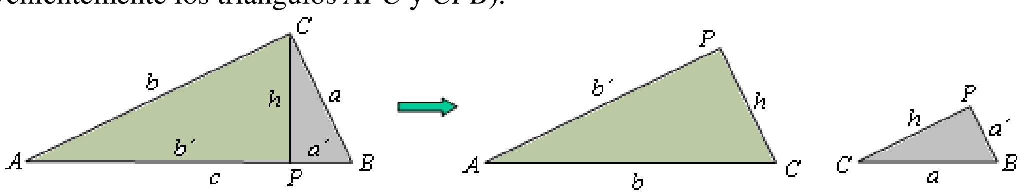
Esto es, para el triángulo *ACB*, con ángulo recto en *C*, se cumple que $\frac{b'}{h} = \frac{h}{a'}$ → (para demostrarlo basta con comprobar que los triángulos *ACP* y *CBP* son semejantes: pueden ponerse en posición de Tales, como se indica a la derecha, donde se ha volcado el triángulo *CBP*).




Teorema del cateto

En un triángulo rectángulo, un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y la proyección de dicho cateto sobre ella.

Esto es, para el triángulo *ACB*, con ángulo recto en *C*, se cumple que $\frac{c}{b} = \frac{b}{b'}$ y $\frac{c}{a} = \frac{a}{a'}$ → (para demostrarlo basta con comprobar que los triángulos *ACB* y *APC* y *CPB* son semejantes pueden ponerse en posición de Tales, como se indica a la derecha, en la que se han girado convenientemente los triángulos *APC* y *CPB*).



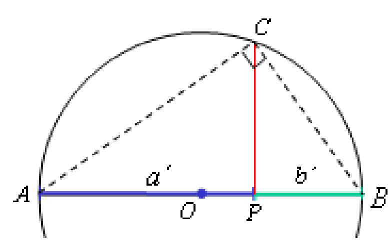

Construcción de la media proporcional de dos segmentos dados

Conocidos los segmentos de longitudes *a´*y *b´*, su media proporcional se encuentra así:

1) Se colocan los segmentos seguidos, uno a continuación del otro, y traza una circunferencia de diámetro *a´* + *b´*. En el dibujo adjunto *a´* = *AP* y *b´* = *PB*

2) Por el punto de unión de los segmentos, *P*, se traza una perpendicular al diámetro (segmento *a´* + *b´*), que cortará a la circunferencia en el punto *C*.

3) Como el triángulo de vértices *A*, *B* y *C* es rectángulo(*), el segmento *PC* es la media proporcional de los segmentos *a´*y *b´*, pues *PC* es la altura sobre la hipotenusa.




(*) Propiedad de los ángulos inscritos:

Todo ángulo inscrito en una circunferencia vale la mitad que el ángulo central correspondiente (el que abarca el mismo arco). Esto es: la medida del ángulo *ACB* es la mitad que la del ángulo *AOB*. O también: ángulo *AOB* = 2 · (ángulo *ACB*).

En el caso particular de que *AOB* = 180º ⇒ *ACB* = 90º.