

LOS NÚMEROS REALES

1. Números reales

- Clasificación de los números reales
- Fracción generatriz de un número decimal
- Representación de números racionales en la recta real
- Aproximaciones
- Intervalos

2. Raíces y potencias

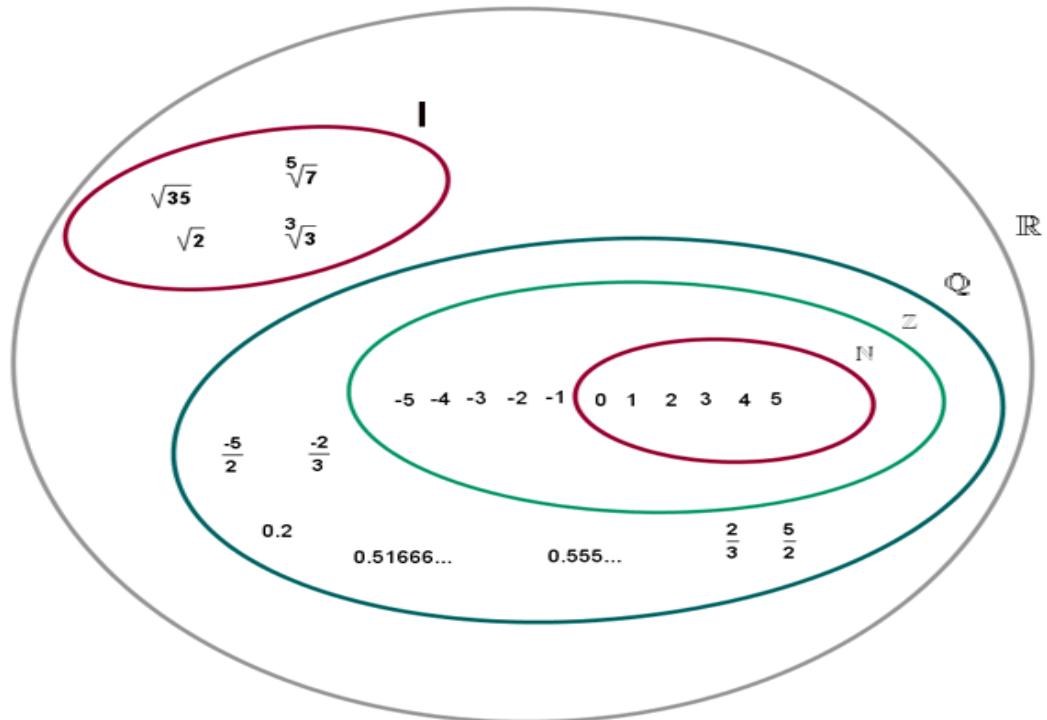
- Propiedades de las potencias de exponente racional
- Radicales equivalentes
- Simplificar radicales
- Extracción de factores de un radical
- Introducción de factores en un radical

3. Operaciones con radicales

- Suma y resta de radicales
- Multiplicación de radicales
- División de radicales
- Potencia de radicales
- Raíz de un radical
- Racionalización

1. Números reales

- Clasificación de los números reales



- Fracción generatriz de un número decimal

Decimal exacto: se escribe el número sin coma, dividido por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales haya.

$$1,35 = \frac{135}{100} = \frac{27}{20}$$

Decimal periódico puro: se escribe el número decimal sin la coma y se le resta la parte entera, y se divide por tantos 9 como cifras periódicas haya.

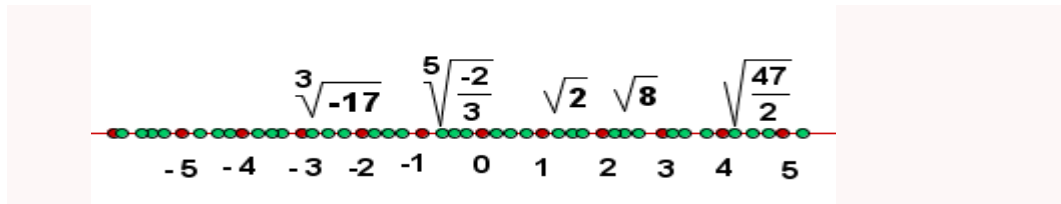
$$2,\overline{81} = \frac{281 - 2}{99} = \frac{279}{99} = \frac{31}{11}$$

Decimal periódico mixto: se escribe el número decimal sin la coma y se le resta la parte entera y la parte decimal no periódica y se divide por tantos 9 como cifras periódicas seguidos de tantos ceros como cifras decimales haya.

$$0,7\overline{52} = \frac{752 - 7}{990} = \frac{745}{990} = \frac{149}{198}$$

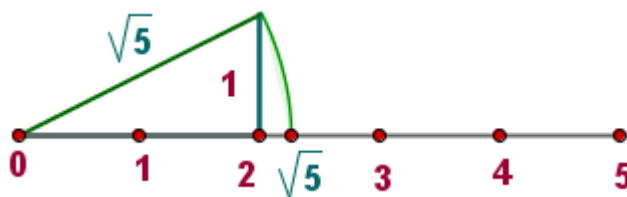
- **Representación de números racionales en la recta real**

La recta real es el conjunto ordenado de todos los números reales. Cada punto de la recta corresponde a un número real, y cada número está representado por un punto.



Para representar radicales de forma exacta se utiliza el teorema de Pitágoras

$$\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$$



- **Aproximaciones**

La aproximación de los números reales se puede obtener mediante dos procedimientos: truncamiento y redondeo.




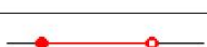




Truncamiento: el número se obtiene al suprimir las cifras a partir del orden de aproximación.

Por ejemplo si se aproxima por truncamiento el número 3,123432 a la milésima es 3,123 no se tiene en cuenta la cifra siguiente en el orden de aproximación

Redondeo: el número se obtiene al suprimir las cifras a partir del orden de aproximación pero teniendo en cuenta que si el siguiente número es inferior a 5, se queda igual; y que si es igual o superior a 5, se suma 1.

Por ejemplo, si se aproxima por redondea 3, 123432 a la milésima es 3,123. Pero si aproximamos a la milésima por redondeo el número 3, 1236 será 3,124

• Intervalos

NOMBRE	SÍMBOLO	SIGNIFICADO	REPRESENTACIÓN
Intervalo abierto	(a,b)	$\{ x / a < x < b \}$ Nº comprendidos entre a y b, sin incluir a ni b	
Intervalo cerrado	$[a,b]$	$\{ x / a \leq x \leq b \}$ Nº comprendidos entre a y b, ambos incluidos.	
Intervalo semiabierto	$(a,b]$	$\{ x / a < x \leq b \}$ Nº comprendidos entre a y b, incluido b pero no a	
	$[a,b)$	$\{ x / a \leq x < b \}$ Nº comprendidos entre a y b, incluido a pero no b	
Semirrecta	$(-\infty,a)$	$\{ x / x < a \}$ Números menores que a	
	$(-\infty,a]$	$\{ x / x \leq a \}$ Nº menores que a y el propio a	
	$(a,+\infty)$	$\{ x / a < x \}$ Números mayores que a	
	$[a,+\infty)$	$\{ x / a \leq x \}$ Nº mayores que a y el propio a	

La propia **recta real** se representa en forma de intervalo, así: $R = (-\infty, +\infty)$

2. Raíces y potencias

La radicación es la operación inversa a la potenciación.

$$b = \sqrt[n]{a} \rightarrow b^n = a$$

Raíz	Potencia
b : raíz	b : base
a : radicando	a : potencia
n : índice de la raíz	n : exponente

Raíz de índice par:

- Tiene la solución positiva y negativa, por ejemplo: $\sqrt{25} = \pm 5 \rightarrow (-5)^2 = 25$
- No existe si el radicando es negativo. $\sqrt{-25} \rightarrow$ no existe.

Raíz de índice impar:

- Existe tanto si el radicando es positivo como negativo.
- La solución es positiva si el radicando es positivo. $\sqrt[3]{8} = 2 \rightarrow 2^3 = 8$
- La solución es negativa si el radicando es negativo.
 $\sqrt[3]{-8} = -2 \rightarrow (-2)^3 = -8$

Un radical también se puede expresar como una potencia de exponente

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

fraccionario: Por lo tanto podemos aplicar las propiedades de las potencias a los radicales si expresamos los radicales como potencias de exponente fraccionario, tal como se expresa en la siguiente tabla:

• **Propiedades de las potencias de exponente racional**

Multiplicación de potencias de la misma base	$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m+p}{n \cdot q}}$
División de potencias de la misma base	$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m-p}{n \cdot q}}$
Potencia de potencia	$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m \cdot p}{n \cdot q}}$

• **Radicales equivalentes**

Los radicales equivalentes son diferentes expresiones de un mismo número.. Se obtienen multiplicando índice y exponente por un mismo número.

$$\sqrt{2} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt[8]{2^4} = \sqrt[16]{2^8}$$

• **Simplificar radicales**

Vamos a simplificar $\sqrt[10]{243}$

Se descompone el radicando como producto de factores primos. Si descomponemos el número 243 como producto de factores primos obtenemos: $243=3^5$.

- Podemos simplificar el radical expresándolo como potencia de exponente fraccionario y simplificando la fracción $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, volviendo a escribir la potencia como radical.

$$\sqrt[10]{243} = \sqrt[10]{3^5} = 3^{\frac{5}{10}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

- Pero también lo podemos hacer dividiendo índice y exponente entre el mismo número, en el ejemplo dividimos entre 5:

$$\sqrt[10]{3^5} = \sqrt[10/5]{3^{5/5}} = \sqrt{3}$$

- **Extracción de factores de un radical**

Solamente se pueden extraer factores de un radical cuando el exponente es mayor que el índice, es decir:

$$\sqrt[n]{a^m} \rightarrow m \geq n$$

Dividimos el exponente entre el índice (sin calculadora), fuera del radical se escribe la base elevada al cociente y dentro del radical la base elevada al resto:

$$\sqrt[3]{4^8} = 4^2 \cdot \sqrt[3]{4^2}$$

- **Introducción de factores en un radical**

Para introducir un factor dentro de un radical, basta con elevarlo al índice de la raíz:

$$b \cdot \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{b^3 \cdot a^2}$$

Ejemplo: $4 \cdot \sqrt[5]{3^3} = \sqrt[5]{4^5 \cdot 3^3}$

3. Operaciones con radicales

- **Suma y resta de radicales**

Esta operación sólo se puede realizar entre radicales semejantes (los que tienen el mismo índice y el mismo radicando). Se pone el radical (como factor común) y se suman los coeficientes.

Ejemplo: $5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = (5 - 3 + 6)\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

En algunos casos los radicales semejantes no se ven tan fácilmente, lo que tenemos que hacer es descomponer el radicando como producto de factores primos y extraer factores del radical, obteniendo así radicales semejantes, veamos un ejemplo:

$$\sqrt[3]{625} - \sqrt[6]{25} + 2 \cdot \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{135} \xrightarrow{\text{descomponer}} \rightarrow$$

$$\sqrt[3]{5^4} - \sqrt[6]{5^2} + 2 \cdot \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3^3 \cdot 5} \xrightarrow{\text{extraer}} \rightarrow$$

$$5 \cdot \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{5} + 2 \cdot \sqrt[3]{5} + 3 \cdot \sqrt[3]{5} \xrightarrow{\text{sumar}} (5 - 1 + 2 + 3) \cdot \sqrt[3]{5} = 9 \cdot \sqrt[3]{5}$$

• Multiplicación de radicales

- Con el mismo índice: es un radical con el mismo índice y como radicando el producto de radicandos. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

Ejemplo: $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{5 \cdot 4} = \sqrt[3]{20}$

- Con distinto índice: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$

- 1) El m.c.m de los índices: m.c.m(n,m)= p, es el índice del nuevo radical.
- 2) Elevar cada radicando al cociente de p entre cada índice
- 3) Multiplicar los radicandos

$$\sqrt[p]{a^{\frac{p}{n}} \cdot b^{\frac{p}{m}}}$$

Ejemplo: $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt[12]{2^{\frac{12}{3}} \cdot 3^{\frac{12}{4}} \cdot 5^{\frac{12}{2}}} = \sqrt[12]{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^6}$

▪ División de radicales

- Con el mismo índice: es un radical con el mismo índice y como radicando el cociente de radicandos. $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

Ejemplo: $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{5 \cdot 4} = \sqrt[3]{20}$

- Con distinto índice: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$

- 4) El m.c.m de los índices: m.c.m(n,m)= p, es el índice del nuevo radical.
- 5) Elevar cada radicando al cociente de p entre cada índice
- 6) Dividir los radicandos

$$\sqrt[p]{a^{\frac{p}{n}} : b^{\frac{p}{m}}}$$

Ejemplo: $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[12]{\frac{2^{\frac{12}{3}}}{5^{\frac{12}{4}}}} = \sqrt[12]{\frac{2^4}{5^3}}$

▪ **Potencia de radicales**

Se eleva el radicando al exponente

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \qquad \text{Ejemplo: } \left(\sqrt[3]{5}\right)^2 = \sqrt[3]{5^2}$$

▪ **Raíz de un radical**

Se multiplican los índices

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} \qquad \text{Ejemplo: } \sqrt{3\sqrt{5}} = \sqrt[2 \cdot 3]{5} = \sqrt[6]{5}$$

▪ **Racionalización**

Esta operación consiste en transformar una fracción que tenga uno o más radicales en el denominador en otra fracción sin radicales en el denominador.

Podemos tener tres casos diferentes:

- a) En el denominador tenemos un radical de índice 2: multiplicamos numerador y denominador por el radical de índice 2 del denominador

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{b}$$

Ejemplo: $\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3}$

- b) En el denominador tenemos un radical de índice n > 2: multiplicamos numerador y denominador por el radical de índice n del denominador, cuya base del radicando este elevada al índice menos el exponente.

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{n-m}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{m-n}}}{\sqrt[n]{b^m \cdot b^{n-m}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{m-n}}}{\sqrt[n]{b^{m+n-m}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{m-n}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{m-n}}}{b}$$

Ejemplo: $\frac{3}{\sqrt[5]{4^3}} = \frac{3}{\sqrt[5]{4^3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{4^{5-3}}}{\sqrt[5]{4^{5-3}}} = \frac{3 \cdot \sqrt[5]{4^2}}{\sqrt[5]{4^{3+2}}} = \frac{3 \cdot \sqrt[5]{4^2}}{4}$

- c) En el denominador tenemos una suma o diferencia de dos o más radicales de índice 2: multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador, y realizamos el producto de fracciones.

$$\frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{b} - \sqrt{c}}{\sqrt{b} - \sqrt{c}} = \frac{a \cdot (\sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2 - (\sqrt{c})^2} = \frac{a \cdot (\sqrt{b} - \sqrt{c})}{b - c}$$

Ejemplo: $\frac{\sqrt{3}}{6 - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6 - \sqrt{2}} \cdot \frac{6 + \sqrt{2}}{6 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \cdot (6 + \sqrt{2})}{6^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{3} \cdot (6 + \sqrt{2})}{36 - 2} = \frac{\sqrt{3} \cdot (6 + \sqrt{2})}{34}$

Ejercicios 1

1. Encuentra qué radicales son equivalentes entre sí:

$$\sqrt{5}; \sqrt[6]{125}; \sqrt[3]{2}; \sqrt[4]{9}; \sqrt[10]{243}; \sqrt[9]{8}; \sqrt[8]{625}; \sqrt[4]{25}$$

2. Simplifica los siguientes radicales:

$$\sqrt{320} = \quad \sqrt[3]{686} = \quad \sqrt[4]{12960} = \quad \sqrt{1350} =$$

3. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas

$$\text{a) } \sqrt{192x^2y^5} \quad \text{b) } \sqrt{600a^3b^4} \quad \text{c) } \sqrt[5]{1024a^6b^5c^{10}} \quad \text{d) } \sqrt[4]{3888x^4y^2z^5}$$

4. Extrae de las raíces todos los factores y simplifica:

$$\text{a) } \sqrt{\frac{27a^6b^3c^2}{392x^9y^2}} \quad \text{b) } 6\sqrt{\frac{50a^3}{24x^2}} \quad \text{c) } \frac{3}{2}\sqrt{\frac{4a^2}{27y^3}} \quad \text{d) } \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{243x^4}{16a^2b^4}}$$

5. Calcula:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 2\sqrt{5} - 2\sqrt{45} + 3\sqrt{80} - \sqrt{128} & \text{b) } \sqrt{63} + \sqrt{28} - 2\sqrt{49} + \sqrt{175} \\ \text{c) } 2 \cdot \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{300} - 3 \cdot \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{75} & \text{d) } \sqrt{450} + 4\sqrt{12} - 5\sqrt{48} - 2\sqrt{98} \\ \text{e) } \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{16} + 2 \cdot \sqrt[3]{150} & \text{f) } 3 \cdot \sqrt{80} - 2 \cdot \sqrt{800} + 4 \cdot \sqrt{320} - 6 \cdot \sqrt{450} \\ \text{g) } \sqrt[3]{686} + \sqrt[3]{81} - 3 \cdot \sqrt[3]{375} + 2 \cdot \sqrt[3]{648} & \text{h) } 2 \cdot \sqrt{45} - \frac{3}{4} \cdot \sqrt{125} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{180} \\ \text{i) } \frac{3}{4} \cdot \sqrt{48} + \frac{1}{2} \sqrt{12} + \frac{1}{6} \sqrt{72} - \frac{1}{3} \sqrt{18} & \text{j) } 5\sqrt{50} + \frac{3}{14} \sqrt{98} - \frac{1}{3} \sqrt{162} \\ \text{k) } \frac{1}{7} \sqrt{147} + \frac{1}{10} \sqrt{28} - \frac{1}{3} \sqrt{2187} - \frac{1}{5} \sqrt{700} & \end{array}$$

6. Efectúa las operaciones siguientes y simplifica si es conveniente

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 2\sqrt{12}\sqrt{6} & \text{b) } 3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{20} \cdot (-2)\sqrt{3} & \text{c) } \frac{1}{2}\sqrt{14} \cdot \frac{2}{7}\sqrt{21} \\ \text{d) } \frac{1}{2}\sqrt{21} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{42} \cdot \frac{3}{7}\sqrt{22} & \text{e) } \frac{1}{4}\sqrt[3]{2ab^4} \cdot \sqrt[3]{4a^7b^6} \cdot \frac{2}{3}\sqrt[3]{a^4b^3} & \text{f) } \frac{10\sqrt{32}}{2\sqrt{24}} \\ \text{g) } \sqrt[3]{\frac{2x^4}{25y^5}} \cdot \sqrt[3]{\frac{4x^5}{5y}} & \text{h) } \frac{18\sqrt{180}}{-12\sqrt{48}} & \text{i) } \frac{\sqrt{24}\sqrt{6}}{\sqrt{20}} \\ \text{j) } \frac{\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{300}}{\sqrt[3]{72} \cdot \sqrt[3]{24}} & & \end{array}$$

7. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica si es conveniente:

a) $(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{3}$

b) $(7\sqrt{3} + 5\sqrt{5}) \cdot 2\sqrt{3}$

c) $(2\sqrt{7} - 3\sqrt{3}) \cdot (4\sqrt{3} + 5\sqrt{7})$

d) $\sqrt{x} \left(5\sqrt{\frac{1}{25}y} - \frac{1}{2}\sqrt{xy} \right)$

8. Efectúa las operaciones siguientes reduciendo los radicales a índice común y simplifica si conviene

a) $\frac{\sqrt{x^3y} \cdot \sqrt[3]{8y}}{\sqrt[6]{50x^3y^5}}$

b) $\frac{\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[4]{18}}{\sqrt{24}}$

9. Expresa en forma de un solo radical

a) $\sqrt{3\sqrt[3]{2\sqrt[5]{3}}}$

b) $\sqrt{\frac{\sqrt{8}}{2\sqrt[4]{4}}}$

c) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2^3}}{2\sqrt[4]{2^2}}}$

d) $\sqrt[3]{5\sqrt[3]{\frac{1}{25}}}$

e) $\sqrt[3]{\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}}$

f) $\sqrt[3]{ab^2\sqrt[4]{\frac{1}{ab}}}$

10. Racionaliza y simplifica:

a) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18}}$

b) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$

c) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$

d) $\frac{3}{3+\sqrt{3}}$

e) $\frac{\sqrt{72} + 3\sqrt{32} - \sqrt{8}}{\sqrt{8}}$

11. Racionaliza:

a) $\frac{3}{\sqrt[3]{6}}$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{5x}}$

c) $\frac{6ab}{\sqrt[3]{4a^2b}}$

d) $\frac{\sqrt{3x^2}}{\sqrt[3]{9x}}$

12. Racionaliza y simplifica:

a) $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$

b) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$

c) $\frac{1}{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})}$

d) $\frac{3}{\sqrt{5}-2}$

e) $\frac{11}{2\sqrt{5}+3}$

f) $\frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2}$

13. Racionaliza y efectúa:

a) $\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

b) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$