7 Geometría analítica

ACTIVIDADES INICIALES

7.I. La velocidad mínima para que el movimiento parezca continuo es de 24 imágenes por segundo. ¿Cuántas imágenes contendrá una película de animación de 90 minutos? ¿Cuántas tendrán que dibujar los artistas si el ordenador genera el 80 % de ellas?

Una película de 90 minutos tendría un total de 90 · 60 · 24 = 129 600 imágenes.

Si el ordenador genera el 80 % de ellas, habría que dibujar a mano 0,20 · 129 600 = 25 920 imágenes.

7.II. Busca los términos *stop motion*, *tweening* y *key frame*, y explica su significado con tus propias palabras.

Stop motion significa parada de imagen, animación en volumen o foto a foto. Es una técnica de animación que consiste en aparentar el movimiento de objetos estáticos por medio de una serie de imágenes fijas sucesivas.

Tweening o intermediación es el proceso de generar marcos intermedios entre dos imágenes para dar el aspecto de que la primera se convierte suavemente en la segunda.

Key frame o fotograma clave es un dibujo que define los puntos de partida y final de una transición sin problemas. Se llaman “cuadros” porque su posición en el tiempo se mide en fotogramas en una tira de película. Debido a que dos o tres fotogramas clave en el lapso de un segundo no crean la ilusión de movimiento, los cuadros restantes se rellenan mediante *tweening*.

7.III. Por parejas, dibujad dos fases de animación de una ilustración en una octavilla, señalad los puntos que cambian y los vectores que determinan el movimiento. Después, dibujad cinco fases intermedias, realizad la animación pasando deprisa las hojas y exponedla en clase.

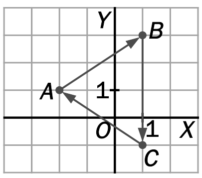
Pregunta abierta.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

7.1. Actividad resuelta.

7.2. Actividad resuelta.

7.3. Calcula las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CA}$.



$A(-2, 1)$, $B(1, 3)$ y $C(1, -1)$; por tanto, $\overrightarrow{AB} = (1 - (-2), 3 - 1) = (3, 2)$, $\overrightarrow{BC} = (1 - 1, -1 - 3) = (0, -4)$ y $\overrightarrow{CA} = (-2 - 1, 1 - (-1)) = (-3, 2)$

7.4. **El vector $\overrightarrow{AB}$ es un representante del vector libre $\vec{v}$ = (–3, 5). Calcula las coordenadas de *A* sabiendo que las de *B* son (5, –4).**

coordenadas ($\overrightarrow{AB}$) = coordenadas (*B*) – coordenadas (*A*); por tanto:

coordenadas (*A*) = coordenadas (*B*) – coordenadas ($\overrightarrow{AB}$) = (5, –4) – (–3, 5) = (8, –9)

7.5. **(TIC) Las coordenadas de un punto *P* son (1, 3), y las del vector $\overrightarrow{PQ}$, (–2, –2). Calcula las coordenadas de *Q* y de $\overrightarrow{QP}$.**

coordenadas ($\overrightarrow{PQ}$) = coordenadas (*Q*) – coordenadas (*P*); por tanto:

coordenadas (*Q*) = coordenadas (*P*) + coordenadas ($\overrightarrow{PQ}$) = (1, 3) + (–2, –2) = (–1, 1)

Por otro lado, $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$ = (2, 2)

7.6. **Un triángulo equilátero tiene dos vértices en *A*(0, 0) y *B*(2, 0). Halla las coordenadas del tercer vértice.**

La primera coordenada del tercer vértice será $x = 1$.

La segunda coordenada será igual a la altura del triángulo $y = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

Por tanto, el tercer vértice será el punto $C(1, \sqrt{3})$.

7.7. **Actividad interactiva.**

7.8. **Actividad resuelta.**

7.9. **Efectúa y representa estas operaciones.**

a) $-2 \cdot (3, -3) + 3 \cdot (-3, 3) + (1, 0)$

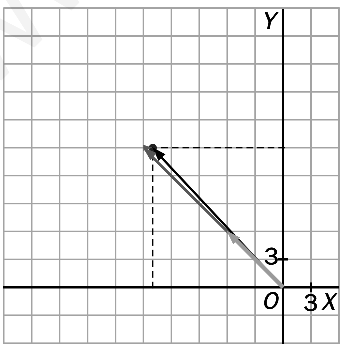
b) $\frac{1}{2}(-1, 3) - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$

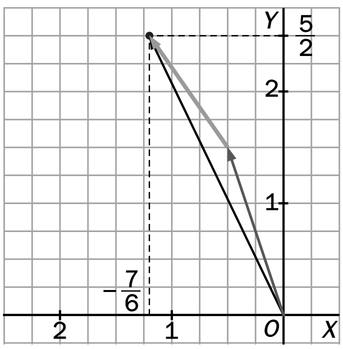
a) $-2 \cdot (3, -3) + 3 \cdot (-3, 3) + (1, 0) =$

$= (-6, 6) + (-9, 9) + (1, 0) = (-14, 15)$

b) $\frac{1}{2}(-1, 3) - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$

$= \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{2}{3}, 1\right) = \left(-\frac{7}{6}, \frac{5}{2}\right)$





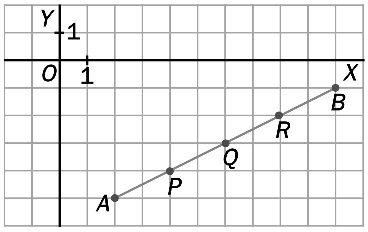
7.10. Dados $A(2, –5)$ y $B(10, –1)$, halla los puntos P, Q y R que dividen AB en cuatro partes iguales.

Se considera el vector $\overrightarrow{AB} = (8, 4)$, entonces $\overrightarrow{AP} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{4} = (2, 1)$ y, por tanto:

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = (2, –5) + (2, 1) = (4, –4) \Rightarrow P = (4, –4)$

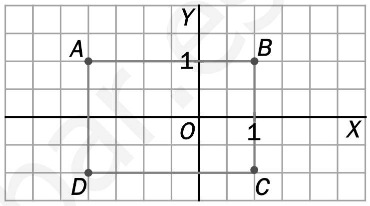
$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AP} = (2, –5) + 2 \cdot (2, 1) = (6, –3) \Rightarrow Q = (6, –3)$

$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{AP} = (2, –5) + 3 \cdot (2, 1) = (8, –2) \Rightarrow R = (8, –2)$



7.11. (TIC) Los vértices de un paralelogramo $ABCD$ son $A(–2, 1)$, $B(1, 1)$, $C(1, –1)$ y D. Halla todas las coordenadas posibles de D.

El único punto posible que hace que $ABCD$ sea un paralelogramo es $D(–2, –1)$.



7.12. (TIC) Dados los vectores $\vec{u} = (4, 2)$, $\vec{v} = (–6, 3)$ y $\vec{w} = (2, 0)$, di si son linealmente dependientes:

a) $\vec{u}$ **y** $\vec{v}$ **b)** $\vec{u}$ **y** $\vec{w}$ **c)** $\vec{v}$ **y** $\vec{w}$ **d)** $\vec{u}$, $\vec{v}$ **y** $\vec{w}$

a) Son linealmente independientes, ya que sus coordenadas no son proporcionales.

b) Son linealmente independientes, ya que sus coordenadas no son proporcionales.

c) Son linealmente independientes, ya que sus coordenadas no son proporcionales.

d) Tres vectores del plano son siempre linealmente dependientes.

7.13. (TIC) Calcula el valor de m para que los puntos del plano $A(1, 2)$, $B(–2, m – 2)$ y $C(3, –m)$ estén alineados.

Para que estén alineados, las coordenadas de $\overrightarrow{AB} = (–3, m – 4)$ y $\overrightarrow{AC} = (2, –m – 2)$ deben ser proporcionales; por tanto, $\dfrac{-3}{2} = \dfrac{m-4}{-m-2} \Rightarrow 3m + 6 = 2m - 8 \Rightarrow m = -14$.

7.14. Actividad interactiva.

7.15. Actividad resuelta.

7.16. Actividad resuelta.

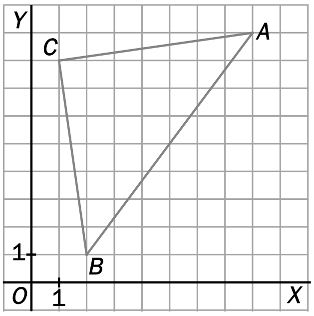
7.17. (TIC) Dados los vectores $\vec{u} = (–2, 2)$ y $\vec{v} = (–1, 3)$, calcula su producto escalar, sus módulos y el ángulo que forman.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 + 6 = 8$

$|\vec{u}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$ y $|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$\cos \alpha = \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{8}{\sqrt{8}\sqrt{10}} \approx 0{,}8944 \Rightarrow \alpha \approx 26^\circ\ 34'$

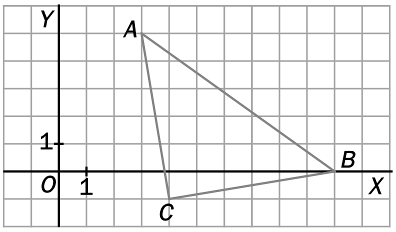
7.18. (TIC) Comprueba que el triángulo de vértices *A*(8, 9), *B*(2, 1) y *C*(1, 8) es rectángulo e indica el vértice correspondiente al ángulo recto.



$\overrightarrow{CA} = (7, 1)$ y $\overrightarrow{CB} = (1, -7)$; por tanto, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 7 - 7 = 0$, es decir, $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ son perpendiculares, con lo que el triángulo *ABC* es rectángulo con ángulo recto en *C*.

Otra posibilidad es calcular las distancias *d*(*A*, *B*), *d*(*B*, *C*) y *d*(*A*, *C*), y verificar que se cumple el teorema de Pitágoras.

7.19. (TIC) Comprueba que el triángulo de vértices *A*(3, 5), *B*(10, 0) y *C*(4, –1) es isósceles.



$d(A, B) = \sqrt{7^2 + (-5)^2} = \sqrt{74}$

$d(A, C) = \sqrt{1^2 + (-6)^2} = \sqrt{37}$

$d(B, C) = \sqrt{(-6)^2 + (-1)^2} = \sqrt{37}$

Por tanto, el triángulo *ABC* es isósceles con lados iguales *AC* y *BC*.

7.20. (TIC) Calcula los ángulos del triángulo *A*(–1, 0), *B*(2, –1) y *C*(4, 2). ¿Suman 180º?

$\overrightarrow{AB} = (3, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (5, 2)$ y $\overrightarrow{BC} = (2, 3) \Rightarrow \overrightarrow{BA} = (-3, 1)$, $\overrightarrow{CA} = (-5, -2)$ y $\overrightarrow{CB} = (-2, -3)$

Por tanto, los ángulos del triángulo *ABC* valen:

$$\cos\widehat{A} = \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{13}{\sqrt{10}\sqrt{29}} \approx 0{,}7634 \Rightarrow \widehat{A} \approx 40º\ 14'$$

$$\cos\widehat{B} = \cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = \frac{-3}{\sqrt{10}\sqrt{13}} \approx -0{,}2631 \Rightarrow \widehat{B} \approx 105º\ 15'$$

$$\cos\widehat{C} = \cos\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \frac{16}{\sqrt{29}\sqrt{13}} \approx 0{,}824 \Rightarrow \widehat{B} \approx 34º\ 31'$$

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180º$$

7.21. (TIC) Calcula *m* para que los vectores $\vec{u} = (m, 2m - 1)$ y $\vec{v} = (1 - m, m)$ sean perpendiculares.

Para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares, su producto escalar debe ser 0, es decir:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = m - m^2 + 2m^2 - \mathrm{m} = m^2 = 0 \Rightarrow m = 0$

7.22. Actividad resuelta.

7.23. Halla un punto y un vector de dirección de cada una de las siguientes rectas.

a) $4x - 3y - 1 = 0$

b) $(x, y) = (-3, 2) + t \cdot (-1, 4)$

c) $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -t \end{cases}$

d) $y = x$

a) Dos puntos de la recta son, por ejemplo, $A(1, 1)$ y $B(-2, -3)$. Un vector de dirección de la recta es $\overrightarrow{AB} = (-3, -4)$.

b) Un punto de la recta es $A(-3, 2)$. Un vector de dirección de la recta es $\vec{u} = (-1, 4)$.

c) Un punto de la recta es $A(2, 0)$. Un vector de dirección de la recta es $\vec{u} = (2, -1)$.

d) Dos puntos de la recta son $O(0, 0)$ y $A(1, 1)$. Un vector de dirección de la recta es $\overrightarrow{OA} = (1, 1)$.

7.24. Calcula la ecuación general de la recta que pasa por $P(-2, 3)$ y tiene pendiente $m = -4$.

La ecuación punto-pendiente es $y - 3 = -4(x + 2)$; por tanto, la ecuación general es:

$y - 3 = -4x - 8 \Rightarrow 4x + y + 5 = 0$

7.25. Halla dos puntos de la recta $(x, y) = (1, 9) + t \cdot (1, 1)$.

$t = 0 \Rightarrow (x, y) = (1, 9)$

$t = 1 \Rightarrow (x, y) = (2, 10)$

7.26. (TIC) Calcula, en todas sus formas posibles, la ecuación de la recta en los siguientes casos.

a) Pasa por el punto $A(5, -2)$ y lleva la dirección de $\vec{u} = (1, -3)$.

b) Pasa por los puntos $A(-1, 3)$ y $B(5, -2)$.

c) Pasa por el punto $A(-5, 4)$ y tiene pendiente $m = -2$.

a) Ecuación vectorial: $(x, y) = (5, -2) + t \cdot (1, -3)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -2 - 3t \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x - 5}{1} = \dfrac{y + 2}{-3}$

Ecuación general: $-3x - y + 13 = 0$

Ecuación explícita: $y = -3x + 13$

Ecuación punto-pendiente: $y + 2 = -3\,(x - 5)$

b) La recta tiene vector de dirección $\overrightarrow{AB} = (6, -5)$.

Ecuación vectorial: $(x, y) = (-1, 3) + t \cdot (6, -5)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = 3 - 5t \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x + 1}{6} = \dfrac{y - 3}{-5}$

Ecuación general: $-5x - 6y + 13 = 0$

Ecuación explícita: $y = -\dfrac{5}{6}x + \dfrac{13}{6}$

Ecuación punto-pendiente: $y - 3 = -\dfrac{5}{6}\,(x + 1)$

c) Ecuación punto-pendiente: $y - 4 = -2(x + 5)$

Ecuación explícita: $y = -2x - 6$

Ecuación general: $2x + y + 6 = 0$

Un vector de dirección de la recta es $\vec{u} = (1, -2)$.

Ecuación vectorial: $(x, y) = (-5, 4) + t \cdot (1, -2)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -5 + t \\ y = 4 - 2t \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x+5}{1} = \dfrac{y-4}{-2}$

7.27. Actividad interactiva.

7.28. Actividad resuelta.

7.29. Actividad resuelta.

7.30. (TIC) Estudia la posición relativa de las rectas:

a) $r: 2x + y - 5 = 0,$ $s: 4x + 3y = 11$

b) $r: -2x + 3y - 4 = 0,$ $s: 4x - 6y = 8$

c) $r: -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{4}y + \dfrac{5}{4} = 0,$ $s: 2x - 3y - 5 = 0$

a) $\dfrac{2}{4} \neq \dfrac{1}{3} \Rightarrow$ Las rectas son secantes.

b) $\dfrac{-2}{4} = \dfrac{3}{-6} \neq \dfrac{-4}{-8} \Rightarrow$ Las rectas son paralelas.

c) $\dfrac{-\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{\frac{3}{4}}{-3} = \dfrac{\frac{5}{4}}{-5} \Rightarrow$ Las rectas son coincidentes.

7.31. (TIC) Dados los puntos *A*(–1, 3), *B*(4, 0) y *C*(–1, 2), halla la ecuación de la recta que pasa por *A* y es paralela a la que pasa por *B* y *C*.

Como la recta solicitada es paralela a la recta que pasa por *B* y *C*, tiene como vector de dirección $\overrightarrow{BC} = (-5, 2)$. Por tanto, su ecuación es:

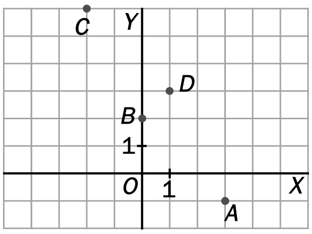
$\dfrac{x+1}{-5} = \dfrac{y-3}{2} \Rightarrow 2x + 5y - 13 = 0$

7.32. Actividad interactiva.

EJERCICIOS

Coordenadas de vectores y equipolencia

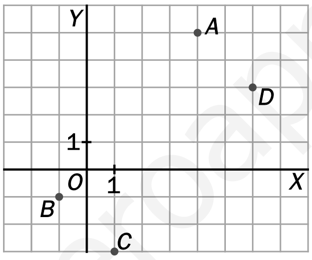
7.33. Calcula las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$. ¿Qué relación existe entre ellos?



$A(3, -1)$ $B(0, 2)$ $C(-2, 6)$ $D(1, 3) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-3, 3)$ y $\overrightarrow{CD} = (3, -3)$

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$, es decir, los vectores son opuestos.

7.34. Dados los puntos *A*, *B*, *C* y *D* de la figura, calcula los vectores $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$. ¿Cuáles de ellos son equipolentes?



$A(4, 5)$ $B(-1, -1)$ $C(1, -3)$ $D(6, 3) \Rightarrow \overrightarrow{BA} = (5, 6)$ $\overrightarrow{CD} = (5, 6)$ $\overrightarrow{BC} = (2, -2)$ $\overrightarrow{AD} = (2, -2)$

Los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes.

Los vectores $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son equipolentes.

7.35. Las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ son (5, 3) y el punto *B* es (–1, 4). Calcula las coordenadas del punto *A*.

coordenadas ($\overrightarrow{AB}$) = coordenadas (*B*) – coordenadas (*A*); por tanto:

coordenadas (*A*) = coordenadas (*B*) – coordenadas ($\overrightarrow{AB}$) = (–1, 4) – (5, 3) = (–6, 1)

Operaciones con vectores y dependencia lineal

7.36. (TIC) Haz estas operaciones con vectores.

a) **(2, –1) – (4, 3)**

b) **6 · (–3, 1) + (10, –2)**

c) **2 · (–4, 0) – 3 · (–1, 2)**

d) **4 · (1, –1) + 2 · (3, 0)**

e) **(3, –1) – 5 · (1, –2)**

f) **(9, 6) – 2 · (4, 1)**

a) (2, –1) – (4, 3) = (–2, –4)

b) 6 · (–3, 1) + (10, –2) = (–18, 6) + (10, –2) = (–8, 4)

c) 2 · (–4, 0) – 3 · (–1, 2) = (–8, 0) + (3, –6) = (–5, –6)

d) 4 · (1, –1) + 2 · (3, 0) = (4, –4) + (6, 0) = (10, –4)

e) (3, –1) – 5 · (1, –2) = (3, –1) – (5, –10) = (–2, 9)

f) (9, 6) – 2 · (4, 1) = (9, 6) – (8, 2) = (1, 4)

7.37. (TIC) Halla el vector resultado de estas operaciones.

a) **(5, 9) + 2 · (–4, 8) – (6, 0)**

b) **3 · (–4, 7) – (2, 6) + 5 · (1, –3)**

c) **(7, 11) – [(4, 9) + (–3, 1)]**

d) **(–6, 8) + 3 · [(5, –2) + (4, 7)]**

a) (5, 9) + 2 · (–4, 8) – (6, 0) = (5, 9) + (–8, 16) – (6, 0) = (–9, 25)

b) 3 · (–4, 7) – (2, 6) + 5 · (1, –3) = (–12, 21) – (2, 6) + (5, –15) = (–9, 0)

c) (7, 11) – [(4, 9) + (–3, 1)] = (7, 11) – (1, 10) = (6, 1)

d) (–6, 8) + 3 · [(5, –2) + (4, 7)] = (–6, 8) + 3 · (9, 5) = (–6, 8) + (27, 15) = (21, 23)

7.38. (TIC) Dados los vectores $\vec{u}$ = (5, –3), $\vec{v}$ = (–1, 4) y $\vec{w}$ = (2, 2), calcula:

a) $\vec{u}-(\vec{v}+\vec{w})$

b) $3\vec{u}-2(\vec{w}-\vec{v})$

c) $\frac{1}{2}(\vec{v}-\vec{u})$

d) $5\vec{w}-3\vec{v}+\vec{u}$

e) $2(\vec{w}+\vec{v})-\vec{u}$

f) $\frac{3}{4}\vec{u}-2\vec{v}+\vec{w}$

a) $\vec{u}-(\vec{v}+\vec{w})$ = (5, –3) – [(–1, 4) + (2, 2)] = (5, –3) – (1, 6) = (4, –9)

b) $3\vec{u}-2(\vec{w}-\vec{v})$ = 3 · (5, –3) – 2 · [(2, 2) – (–1, 4)] = (15, –9) – 2 · (3, –2) = (15, –9) – (6, –4) =
= (9, –5)

c) $\frac{1}{2}(\vec{v}-\vec{u}) = \frac{1}{2}\cdot[(-1, 4)-(5, -3)] = \frac{1}{2}\cdot(-6, 7) = \left(-3, \frac{7}{2}\right)$

d) $5\vec{w}-3\vec{v}+\vec{u}$ = 5 · (2, 2) – 3 · (–1, 4) + (5, –3) = (10, 10) – (–3, 12) + (5, –3) = (18, –5)

e) $2(\vec{w}+\vec{v})-\vec{u}$ = 2 · [(2, 2) + (–1, 4)] – (5, –3) = 2 · (1, 6) – (5, –3) = (2, 12) – (5, –3) = (–3, 15)

f) $\frac{3}{4}\vec{u}-2\vec{v}+\vec{w} = \frac{3}{4}\cdot(5, -3) - 2\cdot(-1, 4) + (2, 2) = \left(\frac{15}{4}, -\frac{9}{4}\right) - (-2, 8) + (2, 2) = \left(\frac{31}{4}, -\frac{33}{4}\right)$

7.39. Considera el vector $\vec{z} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$, donde $\vec{i} = (1, 0)$ y $\vec{j} = (0, 1)$. ¿Es $\vec{z}$ combinación lineal de $\vec{i}$ y de $\vec{j}$? ¿Cuáles son sus coordenadas cartesianas?

Claramente, $\vec{z}$ es combinación lineal de $\vec{i}$ y de $\vec{j}$, y sus coordenadas son (–4, 3).

7.40. Sabiendo que $\vec{u} = 2\vec{v} - 3\vec{w}$, expresa:

a) $\vec{v}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{w}$.

b) $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

a) $\vec{u} = 2\vec{v} - 3\vec{w} \Rightarrow \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{w}$

b) $\vec{u} = 2\vec{v} - 3\vec{w} \Rightarrow \vec{w} = -\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$

7.41. Calcula el valor de *x* e *y* en las siguientes igualdades.

a) $(5, -9) = 3(x, y) - 2(x, 0)$

b) $(x, -4) = 2(y, 5) + (3, x)$

c) $(2y, 0) = (x, y) - 2(x, 5)$

d) $(3x, -y) = 2(1, -x) + (y, 9)$

a) $(5, -9) = 3(x, y) - 2(x, 0) \Rightarrow (5, -9) = (x, 3y) \Rightarrow x = 5, y = -3$

b) $(x, -4) = 2(y, 5) + (3, x) \Rightarrow (x, -4) = (2y + 3, 10 + x) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 2y + 3 \\ -4 = 10 + x \end{array}\right\} \Rightarrow x = -14,\ y = -\frac{17}{2}$

c) $(2y, 0) = (x, y) - 2(x, 5) \Rightarrow (2y, 0) = (-x, y - 10) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2y = -x \\ 0 = y - 10 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 10,\ x = -20$

d) $(3x, -y) = 2(1, -x) + (y, 9) \Rightarrow (3x, -y) = (2 + y, -2x + 9) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x = 2 + y \\ -y = -2x + 9 \end{array}\right\} \Rightarrow x = -7,\ y = -23$

7.42. Estudia si los vectores $\vec{u} = (2, -4)$, $\vec{v} = (3, 1)$ y $\vec{w} = (11, -15)$ son linealmente dependientes.

Tres vectores del plano son siempre linealmente dependientes. De hecho, en este caso se tiene que $\vec{w} = 4\vec{u} + \vec{v}$.

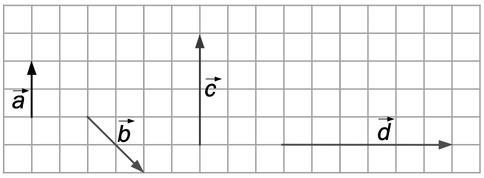
7.43. Calcula las coordenadas cartesianas de los vectores $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$ y $\vec{v} = 6\vec{a} - 4\vec{b}$ sabiendo que $\vec{a} = -3\vec{i} + 6\vec{j}$ y $\vec{b} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$.

$\vec{a} = -3\vec{i} + 6\vec{j} = (-3, 6)$ y $\vec{b} = 5\vec{i} + 2\vec{j} = (5, 2)$; por tanto,

$\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b} = 2 \cdot (-3, 6) - (5, 2) = (-11, 10)$

$\vec{v} = 6\vec{a} - 4\vec{b} = 6 \cdot (-3, 6) - 4 \cdot (5, 2) = (-38, 28)$

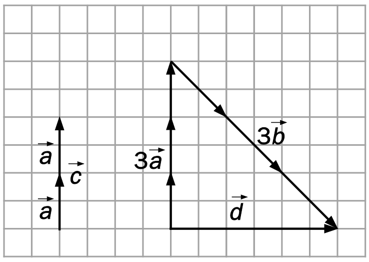
7.44. Expresa los vectores $\vec{c}$ y $\vec{d}$ como combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.



Observando el dibujo obtenemos:

$\vec{c} = 2\vec{a}$

$\vec{d} = 3\vec{a} + 3\vec{b}$



Producto escalar

7.45. (TIC) Dados $\vec{u} = (5, 8)$ y $\vec{v} = (-2, 6)$, calcula:

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$ **b)** $\vec{v}\cdot\vec{v}$ **c)** $|\vec{u}|$ **d)** $|\vec{v}|$

a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = -10 + 48 = 38$

b) $\vec{v}\cdot\vec{v} = 4 + 36 = 40$

c) $|\vec{u}| = \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{89}$

d) $|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

7.46. (TIC) Dados $\vec{u} = (-6, 8)$ y $\vec{v} = (1, 7)$, calcula:

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$ **b)** $(-2\vec{u})\cdot\vec{v}$ **c)** $|\vec{u}|$ **d)** $|\vec{v}|$

a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = -6 + 56 = 50$

b) $-2\vec{u} = (12, -16) \Rightarrow (-2\vec{u})\cdot\vec{v} = 12 - 112 = -100$

c) $|\vec{u}| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10$

d) $|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

7.47. (TIC) Estudia si las siguientes parejas de vectores son perpendiculares entre sí.

a) $\vec{u} = (6, 9)$ **y** $\vec{v} = (-3, 2)$

b) $\vec{u} = (2, 4)$ **y** $\vec{v} = (-8, -4)$

c) $\vec{u} = (-3, 6)$ **y** $\vec{v} = (10, 5)$

d) $\vec{u} = (-1, -2)$ **y** $\vec{v} = (4, 2)$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares.

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -32 \Rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ no son perpendiculares.

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares.

d) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -8 \Rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ no son perpendiculares.

7.48. (TIC) Calcula el ángulo que forman los vectores:

a) $\vec{u} = (-2, -4)$ **y** $\vec{v} = (2, -1)$

b) $\vec{a} = (3, 9)$ **y** $\vec{b} = (-1, -3)$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares, es decir, forman un ángulo de 90º.

b) $\cos \alpha = \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \dfrac{-30}{\sqrt{10}\sqrt{90}} = -1 \Rightarrow \alpha = 180º$

7.49. (TIC) Halla el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en cada caso.

a) $\vec{u} = (2, \sqrt{3})$ **y** $\vec{v} = (\sqrt{3}, 1)$

b) $\vec{u} = (-6, 10)$ **y** $\vec{v} = (3, -5)$

c) $\vec{u} = (2, \sqrt{2})$ **y** $\vec{v} = (-2, \sqrt{2})$

a) $\cos \alpha = \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}\sqrt{4}} \approx 0{,}982 \Rightarrow \alpha \approx 10º\ 53'$

b) $\cos \alpha = \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|} = \dfrac{-68}{\sqrt{136}\sqrt{34}} \approx -1 \Rightarrow \alpha = 180º$

c) $\cos \alpha = \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|} = \dfrac{-2}{\sqrt{6}\sqrt{6}} \approx -0{,}333 \Rightarrow \alpha \approx 109º\ 27'$

7.50. (TIC) Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en cada caso.

a) $\left|\vec{u}\right| = 2$, $\left|\vec{v}\right| = 1$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{3}$

b) $\left|\vec{u}\right| = 4$, $\left|\vec{v}\right| = 8$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 16\sqrt{2}$

a) $\cos \alpha = \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30º$

b) $\cos \alpha = \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|} = \dfrac{16\sqrt{2}}{32} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45º$

7.51. ¿Son perpendiculares los vectores $\vec{u}$ = (6, 15) y $\vec{v}$ = (5, –2)?

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares.

7.52. (TIC) Calcula la distancia entre los puntos:

a) *A*(4, –2) y *B*(0, 9)

b) *C*(–1, 10) y *D*(8, –5)

a) $d(A, B) = \sqrt{(-4)^2 + 11^2} = \sqrt{137} \approx 11{,}7$ unidades lineales

b) $d(C, D) = \sqrt{9^2 + (-15)^2} = \sqrt{306} \approx 17{,}49$ unidades lineales

7.53. (TIC) Halla la longitud del segmento de extremos *A*(4, 9) y *B*(–2, 1).

$d(A, B) = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = 10$ unidades lineales

7.54. (TIC) Calcula las coordenadas del punto medio del segmento de extremos *A*(2, –5) y *B*(4, 1).

$$M = \left(\frac{2+4}{2}, \frac{-5+1}{2}\right) = (3, -2)$$

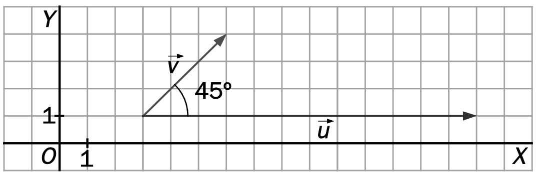
7.55. (TIC) Halla las coordenadas de los puntos medios de los lados del triángulo de vértices *A*(2, 1), *B*(2, 5) y *C*(–2, 3).

$$M_1 = \left(\frac{2+2}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = (2, 3)$$

$$M_2 = \left(\frac{2-2}{2}, \frac{5+3}{2}\right) = (0, 4)$$

$$M_3 = \left(\frac{-2+2}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = (0, 2)$$

7.56. Halla el producto escalar de estos vectores.



$$\vec{u} = (12, 0),\ \vec{v} = (3, 3) \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 12 \cdot \sqrt{18} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 36$$

7.57. Siendo $\vec{u}$ = (4, *x*), halla el valor de *x* en cada una de las siguientes situaciones.

a) El módulo de $\vec{u}$ vale $\sqrt{20}$ unidades.

b) $\vec{v}$ = (3, –5) es tal que su producto escalar por $\vec{u}$ es igual a 2.

a) $|\vec{u}| = \sqrt{4^2 + x^2} = \sqrt{20} \Rightarrow 16 + x^2 = 20 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 12 - 5x = 2 \Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = 2$

7.58. Calcula el valor de *a* para que los vectores $\vec{u}$ = (*a*, 3) y $\vec{v}$ = (–1, 5) sean perpendiculares.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -a + 15 = 0 \Rightarrow a = 15$

7.59. Calcula el valor de *a* para que los vectores $\vec{u}$ = (4, 3) y $\vec{v}$ = (*a*, 1) formen un ángulo de 45º.

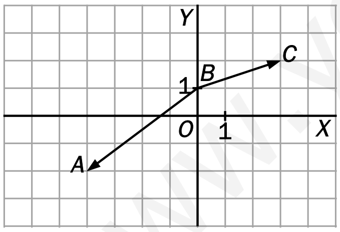
$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{4a+3}{\sqrt{25}\sqrt{a^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 8a+6 = 5\sqrt{2a^2+2} \Rightarrow (8a+6)^2 = 25\left(2a^2+2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 64a^2 + 96a + 36 = 50a^2 + 50 \Rightarrow 14a^2 + 96a - 14 = 0 \Rightarrow 7a^2 + 48a - 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 - 4\cdot 7\cdot(-7)}}{2\cdot 7} = \frac{-48 \pm \sqrt{2500}}{14} = \frac{-48 \pm 50}{14} = \begin{cases} \dfrac{-48+50}{14} = \dfrac{2}{14} = \dfrac{1}{7} \\ \dfrac{-48-50}{14} = \dfrac{-98}{14} = -7 \end{cases}$$

La única solución que cumple la ecuación original es $a = \frac{1}{7}$.

7.60. (TIC) Determina mediante vectores si el triángulo de vértices *A*(–4, –2), *B*(0, 1) y *C*(3, 2) es rectángulo.



$\overrightarrow{BA}$ = (–4, –3) $\overrightarrow{BC}$ = (3, 1); por tanto, el ángulo que forman estos dos vectores es:

$\cos \alpha = \frac{-15}{5\sqrt{10}} \approx -0{,}949 \Rightarrow \alpha \approx 161º\ 37'$

El triángulo es obtusángulo y, por tanto, el triángulo *ABC* no es rectángulo.

7.61. (TIC) Determina un vector cuyo módulo valga $\sqrt{10}$ unidades lineales y que forme un ángulo de 30º con la horizontal.

Para que forme un ángulo de 30º con la horizontal, el vector debe tener por coordenadas $\left(a\sqrt{3},\ a\right)$.

Como el módulo debe ser $\sqrt{10}$:

$\left(a\sqrt{3}\right)^2 + a^2 = 10 \Rightarrow 3a^2 + a^2 = 10 \Rightarrow 4a^2 = 10 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow$ El vector es $\left(\frac{\sqrt{30}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$.

Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas

7.62. (TIC) Comprueba si el punto *B*(4, –6) pertenece a alguna de las rectas.

a) $y = 9 - 3x$ **b)** $5x + 3y - 2 = 0$

a) *B* no pertenece a la recta, ya que al sustituir las coordenadas del punto en la ecuación, esta no se cumple.

b) *B* pertenece a la recta, ya que al sustituir las coordenadas del punto en la ecuación, esta se cumple.

7.63. (TIC) Escribe en todas las formas posibles la ecuación de la recta que pasa por el punto *A*(3, 1) y tiene la dirección del vector $\vec{u} = (5, -2)$.

Ecuación vectorial: $(x, y) = (3, 1) + t \cdot (5, -2)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$

Ecuación continua: $\frac{x-3}{5} = \frac{y-1}{-2}$

Ecuación general: $-2x - 5y + 11 = 0$

Ecuación explícita: $y = -\frac{2}{5}x + \frac{11}{5}$

Ecuación punto-pendiente: $y - 1 = -\frac{2}{5}(x - 3)$

7.64. (TIC) Determina el vector director y un punto por el que pasen cada una de las siguientes rectas.

a) $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+4}{5}$ **c)** $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 5 + 3t \end{cases}$

b) $4x - y = 0$ **d)** $(x, y) = (4, 0) + t \cdot (2, -6)$

a) Un punto de la recta es *A*(3, –4). El vector director de la recta es $\vec{u} = (-2, 5)$.

b) Dos puntos de la recta son *O*(0, 0) y *A*(1, 4). El vector director de la recta es $\overrightarrow{OA} = (1, 4)$.

c) Un punto de la recta es *A*(2, 5). El vector director de la recta es $\vec{u} = (-1, 3)$.

d) Un punto de la recta es *A*(4, 0). El vector director de la recta es $\vec{u} = (2, -6)$.

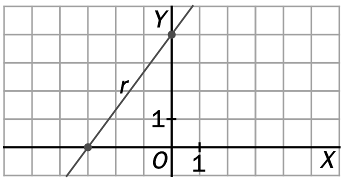
7.65. Calcula la ecuación general de la recta que pasa por los puntos *A*(–3, 6) y *B*(4, 1).

El vector director de la recta es $\overrightarrow{AB} = (7, -5)$.

Por tanto, la ecuación general de la recta es:

$$\frac{x+3}{7} = \frac{y-6}{-5} \Rightarrow -5x - 15 = 7y - 42 \Rightarrow -5x - 7y + 27 = 0$$

7.66. (TIC) Halla todas las formas de la ecuación de la recta de la figura.



La recta pasa por los puntos $A(-3, 0)$ y $B(0, 4)$; por tanto, tiene vector director $\vec{u} = (3, 4)$.

Ecuación vectorial: $(x, y) = (-3, 0) + t \cdot (3, 4)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = 4t \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y}{4}$

Ecuación general: $4x - 3y + 12 = 0$

Ecuación explícita: $y = \dfrac{4}{3}x + 4$

Ecuación punto-pendiente: $y = \dfrac{4}{3}(x + 3)$

7.67. Halla la pendiente de la recta $3x + 2y - 6 = 0$.

Dos puntos de la recta son $A(2, 0)$ y $B(0, 3)$.

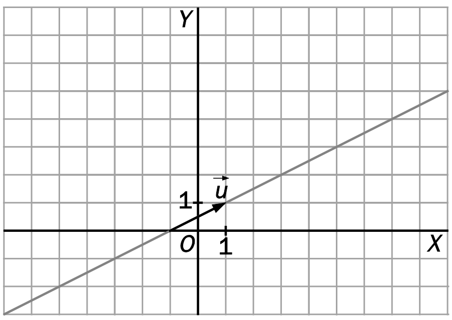
El vector director de la recta es $\overrightarrow{AB} = (-2, 3)$; por tanto, la pendiente es $m = -\dfrac{3}{2}$.

7.68. (TIC) Halla la pendiente y un punto por el que pasa cada una de las siguientes rectas. Represéntalas gráficamente.

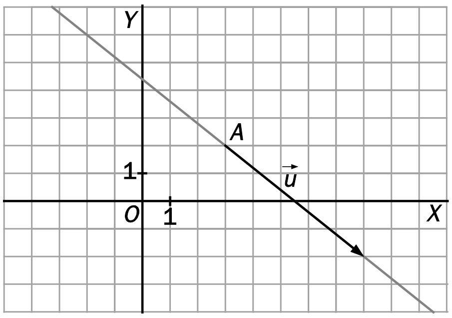
a) $\dfrac{x+1}{2} = y$ **c)** $5x - 2y + 3 = 0$

b) $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y-2}{-4}$ **d)** $\dfrac{x}{8} - \dfrac{y}{5} = 1$

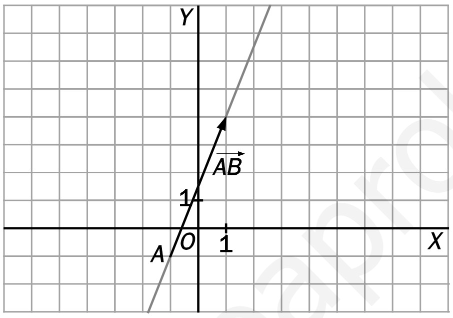
a) Un punto de la recta es $A(-1, 0)$. El vector director de la recta es $\vec{u} = (2, 1)$; por tanto, la pendiente es $m = \dfrac{1}{2}$.



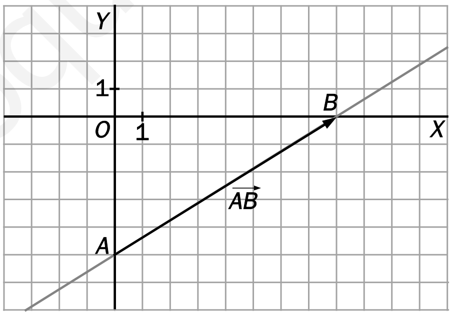
b) Un punto de la recta es $A(3, 2)$. El vector director de la recta es $\vec{u} = (5, -4)$; por tanto, la pendiente es $m = -\frac{4}{5}$.



c) Dos puntos de la recta son $A(-1, -1)$ y $B(1, 4)$. El vector director de la recta es $\overrightarrow{AB} = (2, 5)$; por tanto, la pendiente es $m = \frac{5}{2}$.



d) Dos puntos de la recta son $B(8, 0)$ y $A(0, -5)$. El vector director de la recta es $\overrightarrow{AB} = (8, 5)$; por tanto, la pendiente es $m = \frac{5}{8}$.



7.69. (TIC) ¿Son secantes *r*: 4*x* – 5*y* – 2 = 0 y *s*: *y* = 2*x* – 4? En caso afirmativo, calcula su punto de corte.

Ecuación general de *s*: $-2x + y + 4 = 0$

$\frac{4}{-2} \neq \frac{-5}{1} \Rightarrow$ Las rectas son secantes.

Para calcular el punto de corte *P* resolvemos el sistema lineal:

$$\begin{cases} 4x - 5y - 2 = 0 \\ -2x + y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 5y - 2 = 0 \\ -4x + 2y + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow -3y + 6 = 0 \Rightarrow y = 2,\ x = 3 \Rightarrow P(3,\ 2)$$

7.70. (TIC) Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas.

a) r: $4x - 6y + 10 = 0$, s: $2x - 3y + 4 = 0$

b) r: $2x + 3y + 6 = 0$, s: $6x + 9y + 18 = 0$

a) $\frac{4}{2} = \frac{-6}{-3} \neq \frac{10}{4} \Rightarrow$ Las rectas son paralelas.

b) $\frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{6}{18} \Rightarrow$ Las rectas son coincidentes.

7.71. (TIC) Estudia la posición relativa de estos pares de rectas y, si son secantes, halla su punto de corte.

a) r: $2x - 5y + 7 = 0$, s: $x - 2y - 2 = 0$

b) r: $6x + 4y - 12 = 0$, s: $3x + 2y - 6 = 0$

c) r: $x - 5y + 3 = 0$, s: $3x - 15y + 8 = 0$

a) $\frac{2}{1} \neq \frac{-5}{-2} \Rightarrow$ Las rectas son secantes.

Para calcular el punto de corte P resolvemos el sistema lineal:

$$\begin{cases} 2x - 5y + 7 = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 5y + 7 = 0 \\ -2x + 4y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow -y + 11 = 0 \Rightarrow y = 11,\ x = 24 \Rightarrow P(24,\ 11)$$

b) $\frac{6}{3} = \frac{4}{2} = \frac{-12}{-6} \Rightarrow$ Las rectas son coincidentes.

c) $\frac{1}{3} = \frac{-5}{-15} \neq \frac{3}{8} \Rightarrow$ Las rectas son paralelas.

7.72. Calcula la ecuación general de la recta que pasa por el punto $P(5, -4)$ y forma un ángulo de 30º con el eje de abscisas.

Para que la recta forme un ángulo de 30º con el eje de abscisas, el vector director de la recta debe tener coordenadas $\left(a\sqrt{3},\ a\right)$.

Tomemos, por tanto, como vector director $\vec{u} = \left(\sqrt{3},\ 1\right)$, la ecuación general de la recta es:

$$\frac{x-5}{\sqrt{3}} = \frac{y+4}{1} \Rightarrow x - 5 = \sqrt{3}\,y + 4\sqrt{3} \Rightarrow x - \sqrt{3}\,y - 5 - 4\sqrt{3} = 0$$

7.73. Obtén un punto, un vector director y la pendiente de la recta de ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5t \end{cases}$

Un punto de la recta es $A(-1, 0)$. El vector director es $\vec{u} = (2, 5)$.

La pendiente es $\frac{5}{2}$.

7.74. Halla la ecuación punto-pendiente de la recta *r* que pasa por *P*(0, 2) y tiene la misma pendiente que la recta *s*: $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{3}$. ¿Cuál es la posición relativa de *r* y *s*?

El vector director de *s* es $\vec{u}$ = (–1, 3).

Por tanto, la pendiente es $m = -3$.

Así, la ecuación punto-pendiente de *r* es $y - 2 = -3(x - 0)$.

Las rectas *r* y *s* son paralelas, ya que tienen la misma pendiente.

7.75. (TIC) Se consideran las rectas *r*: *y* = *x* – 3 y *s*, determinada por los puntos *A*(7, 5) y *B*(–4, 1). ¿Cuál es su posición relativa?

El vector director de *s* es $\overrightarrow{AB}$ = (–11, –4).

Por tanto, su pendiente es $m_s = \frac{4}{11}$.

La pendiente de *r* es $m_r = 1$; de este modo, las dos rectas son secantes, ya que sus pendientes no coinciden.

7.76. Halla la ecuación explícita de la recta que pasa por el punto *A*(–2, 4) y es paralela a la que tiene por ecuación 7*x* – 14*y* + 3 = 0.

La ecuación de cualquier paralela a la recta dada debe ser de la forma $7x - 14y + C = 0$.

Como debe contener al punto *A*, se tiene:

$7 \cdot (-2) - 14 \cdot 4 + C = 0 \Rightarrow C = 70$

De este modo, la ecuación explícita de la recta solicitada es:

$7x - 14y + 70 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 5$

7.77. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto *A*(0, 3) y por el punto de corte de *r*: 8*x* – 5*y* + 2 = 0 y *s*: 2*x* + *y* – 4 = 0.

Calculamos el punto de corte *P* de *r* y *s* resolviendo el sistema lineal:

$$\begin{cases} 8x-5y+2=0 \\ 2x+y-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x-5y+2=0 \\ 10x+5y-20=0 \end{cases} \Rightarrow 18x-18=0 \Rightarrow x=1,\ y=2 \Rightarrow P(1,\ 2)$$

La recta que pasa por *A* y *P* tiene vector director $\overrightarrow{AP}$ = (1, –1).

De este modo, la ecuación de la recta solicitada es:

$$\frac{x-0}{1}=\frac{y-3}{-1} \Rightarrow -x - y + 3 = 0$$

7.78. (TIC) Los lados de un triángulo vienen dados por las rectas $3x - y - 6 = 0$, $3x + y - 18 = 0$ e $y = 0$.

a) Halla las coordenadas de los vértices.

b) Clasifica el triángulo en función de sus lados.

c) Halla las ecuaciones de las rectas determinadas por las medianas del triángulo.

a) Calculamos las coordenadas de los vértices, *A*, *B* y *C*, del triángulo resolviendo los correspondientes sistemas lineales:

$$\begin{cases} 3x - y - 6 = 0 \\ 3x + y - 18 = 0 \end{cases} \Rightarrow 6x - 24 = 0 \Rightarrow x = 4,\ y = 6 \Rightarrow A(4,\ 6)$$

$$\begin{cases} 3x - y - 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0,\ x = 2 \Rightarrow B(2,\ 0)$$

$$\begin{cases} 3x + y - 18 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0,\ x = 6 \Rightarrow C(6,\ 0)$$

b) $d(A, B) = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ unidades lineales

$d(B, C) = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$ unidades lineales

$d(C, A) = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ unidades lineales

Por tanto, el triángulo *ABC* es isósceles.

c) Las medianas de un triángulo son las rectas que pasan por cada vértice y el punto medio del lado opuesto.

Mediana por *A*: pasa por *A* y por el punto medio del lado *BC*, $M_1 = \left(\frac{2+6}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (4, 0)$.

Por tanto, su vector director es $\overrightarrow{AM_1} = (0, -6)$ y la ecuación de la recta es:

$$\frac{x-4}{0} = \frac{y-6}{-6} \Rightarrow x = 4$$

Mediana por *B*: pasa por *B* y por el punto medio del lado *AC*, $M_2 = \left(\frac{4+6}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = (5, 3)$.

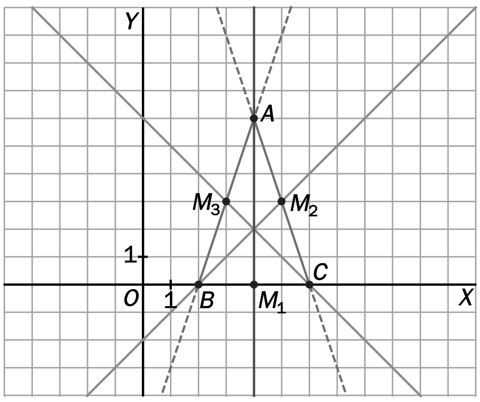
Por tanto, su vector director es $\overrightarrow{BM_2} = (3, 3)$ y la ecuación de la recta es:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-0}{3} \Rightarrow x - y - 2 = 0$$

Mediana por *C*: pasa por *C* y por el punto medio del lado *AB*, $M_3 = \left(\frac{4+2}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = \quad = (3, 3)$.

Por tanto, su vector director es $\overrightarrow{CM_3} = (-3, 3)$ y la ecuación de la recta es:

$$\frac{x-6}{-3} = \frac{y-0}{3} \Rightarrow x + y - 6 = 0$$



sm

7.79. (TIC) Decide en cuáles de los siguientes casos los puntos *A*, *B* y *C* están alineados y en cuáles forman un triángulo.

a) *A*(–1, –5), *B*(0, –3), *C*(–2, –7)

b) *A*(1, –2), *B*(0, 1), *C*(–2, 7)

c) *A*(1, 2), *B*(2, 7), *C*(–1, 3)

a) $\overrightarrow{AB} = (1, 2)$ y $\overrightarrow{AC} = (-1, -2)$ son proporcionales; por tanto, *A*, *B* y *C* están alineados.

b) $\overrightarrow{AB} = (-1, 3)$ y $\overrightarrow{AC} = (-3, 9)$ son proporcionales; por tanto, *A*, *B* y *C* están alineados.

c) $\overrightarrow{AB} = (1, 5)$ y $\overrightarrow{AC} = (-2, 1)$ no son proporcionales; por tanto, *A*, *B* y *C* no están alineados y forman un triángulo.

7.80. (TIC) Estudia si las rectas:

$$r: 3x + y - 5 = 0 \qquad s: 2x - y = 0 \qquad t: x + 4y - 9 = 0$$

se cortan en un mismo punto y, en caso afirmativo, calcula sus coordenadas.

Las rectas *r* y *s* son secantes, ya que $\frac{3}{2} \neq \frac{1}{-1}$. Para calcular las coordenadas del punto de corte *P* resolvemos el sistema lineal:

$$\begin{cases} 3x + y - 5 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow 5x - 5 = 0 \Rightarrow x = 1,\ y = 2 \Rightarrow P(1,\ 2)$$

Este punto también pertenece a la recta *t*, ya que cumple su ecuación; por tanto, las tres rectas se cortan en el punto *P*.

7.81. (TIC) Las rectas *r*: *x* – *y* + 1 = 0, *s*: *x* + *y* – 7 = 0, *t*: *x* – *y* – 5 = 0 y *u*: *x* + *y* – 5 = 0 determinan un cuadrilátero.

a) Calcula la medida de los lados y de los ángulos interiores.

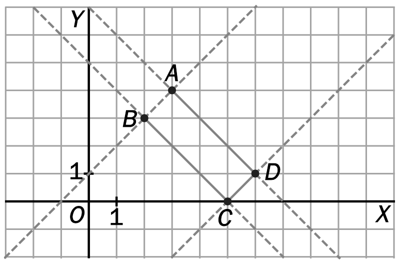
b) ¿Qué tipo de cuadrilátero es?

Observemos que las rectas *r* y *t* son paralelas, al igual que las rectas *s* y *u*.

Por tanto, el cuadrilátero es un paralelogramo de vértices *A*, *B*, *C* y *D*, determinados por la intersección de las rectas *r* - *s*, *r* - *u*, *t* - *u*, *s* - *t*, respectivamente.

Resolviendo los correspondientes sistemas lineales obtenemos:

A(3, 4) *B*(2, 3) *C*(5, 0) *D*(6, 1)



a) $d(A, B) = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ unidades lineales

$d(B, C) = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ unidades lineales

$d(C, D) = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ unidades lineales

$d(D, A) = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ unidades lineales

Por otro lado, al ser un paralelogramo, los ángulos opuestos son iguales y los contiguos suman 180º; por tanto, solo es necesario calcular uno de los ángulos, por ejemplo, el $\widehat{A}$.

$\overrightarrow{AB} = (-1, -1)$, $\overrightarrow{AD} = (3, -3) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Rightarrow \widehat{A} = 90º$

De este modo: $\widehat{A} = \widehat{C} = 90º$ y $\widehat{B} = \widehat{D} = 180º - 90º = 90º$

b) Según el apartado anterior, el cuadrilátero *ABCD* es un rectángulo.

PROBLEMAS

7.82. (TIC) En un radar se observa el vuelo de dos aviones que se mueven en un mismo plano. Uno de ellos se encuentra en la posición de coordenadas (5, 3) y se desplaza siguiendo la dirección del vector $\vec{u}$ = (–4, 7).

La trayectoria del segundo queda determinada por la recta de ecuación 7*x* + 4*y* + 83 = 0.

¿Habrá algún punto común en sus trayectorias?

El primer avión sigue una trayectoria rectilínea de ecuación:

$$\frac{x-5}{-4} = \frac{y-3}{7} \Rightarrow 7x + 4y - 47 = 0$$

Esta recta es paralela a la que sigue el segundo avión; por tanto, las trayectorias no tienen ningún punto en común.

7.83. (TIC) Se va a implantar un sistema de riego automático en una rosaleda. Si dos de los rosales están situados en los puntos *A*(4, 6) y *B*(9, 8), y un tercero, en el punto *C*(0, 6), ¿es posible conseguir que una tubería recta pase por los pies de los tres a la vez?

$\overrightarrow{AB}$ = (5, 2) y $\overrightarrow{AC}$ = (–4, 0) no son proporcionales; por tanto, *A*, *B* y *C* no están alineados.

7.84. Una cigüeña tiene su nido sobre una torre a 25 metros de altura. El animal está volando a 100 metros de altura y a 100 metros de distancia de la vertical de la torre, en el punto (0, 100).

a) Si bajara hasta el nido en línea recta, ¿cuál sería la ecuación de la trayectoria seguida? ¿Qué pendiente tendría?

b) ¿A qué distancia del nido se encuentra la cigüeña?

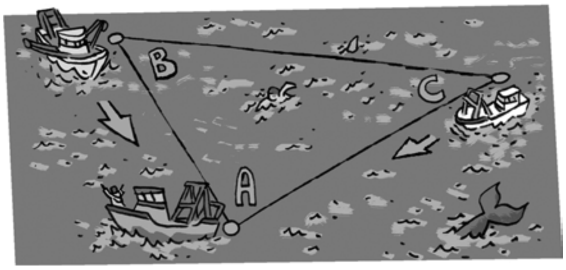
La cigüeña parte del punto *A* = (0, 100); suponiendo que la torre está a la derecha de la cigüeña, el nido estará situado en el punto *B* = (100, 25).

a) La cigüeña sigue la dirección del vector $\vec{u}$ = (100, –75); por tanto, la ecuación de la trayectoria es:

$$\frac{x-0}{100} = \frac{y-100}{-75} \Rightarrow -75x - 100y + 10\,000 = 0 \Rightarrow -3x - 4y + 400 = 0$$

b) $d(A, B) = \sqrt{100^2 + (-75)^2} = \sqrt{15625} = 125$ metros

7.85. (TIC) Un barco lanza un mensaje de socorro. Su posición viene dada por el punto *A*(1460, 765). Dos barcos situados en *B*(3525, 2490) y *C*(585, 3500) acuden en su ayuda.



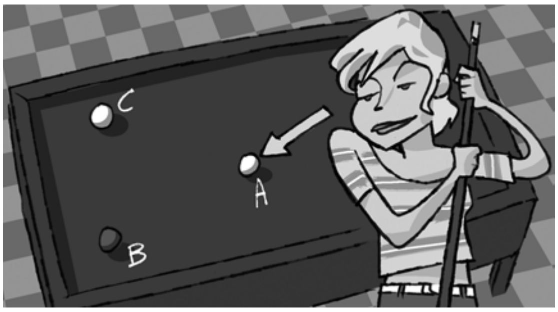
Si los dos navegan a la misma velocidad y en línea recta hacia *A*, ¿cuál llegará primero?

$d(B, A) = \sqrt{(-2065)^2 + (-1725)^2} = \sqrt{7\,239\,850} \approx 2690{,}7$ unidades lineales

$d(C, A) = \sqrt{875^2 + (-2735)^2} = \sqrt{8\,245\,850} \approx 2871{,}56$ unidades lineales

De este modo, llegará primero el barco situado en *B*.

7.86. (TIC) Con un solo golpe sobre la bola *A*, esta debe golpear primero a la bola *B* y después a la bola *C*. Considerando dos lados de la mesa como ejes de coordenadas, las coordenadas de las bolas son *A*(20, 28), *B*(5, 10) y *C*(12, 36).

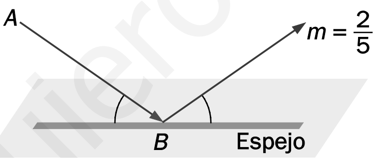


¿Con qué ángulo respecto de la trayectoria seguida por *A* cuando golpea a *B* debe salir la bola para golpear a *C*?

Nos piden determinar el ángulo $\alpha = \widehat{ABC}$; para calcularlo, consideremos los vectores $\overrightarrow{BA} = (15, 18)$ y $\overrightarrow{BC} = (7, 26)$. Tenemos:

$$\cos\alpha = \cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{573}{\sqrt{549}\sqrt{725}} \approx 0{,}9082 \Rightarrow \alpha \approx 24^\circ\ 44'$$

7.87. (TIC) Un rayo de luz incide en el espejo con una trayectoria rectilínea determinada por los puntos *A*(–2, 4) y *B*(3, 2), siendo este último el punto de contacto con el espejo. Al reflejarse, la pendiente de la recta que describe su trayectoria es $\frac{2}{5}$.



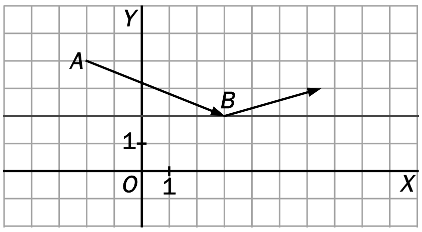
a) Escribe las ecuaciones de las rectas que determinan los rayos incidente y reflejado.

b) Halla un vector director de cada una de ellas y el ángulo que forman.

c) Encuentra la ecuación de la recta que define la posición del espejo.

a) Rayo incidente: $\frac{x+2}{5} = \frac{y-4}{-2} \Rightarrow -2x - 5y + 16 = 0$

Rayo reflejado: $y - 2 = \frac{2}{5}(x - 3) \Rightarrow -2x + 5y - 4 = 0$



b) Vector director del rayo incidente: $\overrightarrow{AB} = (5, -2)$

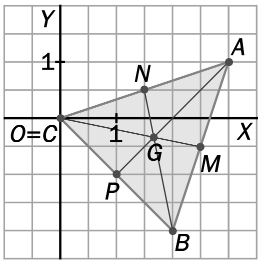
Vector director del rayo reflejado: $\vec{v} = (5, 2)$

El ángulo que forman las rectas que contienen a los rayos es:

$$\cos\alpha = \frac{21}{\sqrt{29}\sqrt{29}} = \frac{21}{29} = 0{,}7241 \Rightarrow \alpha \approx 43^\circ\ 36'$$

c) En la gráfica se aprecia que la recta que contiene al espejo es $y = 2$.

7.88. (TIC) Una mediana de un triángulo es el segmento que tiene por extremos uno de los vértices y el punto medio del lado opuesto. El baricentro de un triángulo es el punto donde se cortan las tres medianas.



Dado el triángulo de vértices *A*(3, 1), *B*(2, –2) y *C*(0, 0):

a) Halla las rectas definidas por sus tres medianas.

b) Calcula el baricentro *G* y comprueba que pertenece a las tres medianas.

c) Comprueba que si *M* es el punto medio de *AB*, entonces $\overrightarrow{GC} = -2\overrightarrow{GM}$.

a) $M\left(\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right)$ $N\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ $P(1, -1)$

Mediana por *A*: $\frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{-2} \Rightarrow x - y - 2 = 0$

Mediana por *B*: $\frac{x-2}{-1/2} = \frac{y+2}{5/2} \Rightarrow 5x + y - 8 = 0$

Mediana por *C*: $\frac{x}{5/2} = \frac{y}{-1/2} \Rightarrow -x - 5y = 0$

b) Para calcular el baricentro, se resuelve el sistema formado por dos de las medianas:

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ -x - 5y = 0 \end{cases} \Rightarrow -6y - 2 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{3} \quad x = \frac{5}{3} \Rightarrow G = \left(\frac{5}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

Sustituyendo las coordenadas de *G* en la ecuación de la otra mediana se verifica que también pertenece a la misma.

c) $\overrightarrow{GC} = \left(-\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)$ $\overrightarrow{GM} = \left(\frac{5}{6},-\frac{1}{6}\right) \Rightarrow \overrightarrow{GC} = -2\overrightarrow{GM}$

AMPLIACIÓN

7.89. Considera dos puntos *B* y *C* en un plano. Sea *S* el conjunto de todos los puntos *A* de ese plano para los que el área del triángulo *ABC* es 1. ¿Qué es *S*?

a) Dos rectas paralelas

b) Una circunferencia

c) Un segmento

d) Dos puntos

Llamando *d* a la distancia entre *A* y *B*, la altura del triángulo que, con base *AB*, tiene área 1, mide $\frac{2}{d}$.

Así pues, todos los puntos *C* que disten $\frac{2}{d}$ de la recta *AB* serían tercer vértice de un triángulo *ABC* de área 1. Estos puntos están en las dos rectas paralelas a la recta *AB* y que distan $\frac{2}{d}$ de ella, es decir, la respuesta a.

7.90. Una recta de pendiente 3 corta a otra de pendiente 5 en el punto (10, 15). ¿Cuál es la distancia entre los puntos de corte de ambas rectas con el eje *X*?

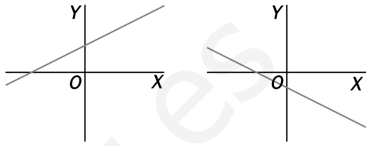
a) **2** **b)** **5** **c)** **7** **d)** **12**

Como el punto (10, 15) está en ambas, la ecuación de la recta de pendiente 3 es $y - 15 = 3(x - 10)$, y la de pendiente 5 es $y - 15 = 5(x - 10)$. La primera recta corta al eje *X* en el punto (5, 0), y la segunda, en (7, 0), por lo que la distancia pedida es 2, la respuesta a.

7.91. Si *m* y *b* son números reales y *mb* > 0, la recta de ecuación $y = mx + b$ no puede contener al punto:

a) **(0, 2011)** **b)** **(20, 10)** **c)** **(20, –10)** **d)** **(2011, 0)**

Al ser $mb > 0$, los números *m* y *b* tienen el mismo signo, por lo que la recta no puede cortar al semieje positivo de abscisas, ya que será de una de estas dos formas:



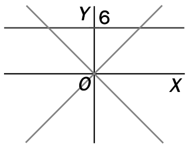
Así pues, el punto (2011, 0) nunca estará en dicha recta, la respuesta d.

7.92. Sea $y = f(x)$ la ecuación de una recta tal que $f(1) \leq f(2)$, $f(3) \geq f(4)$ y $f(5) = 5$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) $f(0) < 0$ **b)** $f(0) = 0$ **c)** $f(1) < f(0)$ **d)** $f(0) = 5$

La información $f(1) \leq f(2)$ nos dice que la pendiente es mayor o igual que 0, y $f(3) \geq f(4)$ nos dice que la pendiente es menor o igual que 0. Así pues, al darse ambas condiciones, la pendiente es 0, es decir, la recta es horizontal y, por tanto, $f(5) = f(0) = 5$, la respuesta d.

7.93. El área del triángulo limitado por las rectas $y = x$, $y = -x$ e $y = 6$ es:



a) **48** **b)** **36** **c)** **24** **d)** **18**

El triángulo en cuestión es el de la figura, triángulo de base 12, altura 6 y área 36, la respuesta b.

7.94. Una recta *r* divide en dos trozos de igual área al rectángulo de vértices (–2, 0), (0, 0), (0, 4) y (–2, 4) y al rectángulo de vértices (1, 0), (5, 0), (1, 12) y (5, 12). ¿Cuál es la pendiente de esta recta?

a) **–4** **b)** **–1** **c)** **0** **d)** **1**

Si una recta divide a un rectángulo en dos trozos de igual área, tiene que pasar por su centro. Así pues, la recta dada pasará por (–1, 2) y por (3, 6), por lo que su pendiente será 1, la respuesta d.

AUTOEVALUACIÓN

7.1. Calcula el vector resultante en cada caso.

a) $3 \cdot (6, 2) + (5, -4) - 6 \cdot (2, 1)$

b) $5 \cdot [(7, -2) + (-8, 1)]$

c) $(2, 3) - [(6, 1) - 4 \cdot (-3, -2)]$

a) $3 \cdot (6, 2) + (5, -4) - 6 \cdot (2, 1) = (18, 6) + (5, -4) - (12, 6) = (11, -4)$

b) $5 \cdot [(7, -2) + (-8, 1)] = 5 \cdot (-1, -1) = (-5, -5)$

c) $(2, 3) - [(6, 1) - 4 \cdot (-3, -2)] = (2, 3) - [(6, 1) - (-12, -8)] = (2, 3) - (18, 9) = (-16, -6)$

7.2. a) Del vector $\overrightarrow{PQ}$ = (5, 3) se sabe que *P*(–1, 2). Calcula las coordenadas del extremo *Q*.

b) Del vector $\overrightarrow{AB}$ = (–2, 6) se sabe que *B*(–2, –4). Calcula las coordenadas de *A*.

a) coordenadas ($\overrightarrow{PQ}$) = coordenadas (*Q*) – coordenadas (*P*); por tanto:

coordenadas (*Q*) = coordenadas ($\overrightarrow{PQ}$) + coordenadas (*P*) = (5, 3) + (–1, 2) = (4, 5)

b) coordenadas ($\overrightarrow{AB}$) = coordenadas (*B*) – coordenadas (*A*); por tanto:

coordenadas (*A*) = coordenadas (*B*) – coordenadas ($\overrightarrow{AB}$) = (–2, –4) – (–2, 6) = (0, –10)

7.3. Estudia si son perpendiculares los vectores:

a) $\vec{u}$ = (–2, 8) y $\vec{v}$ = (4, 1)

b) $\vec{u}$ = (–3, 7) y $\vec{v}$ = (2, –1)

a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares.

b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = -13 \Rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ no son perpendiculares.

7.4. Calcula el ángulo que forman los vectores:

a) $\vec{u}$ = (–1, 6) y $\vec{v}$ = (3, 1)

b) $\vec{u}$ = (0, –2) y $\vec{v}$ = (0, 2)

a) $\cos\alpha = \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \dfrac{3}{\sqrt{37}\sqrt{10}} \approx 0{,}156 \Rightarrow \alpha \approx 81^\circ\ 2'$

b) $\cos\alpha = \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \dfrac{-4}{\sqrt{4}\sqrt{4}} = -1 \Rightarrow \alpha = 180^\circ$

7.5. Halla la distancia entre *A*(5, –9) y *B*(7, 2).

$d(A, B) = \sqrt{(7-5)^2 + (2+9)^2} = \sqrt{125} \approx 11{,}18$ unidades lineales

7.6. Calcula las coordenadas del punto medio del segmento *AB*, si *A*(4, 0) y *B*(–2, 6).

$M = \left(\dfrac{4-2}{2}, \dfrac{0+6}{2}\right) = (1, 3)$

7.7. Escribe todas las formas posibles de la ecuación de la recta:

a) Que pasa por el punto *P*(4, 1) y tiene la dirección del vector $\vec{u}$ = (–2, 5).

b) Que pasa por los puntos *A*(9, 4) y *B*(8, 1).

a) Ecuación vectorial: $(x, y) = (4, 1) + t\cdot(-2, 5)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 1 + 5t \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x-4}{-2} = \dfrac{y-1}{5}$

Ecuación general: $5x + 2y - 22 = 0$

Ecuación explícita: $y = -\dfrac{5}{2}x + 11$

Ecuación punto-pendiente: $y - 1 = -\dfrac{5}{2}(x - 4)$

b) Ecuación vectorial: $(x, y) = (9, 4) + t \cdot (-1, -3)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 9 - t \\ y = 4 - 3t \end{cases}$

Ecuación continua: $\frac{x-9}{-1} = \frac{y-4}{-3}$

Ecuación general: $-3x + y + 23 = 0$

Ecuación explícita: $y = 3x - 23$

Ecuación punto-pendiente: $y - 4 = 3(x - 9)$

7.8. Comprueba si la recta $6x + 4y = 0$ pasa por el punto (3, –3).

Sustituyendo las coordenadas del punto en la ecuación de la recta comprobamos que la recta no pasa por el punto.

7.9. Calcula la ecuación general de la recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene el mismo vector de dirección que *r*: $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + 5t \end{cases}$

$\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{5} \Rightarrow 5x - y = 0$

7.10. Estudia la posición relativa de las rectas:

a) *r*: $3x - y + 6 = 0$, *s*: $3x - 4y + 2 = 0$

b) *r*: $4x + 6y + 12 = 0$, *s*: $2x + 3y + 9 = 0$

a) $\frac{3}{3} \neq \frac{-1}{-4} \Rightarrow$ Las rectas son secantes.

b) $\frac{4}{2} = \frac{6}{3} \neq \frac{12}{9} \Rightarrow$ Las rectas son paralelas.

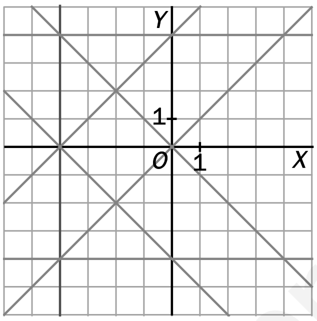
PON A PRUEBA TUS COMPETENCIAS

Dibuja e identifica > Una figura misteriosa

Al crear dibujos por ordenador, los grafistas frecuentemente utilizan las matemáticas. En los sistemas de inecuaciones que verás a continuación se esconde la silueta de una figura que reconocerás. Para dibujarla puedes utilizar papel cuadriculado o un programa de geometría como GeoGebra.

7.1. **Representa las rectas de ecuaciones:**

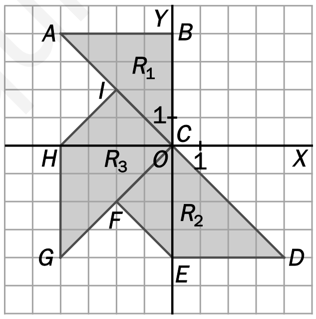
$y = 4,\ y = -4,\ x = 0,\ x = -4,\ y = x,\ y = -x,\ y = x + 4,\ y = -x - 4$



7.2. **Representa ahora los recintos del plano definidos por los sistemas de inecuaciones:**

$R_1 : \begin{cases} y \le 4 \\ x \le 0 \\ y \ge -x \end{cases}$ $\quad R_2 : \begin{cases} -x - 4 \le y \le -x \\ y \le x \\ -4 \le y \end{cases}$ $\quad R_3 : \begin{cases} x \le y \le x + 4 \\ y \le -x \\ -4 \le x \end{cases}$

¿De qué figura se trata?



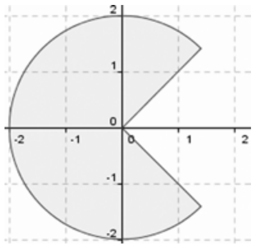
7.3. **Dibuja ahora una figura de tu invención, halla las rectas e inecuaciones que la delimitan y pásalas a tu compañero. ¿Es capaz de dibujar la figura? ¿Y tú la suya?**

Respuesta abierta.

Calcula y construye > Comecocos

Ahora realizaremos una sencilla animación: un comecocos que cierra la boca al tiempo que avanza hacia la derecha. Para ello necesitarás tus conocimientos de geometría analítica y un poco de habilidad. Puedes hacerlo en papel cuadriculado o bien utilizando un programa de geometría como GeoGebra.

7.4. **Identifica la ecuación de cada una de las rectas que determinan la boca del comecocos de la figura. ¿Cuáles son sus pendientes?**

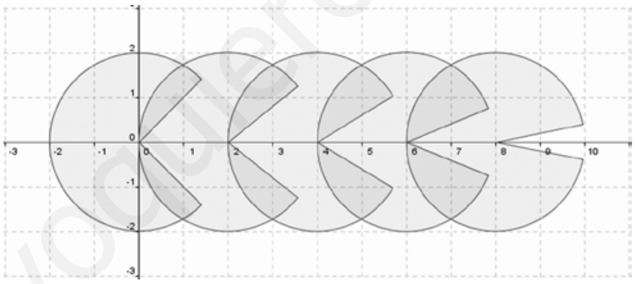


Las ecuaciones de las rectas son $y = x$ e $y = -x$, con pendientes 1 y –1.

7.5. **Crea seis fases de animación de manera que en cada una:**

- **El comecocos haya avanzado dos unidades.**
- **Las pendientes de las rectas que determinan su boca hayan disminuido 0,2 en valor absoluto.**

El aspecto que deben tener tus fases de animación es el siguiente:



1.ª fase: $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4 \\ y \ge x \end{cases}$ el semicírculo $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4 \\ y \le x \\ y \le -x \end{cases}$ el sector circular

2.ª fase: $\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 \le 4 \\ y \ge 0{,}8\cdot(x-2) \end{cases}$ el semicírculo $\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 \le 4 \\ y \le 0{,}8\cdot(x-2) \\ y \le 0{,}8\cdot(-x+2) \end{cases}$ el sector circular

3.ª fase: $\begin{cases} (x-4)^2 + y^2 \le 4 \\ y \ge 0{,}6\cdot(x-4) \end{cases}$ el semicírculo $\begin{cases} (x-4)^2 + y^2 \le 4 \\ y \le 0{,}6\cdot(x-4) \\ y \le 0{,}6\cdot(-x+4) \end{cases}$ el sector circular

6.ª fase: $\begin{cases} (x-10)^2 + y^2 \le 4 \\ y \ge 0 \end{cases}$ el semicírculo $\begin{cases} (x-10)^2 + y^2 \le 4 \\ y \le 0 \\ y \le 0 \end{cases}$ el sector circular

En total queda el círculo $(x - 10)^2 + y^2 \le 4$.

7.6. **Si utilizas un ordenador, ahora oculta por turnos todas las fases de animación salvo una e imprímelas en páginas distintas. Recórtalas todas al mismo tamaño y pásalas muy deprisa para generar la ilusión de movimiento. O, si te atreves,… ¡investiga los deslizadores y las animaciones en GeoGebra! Aquí tienes una guía: www.e-sm.net/4esoz29.**

Respuesta abierta.

7.7. **Como habrás visto, la animación es breve y se aprecian los saltos. Ahora haz tu propio dibujo vectorial utilizando formas geométricas y construye una animación con todas las fases que quieras, o con movimiento continuo en GeoGebra.**

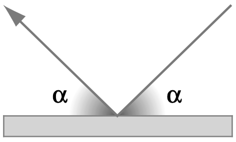
Respuesta abierta.

Analiza y decide > Minigolf

Entre sus numerosas aplicaciones, la geometría también sirve para jugar. Si lo piensas, el billar, los dardos, los bolos y la mayor parte de los deportes la utilizan de algún modo: ángulos, vectores, rectas, formas geométricas…

Pero en esta ocasión vamos a centrarnos en el minigolf.

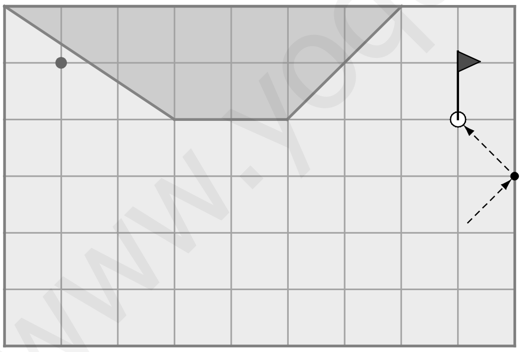
Como ya sabrás, el objetivo es golpear la bola y lograr que llegue al hoyo en el menor número de golpes posible. Y en este caso será aún más restrictivo: deberás conseguirlo en un solo golpe. Para ello debes determinar el vector de la dirección con la que saldrá la bola.



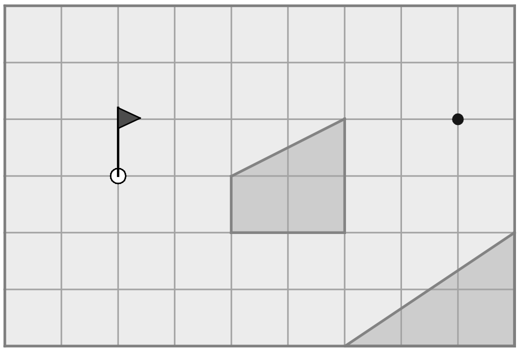
Antes de empezar, debes recordar el principio de reflexión: cuando una bola golpea una pared, el ángulo que forma su trayectoria con la pared al llegar es igual al ángulo que forma con ella al rebotar. Para calcular estos ángulos puedes utilizar el producto escalar.

7.1. **Copia los siguientes circuitos en tu cuaderno y determina el vector que lleva la bola hasta el hoyo en cada uno de ellos. Como pista, en el primero tienes uno de los puntos en los que la bola debe rebotar. Recuerda que puede haber más de una solución.**

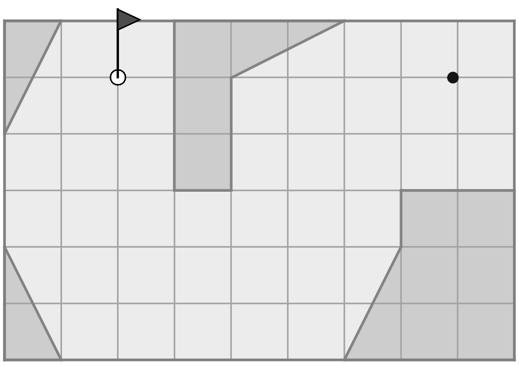
a)



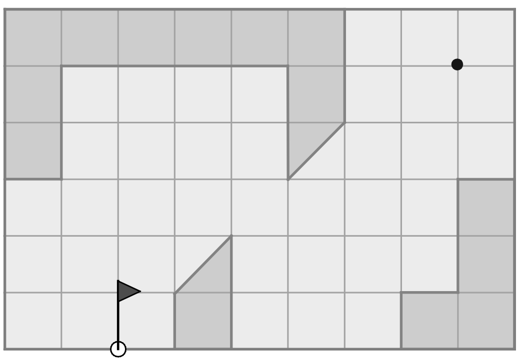
c)



b)



d)

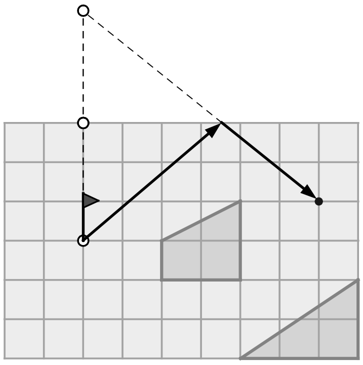


Se aporta una de las posibles direcciones.

a) La dirección del vector es la de $\vec{u} = (1, -1)$, pero para que llegue justo al hoyo ha de ser $\vec{u} = (9, -9)$

b) $\vec{u} = (-10, -10)$

c) Una manera fácil de llegar al hoyo en un golpe es dirigir la pelota al punto simétrico del hoyo respecto de la pared de rebote.



El vector es $\vec{u} = (-6, 5)$. También valdría el vector $\vec{v} = (-6, -7)$

d) $\vec{u} = (-6, -15)$

7.2. Ahora es tu turno: diseña un campo nuevo, con obstáculos que salvar, pero con una condición: se tiene que poder superar en un solo golpe (y procura que los ángulos sean razonables). Después cámbialo con tu compañero e intenta resolver el suyo. ¿Cuál es el campo más difícil que conseguís en la clase?

Respuesta abierta.

7.3. Ahora inténtalo en una versión interactiva: www.e-sm.net/4esoz30.

Respuesta abierta.

7.4. Hay algunos deportes que, por su coste o por las instalaciones que requieren, no están al alcance de todas las personas. El golf suele considerarse uno de ellos, porque históricamente ha estado asociado a las personas con más recursos económicos. ¿Crees que esto sigue siendo cierto hoy día?

Cita otros deportes que te parezcan caros, contrasta tu opinión con tus compañeros y organizad un debate en clase.

Respuesta abierta.

Proyecto editorial: **Equipo de Educación Secundaria del Grupo SM**

Autoría: **Juan Jesús Donaire, Vanesa Fernández, Pedro Lomas, Juan Alberto Torresano, Ana María Álvarez, Mariano García, Marta Marcos, Carolina Puente, Fernando Alcaide, Joaquín Hernández, María Moreno, Esteban Serrano**

Edición: **Arturo García, Eva Béjar, José Miguel Gómez**

Revisión contenidos: **Miguel Nieto**

Corrección: **Ricardo Ramírez**

Ilustración: **Modesto Arregui, Jurado y Rivas, Estudio "Haciendo el león", Félix Anaya, Juan Francisco Cobos, José Santos**

Fotografía: **Olimpia Torres**

Diseño: **Pablo Canelas, Alfonso Ruano**

Maquetación: **SAFEKAT S. L.**

Coordinación de diseño: **José Luis Rodríguez**

Coordinación editorial: **Josefina Arévalo**

Dirección del proyecto: **Aída Moya**

Impreso en España – *Printed in Spain*