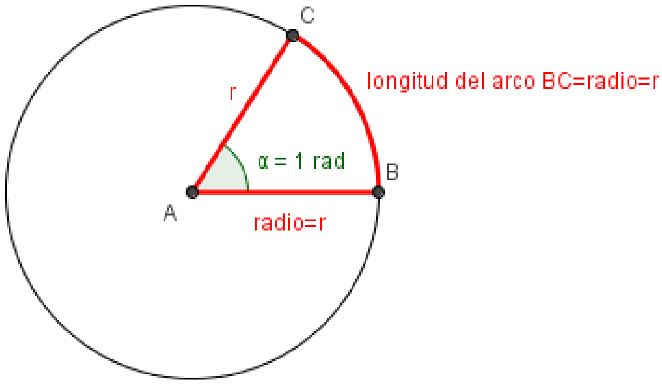
ÁNGULOS:

Usaremos dos unidades para expresar los ángulos: grados sexagesimales (MODE: DEG en la calculadora) y radianes (MODE: RAD en la calculadora).



El **radián** es la unidad de ángulo plano en el Sistema Internacional de Unidades. Representa el ángulo central en una circunferencia y abarca un arco cuya longitud es igual a la del radio. Su símbolo es **rad**.

* Podremos pasar de una unidad a otra con la equivalencia:

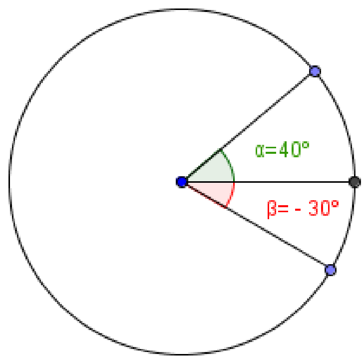
$$\boxed{180^\circ = \pi\ rad}$$

Ejemplo: ¿Cuántos grados son $\frac{\pi}{5}\ rad$?

$$\frac{180^\circ}{\pi\ rad}=\frac{x}{\frac{\pi}{5}\ rad}\Rightarrow x=\frac{180^\circ}{\cancel{\pi}\ \cancel{rad}}\cdot\frac{\cancel{\pi}}{5}\ \cancel{rad}=\frac{180^\circ}{5}=36^\circ$$

Ejemplo: ¿Cuántos radianes son 210° ?

$$\frac{180^\circ}{\pi\ rad}=\frac{210^\circ}{x}\Rightarrow x=\frac{210^\circ}{\frac{180^\circ}{\pi\ rad}}=\frac{21\cancel{0}^\circ\cdot\pi\ rad}{18\cancel{0}^\circ}=\frac{7\pi}{6}rad$$



Los ángulos positivos se miden en sentido antihorario y los negativos en sentido horario. Expresaremos los ángulos entre 0° y 360° (ó 0 rad y 2π rad).

* Si el ángulo es mayor que 360°, restar múltiplos de 360° hasta quedar en la primera vuelta (si está en radianes, 2π rad) o dividir el ángulo entre 360° y quedarnos con el resto.

Ejemplo: $380^\circ, 1240^\circ$

$$380^\circ=380^\circ-360^\circ=20^\circ$$

$$\begin{array}{l|l} 1240 & \underline{360} \\ 0160 & 3 \end{array}\quad\Rightarrow 1240^\circ=160^\circ$$

* Si el ángulo es negativo, sumar múltiplos de 360° hasta quedar en la primera vuelta (si está en radianes, 2π rad).

Ejemplo: -80°

$$-80^\circ=-80^\circ+360^\circ=280^\circ$$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS:

Resolver un triángulo es hallar todos sus ángulos y todos sus lados. Para ello, usaremos las siguientes fórmulas, según convenga:

* Ángulos: $\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ}$ (En cualquier triángulo)

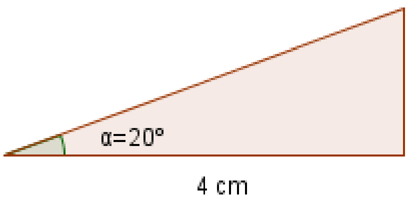
* Lados: TEOREMA DE PITÁGORAS (Sólo en triángulos rectángulos)

$$(hipotenusa)^2 = (cateto_1)^2 + (cateto_2)^2$$

* Ángulos y lados: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS (Sólo en triángulos rectángulos)

$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto\ a\ \alpha}{hipotenusa}$$
$$\cos\ \alpha = \frac{cateto\ contiguo\ a\ \alpha}{hipotenusa}$$
$$tag\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto\ a\ \alpha}{cateto\ contiguo\ a\ \alpha}$$

Ejemplo: Resolver el siguiente triángulo:



Conocemos dos ángulos y un lado.

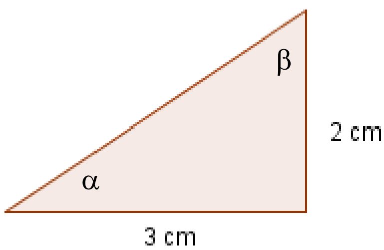
Al conocer dos ángulos, el tercero lo sacamos sabiendo que entre los tres suman 180°, con lo que debe ser 70°.

Para obtener los lados que nos faltan, usaremos las razones trigonométricas, pues no tenemos bastantes datos para aplicar el teorema de Pitágoras. Conocemos un ángulo y el cateto contiguo a ese ángulo, luego con la razón trigonométrica coseno obtendremos la hipotenusa y con la razón tangente conseguiremos el cateto opuesto al ángulo.

$$\cos\ \alpha = \frac{cateto\ contiguo\ a\ \alpha}{hipotenusa} \Rightarrow \cos 20^{\circ} = \frac{4\ cm}{hipotenusa} \Rightarrow hipotenusa = \frac{4\ cm}{\cos 20^{\circ}} = \frac{4\ cm}{0'94} = 4'25\ cm$$

$$tag\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto\ a\ \alpha}{cateto\ contiguo\ a\ \alpha} \Rightarrow tag\ 20^{\circ} = \frac{cateto\ opuesto\ a\ \alpha}{4\ cm} \Rightarrow cateto\ opuesto\ a\ \alpha = tag\ 20^{\circ} \cdot 4\ cm =$$
$$= 0'36 \cdot 4\ cm = 1'44\ cm$$

Ejemplo: Resolver el siguiente triángulo:



Conocemos dos lados y un ángulo (90°).

Al conocer dos lados, el tercero lo sacamos aplicando el teorema de Pitágoras:

$$(hipotenusa)^2 = (cateto_1)^2 + (cateto_2)^2$$

$$(hipotenusa)^2 = 2^2 + 3^2 \Rightarrow (hipotenusa)^2 = 13 \Rightarrow hipotenusa = \pm\sqrt{13} \ \textbf{(descartamos el negativo)}$$

$$hipotenusa = 3'61\,cm$$

Para obtener los ángulos que nos faltan, usaremos las razones trigonométricas, pues no tenemos bastantes datos para aplicar la relación entre los ángulos. Conocemos el cateto opuesto a un ángulo y el cateto contiguo a ese ángulo, luego con la razón trigonométrica tangente conseguiremos el ángulo.

$$tag\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto\ a\ \alpha}{cateto\ contiguo\ a\ \alpha} \Rightarrow tag\ \alpha = \frac{2\,cm}{3\,cm} \Rightarrow tag\ \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = arctag\,\frac{2}{3} = 33'69^{\circ} = 33^{\circ}41'24"$$

Para hallar el tercer ángulo, podemos aplicar otra razón trigonométrica o aplicar la relación entre los ángulos interiores de un triángulo, es decir:

Primera forma:

$$\cos\beta = \frac{cateto\ contiguo\ a\ \beta}{hipotenusa} \Rightarrow \cos\beta = \frac{2\,cm}{3'61\,cm} \Rightarrow \cos\beta = 0'55 \Rightarrow \beta = \arccos 0'55 = 56'31^{\circ} = 56^{\circ}18'36"$$

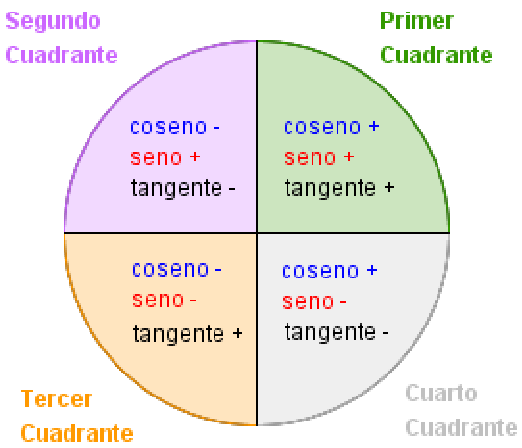
Segunda forma:

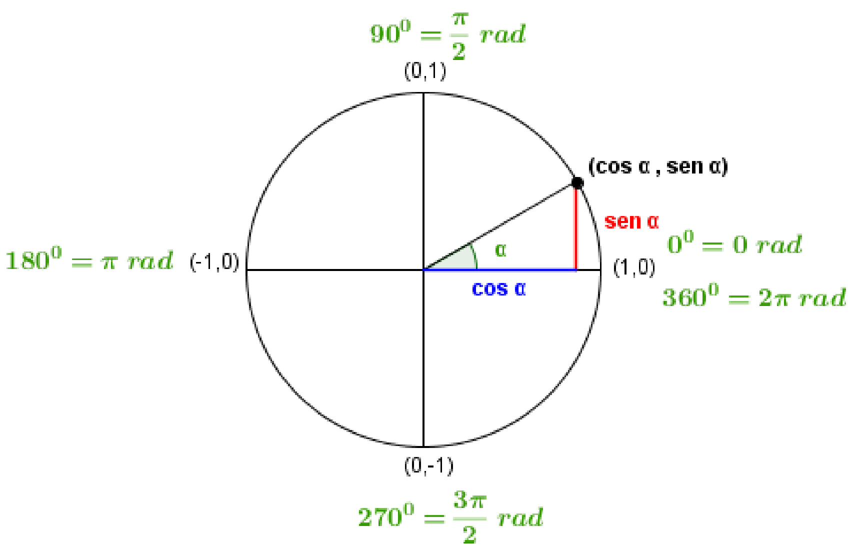
$$sen\ \beta = \frac{cateto\ opuesto\ a\ \beta}{hipotenusa} \Rightarrow sen\ \beta = \frac{3\,cm}{3'61\,cm} \Rightarrow sen\ \beta = 0'83 \Rightarrow \beta = \mathrm{arc}\,sen\ 0'83 = 56'31^{\circ} = 56^{\circ}18'36"$$

Tercera forma:

$$\alpha + \beta + 90 = 180 \Rightarrow \beta = 180 - 90 - \alpha \Rightarrow \beta = 90 - 33^{\circ}41'24" = 56^{\circ}18'36"$$

SIGNO DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS:





CÁLCULO DE TODAS LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS A PARTIR DE CONOCER UNA DE ELLAS:

Hay seis razones trigonométricas: $sen\,\alpha, \cos\alpha, tag\,\alpha$ y sus inversas ($\cos ec\,\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha}, sec\,\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \cot ag\,\alpha = \frac{1}{tag\,\alpha}$). Conocida una de ellas, conocemos su "pareja", invirtiendo ese valor.

Si sabemos una razón trigonométrica de un ángulo, podemos obtener el resto aplicando estas dos fórmulas:

TEOREMA FUNDAMENTAL DE TRIGONOMETRÍA: $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

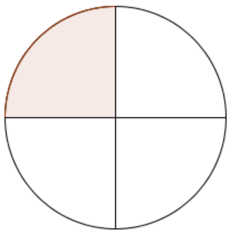
$$tag\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}$$

No olvidar que el signo de las razones trigonométricas depende del cuadrante en el que se encuentre el ángulo.

Ejemplo: Sabiendo que $sen\,\alpha = \frac{3}{5}$, con $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, hallar el resto de razones trigonométricas de α.

Conocido la razón seno, conocemos su "pareja" la cosecante, es decir, $sen\,\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos ec\,\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha} = \frac{5}{3}$

Sustituimos en las fórmulas (el teorema fundamental de trigonometría, pues en la otra tendríamos dos incógnitas):



$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$$

Para conocer el signo que corresponde a nuestra razón trigonométrica, nos fijamos en el cuadrante en el que está el ángulo. En este caso, el ángulo pertenece al segundo cuadrante, con lo que el coseno de ese ángulo debe ser negativo, luego:

$$\cos\alpha = -\frac{4}{5} \Rightarrow \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = -\frac{5}{4}$$

Aplicamos ahora la otra fórmula para hallar las razones que nos faltan:

$$tag\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow tag\,\alpha = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{-4}{5}} = \frac{-3}{4} \Rightarrow \cot ag\,\alpha = \frac{1}{tag\,\alpha} = -\frac{4}{3}$$

Ejemplo: Sabiendo que $tag\ \alpha = \frac{2}{3}$, con $180^o < \alpha < 270^o$, hallar el resto de razones trigonométricas de α.

Conocido la razón tangente, conocemos su "pareja" la cotangente, es decir, $tag\ \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \cot ag\ \alpha = \frac{1}{tag\ \alpha} = \frac{3}{2}$

Sustituimos en las fórmulas (en la tangente, pues en el teorema fundamental de trigonometría no aparecen ninguna de las razones que conocemos):

$$tag\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow sen\ \alpha = \frac{2}{3}\cdot\cos\alpha \qquad (*)$$

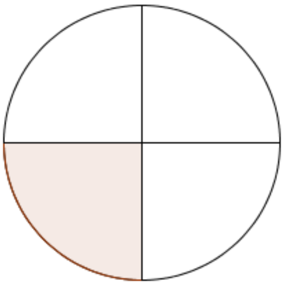
Sustituimos esa expresión en el teorema fundamental de trigonometría:

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\left(\frac{2}{3}\cdot\cos\alpha\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{4}{9}\cdot\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{13}{9}\cdot\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{9}{13} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{9}{13}} = \pm\frac{3}{\sqrt{13}} = \pm\frac{3\cdot\sqrt{13}}{13}$$

Para conocer el signo que corresponde a nuestra razón trigonométrica, nos fijamos en el cuadrante en el que está el ángulo. En este caso, el ángulo pertenece al tercer cuadrante, con lo que el coseno de ese ángulo debe ser negativo, luego:



$$\cos\alpha = -\frac{3\cdot\sqrt{13}}{13} \Rightarrow \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = -\frac{13}{3\cdot\sqrt{13}} = -\frac{\sqrt{13}}{3}$$

Sustituimos en (*):

$$sen\ \alpha = \frac{2}{3}\cdot\cos\alpha \Rightarrow sen\ \alpha = \frac{2}{\cancel{3}}\cdot\left(-\frac{\cancel{3}\cdot\sqrt{13}}{13}\right) = -\frac{2\cdot\sqrt{13}}{13}$$

Invertimos para obtener su pareja:

$$sen\ \alpha = -\frac{2\cdot\sqrt{13}}{13} \Rightarrow \cos ec\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha} = -\frac{13}{2\cdot\sqrt{13}} = -\frac{\sqrt{13}}{2}$$

Ejemplo: Sabiendo que $cotag\ \alpha = \frac{3}{2}$, con $180^o < \alpha < 270^o$, hallar el resto de razones trigonométricas de α.

Conocido la razón cotangente, conocemos su "pareja" la tangente, es decir, $cotag\ \alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow t\,ag\ \alpha = \frac{1}{cotag\ \alpha} = \frac{2}{3}$

Se corresponde con el ejemplo anterior.

CÁLCULO DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE NUEVOS ÁNGULOS A PARTIR DE CONOCER LAS DE UN ÁNGULO CONCRETO:

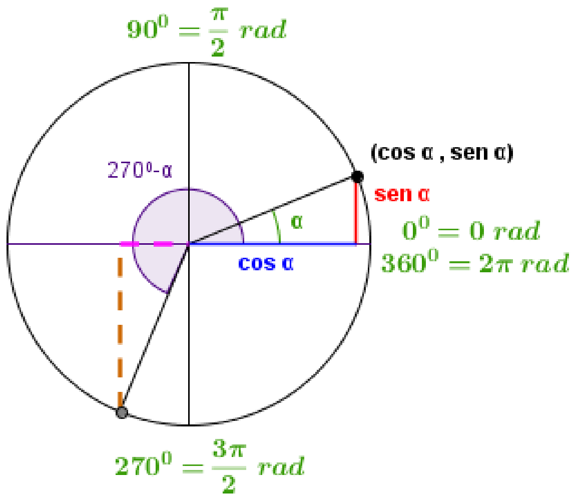
Si conocemos una razón trigonométrica del ángulo α, podremos averiguar las razones trigonométricas de los ángulos: $90 \pm \alpha, 180 \pm \alpha, 270 \pm \alpha, 360 \pm \alpha$.

Para ello, dibujar el ángulo conocido en el primer cuadrante (es más sencillo), marcando el seno y coseno de ese ángulo de forma diferenciada, y el nuevo ángulo donde corresponda.

Fijarse en el punto que determina sobre la circunferencia goniométrica el nuevo ángulo. El coseno de dicho ángulo se corresponde con la coordenada X (la horizontal) y el seno con la coordenada Y (la vertical). Relacionar esos valores con el seno y el coseno del ángulo conocido, teniendo en cuenta los signos.

Ejemplo: Expresar $tag\ (270^o - \alpha)$ en función de las razones trigonométricas del ángulo α .

$$tag\ (270^o - \alpha) = \frac{sen\ (270^o - \alpha)}{\cos\ (270^o - \alpha)} = \frac{-\cos \alpha}{-sen\ \alpha} = cotag\ \alpha$$



Ejemplo: Hallar $\cot g\ (210^o)$ sin usar la calculadora.

$$cotag\ (210^o) = \frac{\cos 210^o}{sen\ 210^o} = \frac{\cos\ (180^o + 30^o)}{sen\ (180^o + 30^o)} =$$

$$= \frac{\cos\ (180^o + 30^o)}{sen\ (180^o + 30^o)} = \frac{-\cos 30^o}{-sen\ 30^o} = cotag\ 30^o = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$