

5 Polinomios

ACTIVIDADES INICIALES

- 5.I. **Imagina la situación: dos equipos de mineros excavan desde puntos opuestos de una montaña y tienen que encontrarse. Haz un esquema, di qué mediciones harías tú y propón una solución al problema de Eupalinos.**

Pregunta abierta.

Se les puede guiar en su razonamiento indicándoles el uso de algún instrumento sencillo, como la brújula, el nivel...

- 5.II. **Localiza la isla de Samos y fijate en el nombre de sus principales ciudades. Una te recordará a un famoso matemático; averigua qué relación guarda con la isla.**

Samos es una isla griega cuya capital es Vathy.

Una de sus poblaciones es Pythagorio. Es un pintoresco centro turístico, dado que es un punto de partida para muchas excursiones marinas por la isla. Su nombre hace referencia a Pitágoras, el gran matemático del siglo VI a. C. nacido en Samos.

- 5.III. **Heródoto cita el túnel de Eupalinos como una de las tres obras más grandiosas del mundo griego. ¿Cuáles son las otras dos?**

Las otras dos obras son el muelle y el templo de Samos.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

- 5.1. **Actividad resuelta.**

- 5.2. **Los lados de un cuadrilátero miden 4, 8, 9 y 15 centímetros, respectivamente.**

¿Cuánto miden los lados de un cuadrilátero de perímetro 54 cm semejante al anterior?

La razón de semejanza es igual a la razón de los perímetros: $k = \frac{54}{4+8+9+15} = \frac{54}{36} = 1,5$

Por tanto:

El homólogo del lado de 4 cm mide $4 \cdot 1,5 = 6$ cm.

El homólogo del lado de 8 cm mide $8 \cdot 1,5 = 12$ cm.

El homólogo del lado de 9 cm mide $9 \cdot 1,5 = 13,5$ cm.

El homólogo del lado de 15 cm mide $15 \cdot 1,5 = 22,5$ cm.

- 5.3. **(TIC) Si la masa de una plancha de hierro es de 6,5 kg, ¿qué masa tendrá otra plancha del mismo metal y grosor si su ancho y su largo son el triple que los de la primera?**

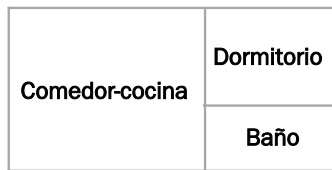
La razón de semejanza es $k = 3$. La razón de las áreas será $k^2 = 9$.

Al mantenerse el grosor, la masa de la segunda plancha será nueve veces la masa de la primera:

$$9 \cdot 6,5 = 58,5 \text{ kg}$$

5.4. Actividad resuelta.

5.5. El siguiente plano representa la distribución de un pequeño estudio.



0 1,5 3 metros

- a) Halla las dimensiones reales del comedor-cocina.
 b) Calcula el área total del estudio.
 c) Halla el porcentaje de la superficie que corresponde al dormitorio respecto del total.
 d)

- a) Según la escala gráfica, 1,5 cm del plano equivalen a 3 m en la realidad, por lo que 1 cm del plano se corresponde con 2 metros en la realidad.

Las dimensiones del comedor-cocina son:

$$2,3 \cdot 2 = 4,6 \text{ m} \quad 1,9 \cdot 2 = 3,8 \text{ m}$$

- b) El área total del estudio será:

$$S_T = (3,8 \cdot 2) \cdot (1,9 \cdot 2) = 28,88 \text{ m}^2$$

- c) $S_D = (1,5 \cdot 2) \cdot (1,1 \cdot 2) = 6,6 \text{ m}^2 \Rightarrow \frac{6,6}{28,88} \cdot 100 = 22,85 \%$

5.6. (TIC) La distancia más corta entre Córdoba y Valencia es de 421 kilómetros. ¿A qué distancia se encuentran sus representaciones en un mapa a escala 1:1 500 000?

En el mapa, un centímetro representa 15 km de la realidad.

La distancia que separa a las ciudades en el mapa es $\frac{421}{15} = 28,07 \text{ cm}$.

5.7. (TIC) La superficie de España es de 504 645 kilómetros cuadrados. ¿Qué área ocuparía en un mapa a escala 1:5 000 000?

En el mapa, un centímetro representa 50 km de la realidad, y un centímetro cuadrado representa 2500 km² de la realidad.

El área de España en el mapa es $\frac{504\,645}{2500} = 201,86 \text{ cm}^2$.

5.8. (TIC) Un arquitecto quiere representar un edificio con una planta de 150 por 50 metros en un DIN-A2 (que mide 59,4 por 42 centímetros).

¿Qué escala le recomendarías?

La medida de 150 m debe caber en 59,4 cm.

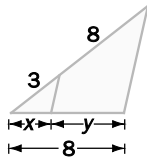
Por tanto, la escala podría ser: $\frac{15000}{59,4} = 252,5 \rightarrow \text{Escala } 1:255$.

5.9. Actividad interactiva.

5.10. Actividad resuelta.

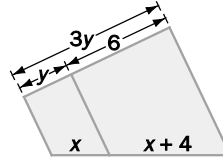
5.11. Calcula los lados desconocidos de las figuras.

a)



$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{3}{x} &= \frac{3+8}{8} \Rightarrow x = \frac{24}{11} \\ y &= 8 - x = 8 - \frac{24}{11} = \frac{64}{11} \end{aligned}$$

b)



$$\begin{aligned} \text{b)} \quad 3y &= y + 6 \Rightarrow y = 3 \\ \frac{3}{x} &= \frac{6}{x+4} \Rightarrow 3x + 12 = 6x \Rightarrow x = 4 \end{aligned}$$

5.12. (TIC) Juan mide 1,75 metros y proyecta, en un momento dado, una sombra de 1,4 metros.

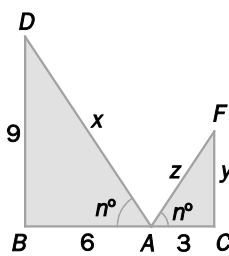
- a) Calcula la sombra que proyecta en ese instante un árbol de 4 metros de altura.
 b) Halla la altura de Elisa si en ese momento proyecta una sombra de 1,35 metros.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{1,75}{1,40} &= \frac{4}{x} \Rightarrow x = \frac{1,40 \cdot 4}{1,75} = 3,2 \text{ m} \\ \text{b)} \quad \frac{1,75}{1,40} &= \frac{x}{1,35} \Rightarrow x = \frac{1,35 \cdot 1,75}{1,40} = 1,69 \text{ m} \end{aligned}$$

5.13. Actividad resuelta.

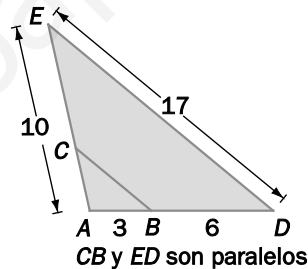
5.14. Razona si los triángulos siguientes son semejantes, indica los criterios utilizados y calcula los lados desconocidos.

a)



$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{9}{y} &= \frac{6}{3} \Rightarrow y = 4,5 \text{ cm} \\ \frac{9}{x} &= \frac{y}{z} \Rightarrow 9z = 4,5x \Rightarrow x = 2z \\ x &= \sqrt{9^2 + 6^2} = \sqrt{117} \text{ cm} \\ z &= \frac{\sqrt{117}}{2} \text{ cm} \end{aligned}$$

b)



$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \frac{3}{AC} &= \frac{6+3}{10} \Rightarrow AC = \frac{10}{3} \text{ cm} \\ \frac{9}{17} &= \frac{3}{BC} \Rightarrow BC = \frac{17}{3} \text{ cm} \\ CE &= 10 - \frac{10}{3} = \frac{20}{3} \text{ cm} \end{aligned}$$

5.15. ¿Los triángulos interior y exterior de un cartabón son semejantes? Razona tu respuesta.

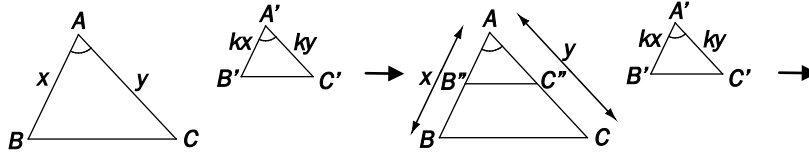
Sí, ya que los lados que los forman son paralelos y, por tanto, los ángulos correspondientes son iguales.

5.16. ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.

- a) Dos triángulos isósceles siempre son semejantes.
 b) Un triángulo rectángulo con un ángulo de 30° es semejante a otro con un ángulo de 60° .
 a) No, ya que los ángulos no tienen por qué ser iguales.
 b) Sí, ya que, en ambos casos, los ángulos son de 90° , 30° y 60° .

5.17. Siguiendo un razonamiento análogo al de la teoría, demuestra los criterios 2 y 3 de semejanza de triángulos.

Segundo criterio de semejanza de triángulos: Si dos triángulos tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales, los triángulos son semejantes.



Los triángulos ABC y $A'B'C'$ verifican que $\hat{A} = \hat{A}'$ y:

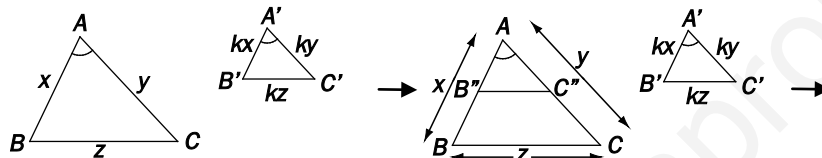
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Sobre el lado AB , se lleva B'' de forma que $A'B'' = A'B'$, y sobre el lado AC , el punto C'' tal que $A'C'' = A'C'$. Se traza el segmento $B''C''$, que resulta paralelo a BC , ya que se cumple el teorema de Tales.

- Los triángulos $AB''C''$ y $A'B'C'$ son iguales por tener dos lados iguales y un ángulo igual.
- Los triángulos ABC y $AB''C''$ están en posición de Tales y, por tanto, son semejantes.

En consecuencia, los triángulos ABC y $A'B'C'$ son también semejantes.

Tercer criterio de semejanza de triángulos: Si dos triángulos tienen los tres lados proporcionales, los triángulos son semejantes



Los triángulos ABC y $A'B'C'$ verifican que:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Sobre el lado AB se lleva B'' de forma que $A'B'' = A'B'$, y sobre el lado AC , el punto C'' , tal que $A'C'' = A'C'$. Se traza el segmento $B''C''$, que resulta paralelo a BC , ya que se cumple el teorema de Tales.

- Los triángulos $AB''C''$ y $A'B'C'$ son iguales, ya que tienen los tres lados iguales.
- Los triángulos ABC y $AB''C''$ están en posición de Tales y, por tanto, son semejantes.

En consecuencia, los triángulos ABC y $A'B'C'$ son también semejantes.

5.18. Actividad resuelta.

5.19. En un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide 7,5 metros, y su proyección sobre la hipotenusa, 4,5. ¿Cuánto mide la hipotenusa?

Se aplica el teorema del cateto: $7,5^2 = 4,5 \cdot a \Rightarrow a = \frac{7,5^2}{4,5} = 12,5 \text{ cm}$.

5.20. En un triángulo rectángulo, los catetos miden 27 y 36 centímetros, respectivamente.

- Halla las medidas de la hipotenusa y de las proyecciones de los catetos sobre ella.
- Halla el valor de la altura sobre la hipotenusa.

a) Por el teorema de Pitágoras: $a^2 = 27^2 + 36^2 = 2025 \Rightarrow a = \sqrt{2025} = 45 \text{ cm}$.

Gracias al teorema del cateto se calculan las proyecciones sobre la hipotenusa:

$$m = \frac{27^2}{45} = 16,2 \text{ cm}$$

$$n = \frac{36^2}{45} = 28,8 \text{ cm}$$

b) Gracias al teorema de la altura se calcula su medida:

$$h^2 = m \cdot n = 16,2 \cdot 28,8 = 466,56 \Rightarrow h = \sqrt{466,56} = 21,6 \text{ cm}$$

5.21. (TIC) En un triángulo rectángulo, la hipotenusa y un cateto miden 40 y 24 centímetros, respectivamente. Halla el otro cateto, las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa y la altura sobre ella.

Por el teorema de Pitágoras: $b^2 = 40^2 - 24^2 = 1024 \Rightarrow b = \sqrt{1024} = 32$ cm.

Con el teorema del cateto se calculan las proyecciones sobre la hipotenusa:

$$m = \frac{24^2}{45} = 14,4 \text{ cm} \qquad n = \frac{32^2}{45} = 25,6 \text{ cm}$$

Con el teorema de la altura se calcula su medida:

$$h^2 = m \cdot n = 14,4 \cdot 25,6 = 368,64 \Rightarrow h = \sqrt{368,64} = 19,2 \text{ cm}$$

5.22. Un cateto de un triángulo rectángulo mide 8 centímetros, y la altura sobre la hipotenusa, 4. Halla el área del triángulo.

Por el teorema de la altura: $16 = m \cdot n \Rightarrow m = \frac{16}{n}$

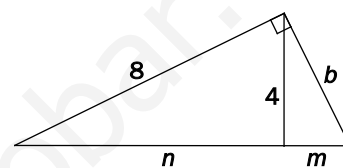
Por el teorema del cateto:

$$64 = n \cdot (m + n) \Rightarrow 64 = n \cdot \left(\frac{16}{n} + n \right) = 16 + n^2 \Rightarrow n^2 = 48 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \sqrt{48} = 4\sqrt{3};$$

$$m = \frac{16}{4\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a = m + n = 4\sqrt{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Superficie} = \frac{a \cdot 4}{2} = \frac{16\sqrt{3}}{3} \cdot 2 = \frac{32\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^2$$

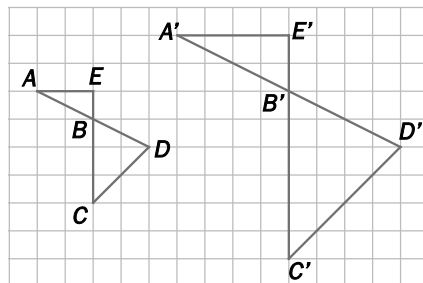


5.23. Actividad interactiva.

EJERCICIOS

Figuras semejantes. Triángulos semejantes

5.24. Comprueba que las siguientes figuras son semejantes y calcula la razón de semejanza.



Todos los ángulos homólogos son iguales, ya que los lados que los forman son paralelos.

Por otra parte, los lados correspondientes son proporcionales, ya que:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'B'}{DB} = \frac{B'E'}{BE} = \frac{E'A'}{EA} = 2$$

Por tanto, las figuras son semejantes con razón 2.

5.25. Las siguientes parejas de triángulos son semejantes. Calcula la razón de semejanza y los valores de los lados desconocidos.

- a) (3, 4, 6) y (4,5; x, y) centímetros
 b) (x, 4, 3) y (2, 2, y) centímetros
 c) (2, x, 6) e (y, 2x, z) centímetros

a) La razón de semejanza es $\frac{4,5}{3} = 1,5$. Por tanto:

$$\frac{x}{4} = 1,5 \Rightarrow x = 4 \cdot 1,5 = 6$$

$$\frac{y}{6} = 1,5 \Rightarrow y = 6 \cdot 1,5 = 9$$

b) La razón de semejanza es $\frac{2}{4} = 0,5$. Por tanto:

$$\frac{2}{x} = 0,5 \Rightarrow x = \frac{2}{0,5} = 4$$

$$\frac{y}{3} = 0,5 \Rightarrow y = 3 \cdot 0,5 = 1,5$$

c) La razón de semejanza es $\frac{2x}{x} = 2$. Por tanto:

$$\frac{y}{2} = 2 \Rightarrow y = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\frac{z}{6} = 2 \Rightarrow z = 6 \cdot 2 = 12$$

En este caso, el valor de x puede ser cualquier número real con la única restricción de que con él se pueda formar efectivamente triángulo, es decir, $4 < x < 8$.

5.26. En los siguientes casos se conocen las medidas de dos ángulos de cada uno de los dos triángulos. Indica cuáles son semejantes y cuáles no.

- a) 50° , 40° y 90° , 40°
 b) 50° , 40° y 40° , 30°
 c) 40° , 40° y 100° , 40°

- a) El tercer ángulo del primer triángulo debe medir $180^\circ - 50^\circ - 40^\circ = 90^\circ$. Por tanto, los dos triángulos tienen todos sus ángulos iguales y son semejantes.
 b) El tercer ángulo del primer triángulo debe medir $180^\circ - 50^\circ - 40^\circ = 90^\circ$. Por tanto, los dos triángulos tienen sus ángulos diferentes y no son semejantes.
 c) El tercer ángulo del primer triángulo debe medir $180^\circ - 40^\circ - 40^\circ = 100^\circ$. Por tanto, los dos triángulos tienen todos sus ángulos iguales y son semejantes.

5.27. El perímetro de un triángulo equilátero mide 30 centímetros.

a) Halla las medidas de los lados de un triángulo equilátero semejante a él si la razón de semejanza es $k = \frac{1}{2}$.

b) ¿Cuál es la razón de sus áreas?

a) Lado = 10 cm. $l' = l \cdot k = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$ cm

b) La razón entre las áreas es el cuadrado de la razón de semejanza:

$$\frac{A'}{A} = k^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

5.28. (TIC) Calcula las longitudes de los lados de un triángulo semejante a otro que tiene por lados 3, 12 y 10 centímetros si la razón de semejanza es $k = \frac{25}{4}$.

$k = \frac{25}{4}$ es la razón de semejanza. Por tanto:

$$a' = a \cdot k = 3 \cdot \frac{25}{4} = \frac{75}{4} = 18,75 \text{ cm}$$

$$b' = b \cdot k = 12 \cdot \frac{25}{4} = 75 \text{ cm}$$

$$c' = c \cdot k = 10 \cdot \frac{25}{4} = \frac{125}{2} = 62,5 \text{ cm}$$

5.29. La arista de un cubo mide 8 metros. Halla la medida de la arista de otro cubo semejante si la razón de sus volúmenes es $k = \frac{1}{27}$.

La razón entre los volúmenes es k^3 : $\frac{V'}{V} = k^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow k = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$ es la razón de semejanza.

Por tanto: $a' = a \cdot k = 8 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3} = 2,67 \text{ cm}$

5.30. Los catetos de un triángulo rectángulo isósceles miden 30 centímetros. Calcula el perímetro de un triángulo semejante a él con razón de semejanza $k = \frac{1}{6}$.

Por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa mide: $x = \sqrt{30^2 + 30^2} = \sqrt{1800} \text{ cm}$.

Por tanto, el perímetro mide $p = 2 \cdot 30 + \sqrt{1800} = 60 + \sqrt{1800} \text{ cm}$.

$$\frac{p'}{p} = k = \frac{1}{6} \Rightarrow p' = \frac{1}{6} \cdot (60 + \sqrt{1800}) = \frac{60 + \sqrt{1800}}{6} = 10 + 5\sqrt{2} = 17,07 \text{ cm}$$

5.31. (TIC) Las medidas de los lados de un pentágono son 3, 7, 8, 10 y 12 centímetros, respectivamente. Calcula las medidas de los lados de otro pentágono semejante al anterior y tal que:

a) Su lado mayor mida 18 centímetros. b) Su perímetro sea de 60 centímetros.

a) La razón de semejanza es igual a la razón entre los lados mayores: $k = \frac{18}{12} = 1,5$.

Por tanto, los lados homólogos miden:

Del lado de 3 cm: $3k = 3 \cdot 1,5 = 4,5 \text{ cm}$. Del lado de 8 cm: $8k = 8 \cdot 1,5 = 12 \text{ cm}$.

Del lado de 7 cm: $7k = 7 \cdot 1,5 = 10,5 \text{ cm}$. Del lado de 10 cm: $10k = 10 \cdot 1,5 = 15 \text{ cm}$.

b) Se trata del mismo pentágono del apartado anterior.

5.32. (TIC) Las medidas de un rectángulo son 3 y 5 centímetros. Calcula las medidas de otro rectángulo semejante al anterior y tal que su perímetro mida 40 centímetros.

La razón de semejanza es igual a la razón de los perímetros: $k = \frac{40}{3+5+3+5} = \frac{40}{16} = 2,5$.

Por tanto, los lados homólogos miden:

Del lado de 3 cm: $3k = 3 \cdot 2,5 = 7,5 \text{ cm}$.

Del lado de 5 cm: $5k = 5 \cdot 2,5 = 12,5 \text{ cm}$.

- 5.33. (TIC) Las medidas de un rectángulo son 3 y 5 centímetros. Calcula las medidas de otro rectángulo semejante al anterior y tal que su área mida 21,6 centímetros cuadrados.

La razón de semejanza es igual a la raíz cuadrada de la razón de las áreas: $k = \sqrt{\frac{21,6}{3 \cdot 5}} = \sqrt{1,44} = 1,2$.

Por tanto, los lados homólogos miden:

Del lado de 3 cm: $3k = 3 \cdot 1,2 = 3,6$ cm.

Del lado de 5 cm: $5k = 5 \cdot 1,2 = 6$ cm.

- 5.34. (TIC) Un triángulo rectángulo tiene por catetos 5 y 12 centímetros. Halla la hipotenusa de otro triángulo semejante al anterior sabiendo que su área es de 46,875 centímetros cuadrados.

La hipotenusa del triángulo inicial mide $\sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ cm.

El área del triángulo inicial mide $S = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30$ cm².

La razón entre las áreas vale $k^2 = \frac{46,875}{30} = 1,5625$.

La razón de semejanza de los dos triángulos será $k = \sqrt{1,5625} = 1,25$.

La hipotenusa del segundo triángulo medirá $13k = 13 \cdot 1,25 = 16,25$ cm.

- 5.35. ¿Verdadero o falso? Razona tu respuesta.

- Todos los cuadrados son semejantes.
 - Todos los rectángulos son semejantes.
 - Todos los triángulos equiláteros son semejantes.
 - Todos los triángulos rectángulos son semejantes.
 - Todos los triángulos isósceles son semejantes.
 - Todos los triángulos que son a la vez rectángulos e isósceles son semejantes.
 - Todos los pentágonos regulares son semejantes.
 - Los ángulos de dos triángulos semejantes son proporcionales.
 - Si dos triángulos rectángulos tienen cada uno un ángulo de 66°, son semejantes.
 - Dos triángulos rectángulos con los catetos proporcionales son semejantes.
 - Los polígonos iguales son semejantes con razón de semejanza 1.
 - Todas las circunferencias son semejantes.
- Verdadero. Todos los ángulos son rectos y los lados son proporcionales.
 - Falso. Aunque todos los ángulos son iguales, los lados no tienen por qué ser proporcionales. Por ejemplo, los rectángulos de lados 1 y 2 cm y 1 y 3 cm.
 - Verdadero. Todos los ángulos son de 60° y, por tanto, iguales, y los lados correspondientes son proporcionales ya que en cada triángulo los lados son iguales.
 - Falso. Ni siquiera han de tener los ángulos iguales.
 - Falso. Ni siquiera han de tener los ángulos iguales.
 - Verdadero. Los ángulos correspondientes son iguales, ya que en todos los casos miden 90°, 45° y 45°, y los lados correspondientes son proporcionales, pues son de la forma x , x , $x\sqrt{2}$.
 - Verdadero. Todos los ángulos son iguales a $\frac{(5-2) \cdot 180}{5} = 108^\circ$ (recuérdese que la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $(n-2) \cdot 180^\circ$). Por otra parte, los lados correspondientes son proporcionales, ya que en cada pentágono regular los lados son iguales.
 - Sí, con constante de proporcionalidad 1 (los ángulos homólogos son iguales).
 - Sí, ya que los ángulos son iguales: 90°, 66° y 22°.
 - Sí, ya que tiene un ángulo igual (90°), y los lados que lo forman, proporcionales.
 - Sí, los ángulos homólogos son iguales, y los lados homólogos, proporcionales con constante de proporcionalidad 1.
 - Sí, tienen la misma forma.

5.36. Elige la respuesta correcta.

- a) Dos triángulos son semejantes y la razón de semejanza es 3. Uno de ellos tiene un área de 6 unidades cuadradas. ¿Cuántas corresponden al área del otro?
 i) 18 ii) 54 iii) 108
- b) Dos prismas son semejantes y la razón de semejanza es 2. Uno de ellos tiene un volumen de 10 unidades cúbicas. ¿Cuántas corresponden al volumen del otro?
 i) 40 ii) 200 iii) 80
- a) Razón de semejanza: $k = 3$; razón de áreas: $k^2 = 9$.
 La respuesta es el apartado ii, ya que $54 \text{ u}^2 = 9 \cdot 6 \text{ u}^2$.
- b) Razón de semejanza: $k = 2$; razón de volúmenes $k^3 = 8$.
 La respuesta es el apartado iii, ya que $80 \text{ u}^3 = 8 \cdot 10 \text{ u}^3$.

5.37. Si A y B son dos pentágonos regulares, ¿cuáles de las siguientes igualdades son ciertas?

- a) $\frac{\text{Perímetro de A}}{\text{Perímetro de B}} = \frac{\text{Apotema de A}}{\text{Apotema de B}}$
- b) $\frac{\text{Perímetro de A}}{\text{Perímetro de B}} = \frac{\text{Área de A}}{\text{Área de B}}$
- c) $\frac{\text{Perímetro de A}}{\text{Perímetro de B}} = \frac{\text{Diagonal de A}}{\text{Diagonal de B}}$

a y c son verdaderas, ya que relacionan longitudes.

b es falsa, ya que la razón de semejanza de las superficies es el cuadrado de la razón de longitudes.

5.38. Un patio circular tiene 200 metros cuadrados de superficie. Si el radio se triplicase, ¿se triplicaría también el área? Razona tu respuesta.

Área $A = \pi \cdot r^2 = 200 \text{ m}^2$

Área $A = \pi \cdot (3r)^2 = 9\pi r^2 = 9 \cdot 200 = 1800 \text{ m}^2$

La superficie se multiplica por 3^2 , que es la razón de las áreas de figuras con razón de semejanza 3.

5.39. (TIC) Se quiere una fotocopia reducida de un dibujo rectangular de 35 por 15 centímetros. ¿Qué porcentaje de reducción se debe aplicar para que el área de la copia sea de 250 centímetros cuadrados?

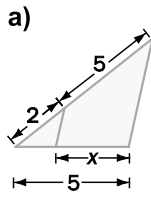
El área del dibujo inicial es $35 \cdot 15 = 525 \text{ cm}^2$

Razón de las áreas $\frac{250}{525} = 0,4762$. Razón de semejanza $\sqrt{0,4762} = 0,69$

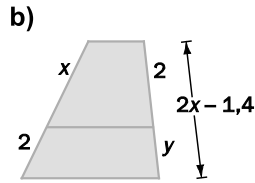
El porcentaje de reducción será del 31 %.

Teorema de Tales

5.40. (TIC) Calcula el valor de las variables en las siguientes figuras.



$$a) \frac{2+5}{5} = \frac{5}{x} \Rightarrow 7x = 25 \Rightarrow x = \frac{25}{7} = 3,57$$



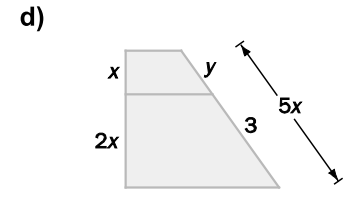
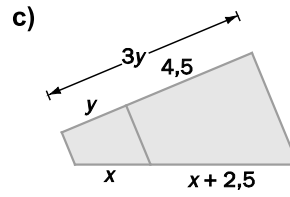
$$b) y + 4,5 = 3y \Rightarrow 2y = 4,5 \Rightarrow y = \frac{4,5}{2} = 2,25$$

$$\frac{x}{2,25} = \frac{x+2,5}{4,5} \Rightarrow 4,5x = 2,25x + 5,625 \Rightarrow x = 2,5$$

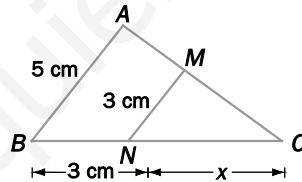
$$c) \frac{x}{2} = \frac{x+2}{2x-1,4} \Rightarrow 2x^2 - 1,4x = 2x + 4 \Rightarrow 2x^2 - 3,4x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{3,4 + 6,6}{4} = 2,5$$

$$\frac{2,5}{2} = \frac{2}{y} \Rightarrow y = \frac{4}{2,5} = 1,6$$

$$d) \frac{3x}{5x} = \frac{2x}{3} \Rightarrow x = 0,9; \quad y = 5 \cdot 0,9 - 3 = 1,5$$



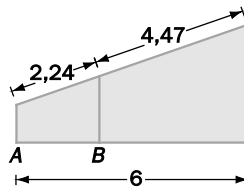
5.41. Si los segmentos AB y MN son paralelos, halla la medida del lado BC .



$$\frac{5}{3} = \frac{x+3}{x} \Rightarrow 5x = 3x + 9 \Rightarrow 2x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ cm}$$

$$BC = 3 + 4,5 = 7,5 \text{ cm}$$

5.42. Calcula la longitud del segmento AB .



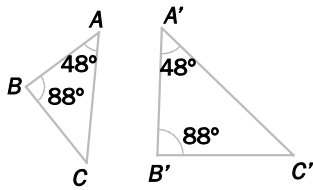
Aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{2,24 + 4,47}{6} = \frac{2,24}{AB} \Rightarrow AB = \frac{6 \cdot 2,24}{6,71} = \frac{13,44}{6,71} = 2$$

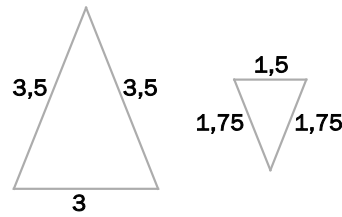
Criterios de semejanza de triángulos

5.43. Utilizando alguno de los criterios de semejanza, demuestra que las siguientes parejas de triángulos son semejantes.

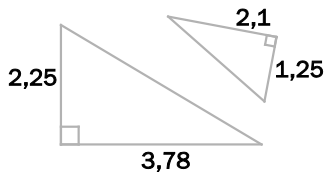
a)



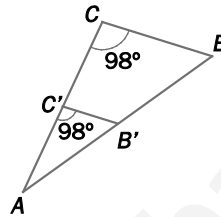
c)



b)



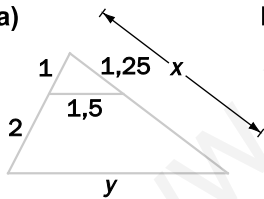
d)



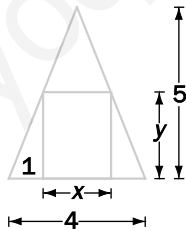
- a) Primer criterio: los triángulos tienen dos ángulos iguales.
- b) Segundo criterio: los triángulos tienen un ángulo igual, y los lados que lo forman, proporcionales, ya que $\frac{3,78}{2,1} = \frac{2,25}{1,25} = 1,8$.
- c) Tercer criterio: todos los lados son proporcionales, ya que: $\frac{3}{1,5} = \frac{3,5}{1,75} = \frac{3,5}{1,75} = 2$.
- d) Son semejantes, ya que están en posición de Tales.

5.44. Utilizando los criterios de semejanza, encuentra triángulos semejantes en las siguientes figuras y calcula el valor de los segmentos desconocidos.

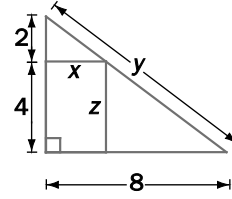
a)



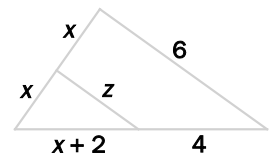
b)



c)



d)



- a) $\frac{1}{1,5} = \frac{3}{y} \Rightarrow y = 4,5$ $\frac{1}{1,25} = \frac{3}{x} \Rightarrow x = 3,75$
- b) $\frac{5}{4} = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 2,5$ $x = 2$
- c) $\frac{2}{x} = \frac{6}{8} \Rightarrow x = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$ $y = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ $z = 4$
- d) $\begin{cases} \frac{x}{x+2} = \frac{2x}{x+6} \Rightarrow \frac{1}{x+2} = \frac{2}{x+6} \Rightarrow x+6 = 2x+4 \Rightarrow x = 2 \\ \frac{x}{z} = \frac{2x}{6} \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{2}{6} \Rightarrow z = \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$

Consecuencias de los criterios de semejanza

- 5.45. (TIC) En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 125 milímetros. Calcula el valor de uno de los catetos sabiendo que su proyección sobre la hipotenusa mide 45 milímetros.

Por el teorema del cateto:

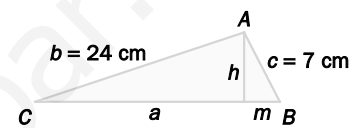
$$b^2 = n \cdot a \Rightarrow b^2 = 45 \cdot 125 = 5625 \Rightarrow b = \sqrt{5625} = 75 \text{ mm.}$$

- 5.46. (TIC) En un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide 54 decímetros, y su proyección sobre la hipotenusa, 32,4. Calcula la medida de la hipotenusa.

Por el teorema del cateto:

$$b^2 = n \cdot a \Rightarrow 54^2 = a \cdot 32,4 \Rightarrow a = \frac{54^2}{32,4} = \frac{2916}{32,4} = 90 \text{ dm}$$

- 5.47. (TIC) En un triángulo rectángulo, los catetos miden 24 y 7 centímetros, respectivamente. Calcula el valor de la hipotenusa y las medidas de las proyecciones de los catetos sobre ella. Calcula también el valor de la altura sobre la hipotenusa.



Por el teorema de Pitágoras se calcula la hipotenusa:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 24^2 + 7^2 = 576 + 49 = 625 \Rightarrow a = \sqrt{625} = 25 \text{ cm}$$

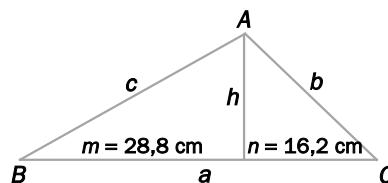
Por el teorema del cateto se calculan las proyecciones sobre la hipotenusa:

$$\begin{cases} b^2 = n \cdot a \Rightarrow 576 = 25n \Rightarrow n = \frac{576}{25} = 23,04 \text{ cm} \\ c^2 = m \cdot a \Rightarrow 49 = 25m \Rightarrow m = \frac{49}{25} = 1,96 \text{ cm} \end{cases}$$

Por el teorema de la altura se calcula la altura sobre la hipotenusa:

$$h^2 = m \cdot n = 23,04 \cdot 1,96 = 45,1584 \Rightarrow h = \sqrt{45,1584} = 6,72 \text{ cm}$$

- 5.48. (TIC) En el siguiente triángulo rectángulo en A, calcula la medida de los segmentos desconocidos.



Por el teorema de la altura:

$$h^2 = m \cdot n = 28,8 \cdot 16,2 = 466,56 \Rightarrow h = \sqrt{466,56} = 21,6 \text{ cm ;}$$

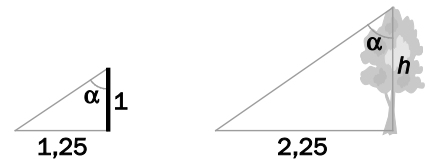
$$a = m + n = 28,8 + 16,2 = 45 \text{ cm}$$

Por el teorema del cateto:

$$\begin{cases} b^2 = n \cdot a \Rightarrow b^2 = 16,2 \cdot 45 = 729 \Rightarrow b = \sqrt{729} = 27 \text{ cm} \\ c^2 = m \cdot a \Rightarrow c^2 = 28,8 \cdot 45 = 1296 \Rightarrow c = \sqrt{1296} = 36 \text{ cm} \end{cases}$$

PROBLEMAS

- 5.49. (TIC) La sombra de un árbol es de 2,25 metros y, en ese mismo momento, la sombra de un palo de 1 metro de altura es de 1,25 metros. Calcula la altura del árbol.



Dado que en un mismo instante, la inclinación α de los rayos solares es la misma, los triángulos de la figura son semejantes, ya que cumplen el primer criterio de semejanza (dos ángulos iguales).

En consecuencia, los lados han de ser proporcionales: $\frac{1}{h} = \frac{1,25}{2,25} \Rightarrow h = \frac{2,25}{1,25} = 1,8$ metros.

- 5.50. (TIC) En un mapa que representa una zona de montaña se indica que la escala es de 1:25 000. Calcula la distancia real que separa dos refugios si en el mapa están separados por 3,5 centímetros.

En el mapa, un centímetro representa 25 000 cm = 0,25 km de la realidad.

Los 3,5 cm del plano se corresponden con $3,5 \cdot 0,25 = 0,875$ km = 875 m.

- 5.51. (TIC) La distancia entre dos ciudades es de 320 kilómetros. Calcula la distancia que separa ambas ciudades en un mapa con escala 1:1 125 000.

En el mapa, un centímetro representa 11,25 km de la realidad.

La distancia que separa a las ciudades en el mapa es $\frac{320}{11,25} = 28,44$ cm.

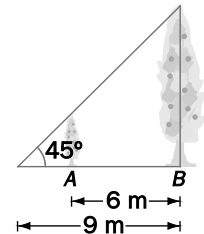
- 5.52. Calcula la distancia que debe recorrer un pájaro que quiere volar desde la copa del árbol A a la del B.

La distancia que se quiere calcular es CD .

Se calcula primero el valor de OC , mediante el teorema de Pitágoras:

$$OC = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ m}$$

Gracias al teorema de Tales: $\frac{3\sqrt{2}}{3} = \frac{CD}{6} \Rightarrow CD = 6\sqrt{2} = 8,5$ m



- 5.53. (TIC) El logotipo de una empresa tiene la forma de un hexágono cuyos lados miden 3, 4, 5, 7, 8 y 9 centímetros. En los carteles publicitarios se quiere dibujar un hexágono semejante de 117 centímetros de perímetro. ¿Cuánto miden los lados homólogos?

Perímetro del hexágono pequeño = $3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9 = 36$ cm. Razón $k = \frac{117}{36} = 3,25$

Lados del hexágono grande:

$$3 \cdot 3,25 = 9,75 \text{ cm}$$

$$4 \cdot 3,25 = 13 \text{ cm}$$

$$5 \cdot 3,25 = 16,25 \text{ cm}$$

$$7 \cdot 3,25 = 22,75 \text{ cm}$$

$$8 \cdot 3,25 = 26 \text{ cm}$$

$$9 \cdot 3,25 = 29,25 \text{ cm}$$

- 5.54. En el plano de una vivienda en construcción aparece dibujado un salón rectangular de 13,5 centímetros cuadrados. Si la escala del plano es de 1:150, ¿cuál es el área real del salón?

La escala es 1:150, por lo que la razón es $k = 150 : 1 = 150$.

$$\text{Área real} = (150)^2 \cdot 13,5 = 22\,500 \cdot 13,5 = 303\,750 \text{ cm}^2 = 30,375 \text{ m}^2$$

- 5.55. (TIC) Las alturas de Mónica y su madre en una fotografía, cuya escala es de 1:75, son 2,08 y 2,2 centímetros, respectivamente. Si encargan una ampliación de un 25% en las dimensiones de la fotografía, ¿cuánto medirán las dos en ella? ¿Cuál es la escala?

Altura de Mónica en la ampliación: $2,08 \cdot 1,25 = 2,6$ cm

Altura de la madre en la ampliación: $2,2 \cdot 1,25 = 2,75$ cm

Escala de la ampliación: $\frac{75}{1,25} = 60 \Rightarrow 1:60$

- 5.56. Los bomberos de una comarca emiten un informe sobre el número de hectáreas quemadas en el último incendio. En un mapa de escala 1:60 000, la zona afectada tiene una superficie de 8 centímetros cuadrados. ¿Cuál es el resultado del informe?

Razón $k = \frac{60\,000}{1} = 60\,000$

Área real = $(60\,000)^2 \cdot 8 = 28\,800\,000\,000$ cm² = $288\,000\,000$ m² = 288 km²

- 5.57. (TIC) Un arquitecto construye una maqueta de un centro de exposiciones cuya planta es un rectángulo de 90 por 50 centímetros y cuyo volumen es de 350 000 centímetros cúbicos. Si la escala de la maqueta es de 1:150, calcula las dimensiones reales de la planta y el volumen del edificio.

Largo de la planta real: $90 \cdot 150 = 13\,500$ cm = 135 m

Ancho de la planta real: $50 \cdot 150 = 7\,500$ cm = 75 m

Volumen real del edificio: $(150)^3 \cdot 0,35$ m³ = $1\,181\,250$ m³

- 5.58. (TIC) Un estudiante de Bellas Artes desea trabajar en una figura a escala del *David* de Miguel Ángel cuya altura es de 60 centímetros.

Si el auténtico *David* mide 4,34 metros de altura y tiene un volumen de 1,2 metros cúbicos, ¿cuál será el volumen de la figura esculpida por el estudiante?

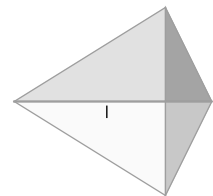
Razón de semejanza: $k = \frac{60}{434} \Rightarrow$ Volumen de la figura: $\left(\frac{60}{434}\right)^3 \cdot 1,2$ m³ = $0,0032$ m³

- 5.59. (TIC) En un mapa de escala 1:50 000, la distancia que separa los dos extremos de un camino recto es de 6,5 centímetros. ¿Cuánto tiempo tardará una persona que quiere realizar dicho camino andando a una velocidad de 5 km/h?

1 cm del mapa se corresponde con 50 000 cm = $0,5$ km de la realidad.

Por tanto, el tiempo que se tardará en recorrer el camino será: $\frac{6,5 \cdot 0,5}{5} = 0,65$ horas = 39 minutos.

- 5.60. (TIC) Se quiere construir una cometa utilizando trozos de tela con forma de triángulo rectángulo. Para ello, se cortan los triángulos por la altura sobre la hipotenusa de forma que esta se divide en dos segmentos de 30 y 50 centímetros, respectivamente. ¿Qué área deben tener los triángulos originales?



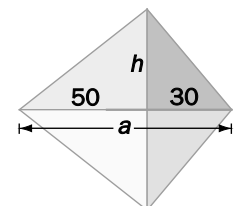
Los segmentos de 30 y 50 cm son las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa. Con el teorema de la altura podemos calcular la altura sobre la hipotenusa de los triángulos originales.

$$h^2 = m \cdot n = 50 \cdot 30 = 1500 \Rightarrow h = \sqrt{1500} = 10\sqrt{15}$$

$$a = m + n = 30 + 50 = 80$$

El área de los triángulos es:

$$A = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{80 \cdot 10\sqrt{15}}{2} = 400\sqrt{15} = 1549,2$$



5.61. (TIC) Una tienda de fotografía ofrece varios tamaños para realizar copias en papel. Las posibles dimensiones en centímetros son:

$$9 \times 12 \quad 12 \times 15 \quad 14 \times 18 \quad 20 \times 30$$

¿En cuál de ellos se pierde menos contenido de la fotografía si el tamaño de la figura digital original es de 25×35 milímetros?

Si las dimensiones de los formatos no son semejantes a las de la fotografía, siempre se perderá algo de la imagen. El formato que más se asemeje a la razón entre dimensiones será el que más aproveche la imagen.

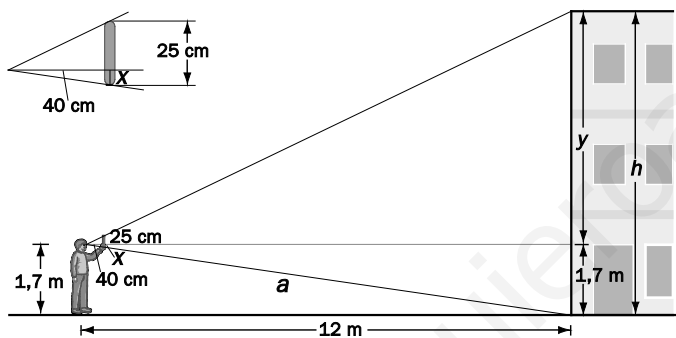
La razón entre dimensiones de la fotografía original es: $\frac{25}{35} = \frac{5}{7} = 0,71$.

Las razones entre las dimensiones de las copias son:

$$\frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0,75 \quad \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0,8 \quad \frac{14}{18} = \frac{7}{9} = 0,78 \quad \frac{20}{30} = \frac{2}{3} = 0,67$$

Con lo cual, los formatos de 9×12 y de 20×30 son los que más aprovechan el tamaño de la imagen.

5.62. (TIC) Para realizar prácticas de óptica, un estudiante que mide 1,70 metros, situado a 12 metros de un edificio, coloca frente a sus ojos una regla vertical de 25 centímetros con la que oculta exactamente la altura del mismo. Si la distancia del ojo a la regla es de 40 centímetros, calcula la altura del edificio.



Los triángulos que forman la regla y el edificio son semejantes, ya que se encuentran en posición de Tales.

Mediante el teorema de Pitágoras calculamos la distancia a :

$$a = \sqrt{1,7^2 + 12^2} = 12,12 \text{ m}$$

Los dos triángulos inferiores también son semejantes entre sí, por lo que podemos calcular x mediante el teorema de Tales.

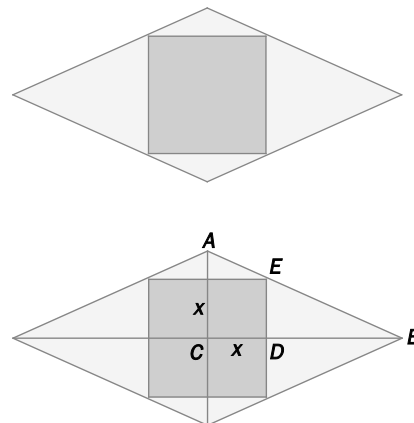
$$\frac{12}{1,7} = \frac{0,4}{x} \Rightarrow x = \frac{1,7 \cdot 0,4}{12} = 0,057$$

Aplicamos el teorema de Tales a los dos triángulos superiores para calcular el valor de y :

$$\frac{12}{y} = \frac{0,4}{0,25 - x} \Rightarrow \frac{12}{y} = \frac{0,4}{0,193} \Rightarrow y = \frac{12 \cdot 0,193}{0,4} = 5,8 \text{ m}$$

La altura del edificio es: $h = 5,8 + 1,7 = 7,5 \text{ m}$.

5.63. (TIC) Se quieren fabricar losetas como las de la figura que estén formadas por un rombo de diagonales 18,1 y 8,36 centímetros, respectivamente, y un cuadrado inscrito en él. Calcula el área de la zona oscura y la suma de las áreas de las zonas claras.



Los triángulos ABC y DEC son semejantes. Por tanto:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{DE}{DB} \Rightarrow \frac{4,18}{9,05} = \frac{x}{9,05 - x} \Rightarrow 37,829 - 4,18x = 9,05x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{37,829}{13,23} = 2,86 \text{ cm}$$

$$\text{Área oscura: } (2 \cdot 2,86)^2 = 32,7 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área clara: } \frac{18,10 \cdot 8,36}{2} - 32,7 = 42,96 \text{ cm}^2$$

AMPLIACIÓN

5.64. Si un arco de 60° en un círculo A tiene la misma longitud que un arco de 45° en un círculo B , el cociente entre el área de A y el área de B es:

- a) $\frac{16}{9}$ b) $\frac{9}{16}$ c) $\frac{4}{3}$ d) $\frac{3}{4}$

Llamando r_A y r_B a los radios de los círculos A y B , nos dicen que $\frac{2\pi r_A}{6} = \frac{2\pi r_B}{8} \Rightarrow \frac{r_A}{r_B} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

El cociente entre las áreas será: $\frac{A_A}{A_B} = \frac{\pi r_A^2}{\pi r_B^2} = \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$, la respuesta b.

5.65. Se trazan 9 paralelas a la base de un triángulo que dividen cada uno de los otros dos lados en 10 segmentos iguales y el área en 10 trapezios de diferentes áreas. Si el área del mayor de estos trapezios es 38, el área del triángulo original es:

- a) 180 b) 190 c) 200 d) 210

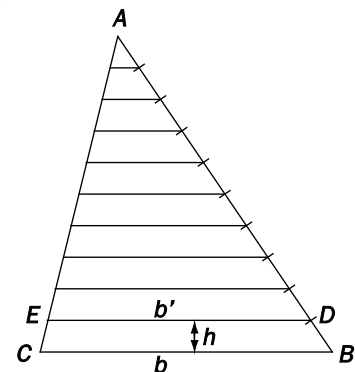
Llamando b y b' a las bases del trapezio mayor y h a su altura, se tiene que b es la base del triángulo, y $10h$, su altura.

Por otra parte, los triángulos BDE y BAC son semejantes, por estar en posición de Tales, y se puede escribir que $\frac{b'}{b} = \frac{9h}{10h} \Rightarrow b' = \frac{9b}{10}$.

Se puede calcular el área del trapezio $ACED$:

$$38 = \frac{b + \frac{9b}{10}}{2} \cdot h \Rightarrow \frac{19bh}{20} = 38.$$

El área del triángulo $ABC = \frac{b \cdot 10h}{2} = 200$, la respuesta c

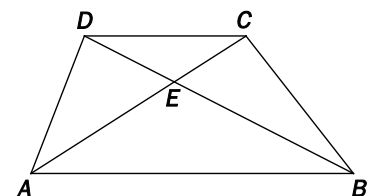


5.66. Sea $ABCD$ un trapezio en el que la base AB mide el doble que la base DC y sea E el punto de intersección de sus diagonales. Si la diagonal AC mide 11 cm, la longitud en cm del segmento EC es:

- a) $\frac{11}{3}$ b) $\frac{15}{4}$ c) 4 d) $\frac{7}{2}$

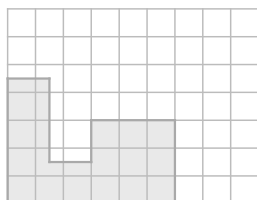
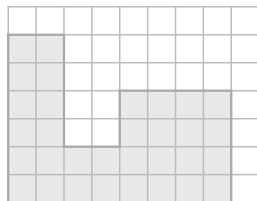
En la figura observamos que los triángulos AEB y CDE son semejantes y de razón de semejanza 2, ya que la base AB mide el que la base DC .

Así pues, $\frac{AE}{EC} = 2$, y como $AE + EC = 11$, $EC = \frac{11}{3}$



AUTOEVALUACIÓN

5.1. Dibuja una figura semejante a la siguiente con razón de semejanza 0,75. Indica los perímetros de las dos figuras y comprueba que su razón también es 0,75.



El perímetro de la figura dada es de 32 cm.

La razón de semejanza coincidirá la razón de los perímetros.

El perímetro de la segunda figura es 24.

Por tanto: $k = \frac{3}{4} = 0,75$

5.2. Indica cuáles de los siguientes pares de triángulos son semejantes y, en caso afirmativo, calcula la razón de semejanza de sus lados.

a) 3, 4, 5 y 4,5; 6; 7,5

c) 5, 12, 13 y 12,5; 30; 32,5

b) 2, 5, 6 y 4, 10, 11

d) 4, 7, 10 y 2,4; 4,2; 6

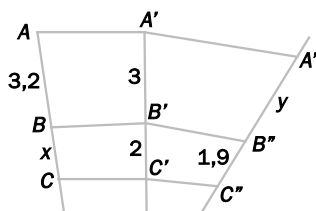
a) $\frac{4,5}{3} = \frac{6}{4} = \frac{7,5}{5} = 1,5 \Rightarrow$ Como los tres lados son proporcionales, los triángulos son semejantes y la razón de semejanza es $k = 1,5$.

b) $\frac{4}{2} = \frac{10}{5} \neq \frac{11}{6} \Rightarrow$ Los tres lados no son proporcionales, por lo que los triángulos no son semejantes.

c) $\frac{12,5}{5} = \frac{30}{12} = \frac{32,5}{13} = 2,5 \Rightarrow$ Los lados son proporcionales, por lo que los triángulos son semejantes y la razón de semejanza es $k = 2,5$.

d) $\frac{2,4}{4} = \frac{4,2}{7} = \frac{6}{10} = 0,6 \Rightarrow$ Los lados son proporcionales, por lo que los triángulos son semejantes y la razón de semejanza es $k = 0,6$.

5.3. Calcula el valor de x e y en la siguiente figura.



Aplicando el teorema de Tales a las parejas de rectas secantes AC y A'C', por un lado, y A'C' y A''C'', por el otro, se pueden escribir las siguientes proporciones:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \frac{3,2}{3} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 3,2}{3} = 2,13$$

$$\frac{A'B'}{A''B''} = \frac{B'C'}{B''C''} \Rightarrow \frac{3}{y} = \frac{2}{1,9} \Rightarrow y = \frac{3 \cdot 1,9}{2} = 2,85$$

- 5.4. Me han regalado una reproducción de la torre Eiffel a escala 1:4000 que mide 8 centímetros de altura. ¿Cuál es la altura real del monumento?

$$8 \cdot 4000 = 32\,000 \text{ cm} = 320 \text{ m}$$

- 5.5. Un triángulo de 15 centímetros de perímetro es semejante a otro triángulo de lados 7,5, 6 y 9 centímetros. ¿Cuánto miden los lados de ese triángulo? ¿Cuál es la razón de semejanza?

La razón de semejanza coincide con la razón de los perímetros. Por tanto:

$$k = \frac{7,5 + 6 + 9}{15} = \frac{22,5}{15} = 1,5$$

Los lados del nuevo triángulo son:

$$7,5 : 1,5 = 5 \qquad 6 : 1,5 = 4 \qquad 9 : 1,5 = 6$$

- 5.6. Las áreas de dos hexágonos semejantes son de 104 y 26 centímetros cuadrados, respectivamente. ¿Cuánto mide el perímetro del mayor si el del menor es de 12 centímetros?

$$\text{La razón de las áreas de los hexágonos es } k^2 = \frac{104}{26} = 4 \Rightarrow k = \sqrt{4} = 2.$$

La razón de los perímetros será también 2; por tanto, el perímetro del mayor será $p = 2 \cdot 12 = 24 \text{ cm}$.

- 5.7. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 y 4 metros, respectivamente. Se quiere dibujar otro triángulo rectángulo semejante de modo que la hipotenusa mida 12,5 metros. ¿Cuánto deben medir los catetos?

$$\text{La hipotenusa del primer triángulo mide } \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ cm, por lo que } k = \frac{12,5}{5} = 2,5.$$

Los catetos del nuevo triángulo son $3 \cdot 2,5 = 7,5 \text{ cm}$ y $4 \cdot 2,5 = 10 \text{ cm}$

- 5.8. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 64 y 48 centímetros, respectivamente. Calcula el valor de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa y el de la altura sobre la hipotenusa.

$$\text{La hipotenusa mide } \sqrt{64^2 + 48^2} = 80 \text{ cm.}$$

$$\text{Las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden: } m = \frac{64^2}{80} = 51,2 \text{ cm, } n = \frac{48^2}{80} = 28,8 \text{ cm.}$$

$$\text{La altura relativa a la hipotenusa mide } h = \sqrt{m \cdot n} = \sqrt{51,2 \cdot 28,8} = 38,4 \text{ cm.}$$

PON A PRUEBA TUS COMPETENCIAS

Calcula e imagina > El túnel de Eupalinos

Cuando Polícrates encargó a Eupalinos construir un túnel bajo la montaña que, partiendo simultáneamente de *A* y *B*, se encontrara en las profundidades de la roca, el sabio griego recurrió a los triángulos semejantes.

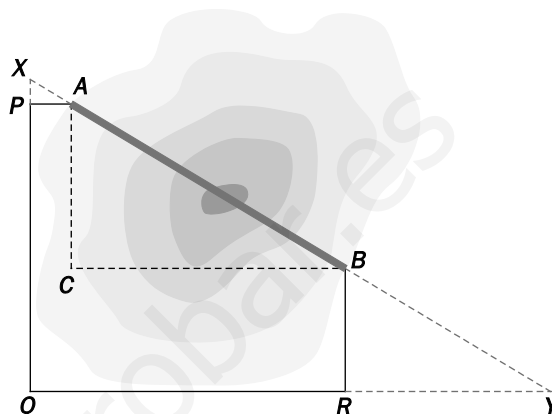
Sigue paso a paso el método que utilizó para calcular la dirección con la que se debía horadar la montaña desde cada uno de los extremos.

- 5.1. Traza el triángulo imaginario *ABC* y, en la falda de la montaña, toma las medidas *AP* = 100 metros, *PQ* = 700 metros, *QR* = 1060 metros y *RB* = 300 metros, en las que todos los ángulos son rectos.

A partir de ellas, obtén las distancias *AC* y *CB*.

$$AC = PQ - BR = 400 \text{ m}$$

$$CB = QR - AP = 960 \text{ m.}$$



- 5.2. ¿Cuánto medirá el túnel?

Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{400^2 + 960^2} = 1040 \text{ m.}$

- 5.3. ¿Cómo deben ser los segmentos *PX* y *RY* para que los triángulos *ABC*, *XPA* y *BRY* sean semejantes?

Una prolongación de *PQ* y *QR* y tales que $\frac{PX}{AP} = \frac{BR}{RY} = \frac{AC}{BC}$.

- 5.4. Halla las distancias *PX* y *RY*.

$$\frac{PX}{100} = \frac{400}{960} \Rightarrow PX = 41,67 \text{ m} \quad \text{y} \quad \frac{300}{RY} = \frac{400}{960} \Rightarrow RY = 720 \text{ m}$$

- 5.5. A partir de los puntos *X* e *Y* se trazan los segmentos *XA* y *BY*, que dan la dirección en la que se debe empezar a cavar.

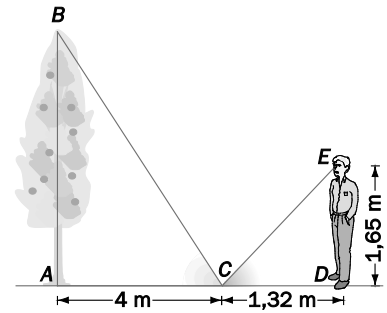
- 5.6. Con este método, Eupalinos supo en qué dirección se debía excavar para no desviarse a izquierda ni a derecha. Pero ¿cómo hizo para que los mineros no se desviaran hacia arriba ni hacia abajo, es decir, para saber en todo momento que estaban cavando en una horizontal perfecta? Juntaos por equipos y proponed varias soluciones. (La altitud sobre el nivel del mar de los puntos *A* y *B* es la misma.)

En la parte inferior de la galería había una línea horizontal que indicaba el nivel exacto que debía seguirse en la excavación. Así se consiguió una pendiente bastante regular del 0,4 %. Para corregir posibles errores y asegurarse de que los dos túneles se encontraban, Eupalinos hizo que aumentaran el techo de uno de ellos y que en el otro mantuvieran el techo y rebajaran el suelo.

Mide tu entorno > Distancias inaccesibles

Hace unos años, el abuelo Esteban plantó un árbol en su jardín. Desde entonces, cada año mide su altura y lleva un control de su crecimiento.

Para ello utiliza un método muy ingenioso: pone un espejo tumbado a 4 metros del pie del árbol y se aleja en línea recta hasta que consigue ver el punto más alto del árbol reflejado en el espejo. A continuación mide la distancia que hay entre su posición y el espejo, y mediante semejanza deduce la altura del árbol. ¿Cómo lo hace?



5.1. ¿Cómo son el ángulo de reflexión y el ángulo de incidencia que se forman en el espejo?

El ángulo de incidencia y el de reflexión en una superficie plana son iguales.

5.2. Razona por qué los dos triángulos de la figura son semejantes.

Porque tienen dos ángulos iguales, el de incidencia y el de reflexión, y los dos rectos.

5.3. Si los ojos del abuelo están a 1,65 metros del suelo, ¿cuál es la altura del árbol?

$$\frac{1,65}{1,32} = \frac{A}{4} \Rightarrow A = 4 \cdot \frac{1,65}{1,32} = 5 \text{ m}$$

5.4. ¿A qué distancia del espejo tuvo que colocarse el abuelo cuando el árbol medía 3,75 metros?

$$\frac{1,65}{x} = \frac{3,75}{4} \Rightarrow x = 4 \cdot \frac{1,65}{3,75} = 1,76 \text{ m}$$

5.5. Hay otras muchas formas tradicionales de medir distancias inaccesibles. Investiga en qué consisten el método del pintor y el del leñador.

El método del pintor consiste en colocar el pincel (u otro objeto) vertical frente a su vista, de forma que tape completamente el objeto del que se desea aproximar la altura. Conociendo la distancia a la que se encuentra el pincel y la distancia al objeto, se puede aplicar el teorema de Tales. Véase la actividad 62 de la página 91, donde se detalla el método.

El método del leñador consiste en imaginar que el objeto a medir cae al suelo.

- Con una varita de cualquier longitud y a una buena distancia del objeto a medir, se extiende el brazo completamente, sosteniendo la varita vertical, y se mueve de modo que con un ojo abierto se vea su punta tocando la del objeto.
- Ahora se mueve la mano hacia abajo, deslizándola por la varita hasta que coincida con la base del objeto.
- Sin mover el cuerpo, se gira lentamente la varita, desde la posición vertical a la horizontal.
- En esta posición se toma nota del sitio exacto donde la punta de la varita parece tocar el suelo.
- Se mide con pasos la distancia desde la base del objeto hasta este último punto, longitud que corresponde a la altura que se desea conocer.

5.6. Escoge un elemento de altura inaccesible de tu entorno (un árbol, tu instituto, una farola) y mídelo utilizando el método del abuelo Esteban.

Respuesta abierta.

Mide tu entorno > Distancias inaccesibles

Comienza esta actividad realizando un experimento: tienes que pedir a varios familiares o amigos que dibujen en una hoja un rectángulo que "sea bonito". Así, sin más explicación. Al día siguiente llévalos a clase de Matemáticas.

Calcula entonces el cociente entre el largo y el ancho de cada rectángulo. Como si de un truco de magia se tratara, los valores obtenidos serán próximos a 1,62.

Esta es una aproximación a la razón áurea, de la que ya habrás oído hablar. Ahora descubrirás su relación con muchos rectángulos que te serán familiares.

5.1. Coloca dos DNI o tarjetas de crédito como ves en la figura. Observa que si trazas una recta que va desde el extremo inferior izquierdo al superior derecho del DNI que está horizontal, la recta pasa también por el extremo superior derecho del DNI que está vertical.



- a) ¿Crees que esto sucede en cualquier rectángulo? Compruébalo con otro.
- b) ¿Qué relación debe haber entre los lados del rectángulo para que esto ocurra?
- c) Si el lado más corto midiese 1 cm, ¿cuánto mediría el largo? Calcula la razón $\frac{\text{lado largo}}{\text{lado corto}}$.

- a) No
- b) Se deben formar dos triángulos rectángulos semejantes en posición de Tales y, por tanto, si llamamos a al lado largo y b al corto, se debe cumplir que $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ o, lo que es lo mismo,

$1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$. Llamando x a la razón $\frac{a}{b}$ tenemos que $1 + \frac{1}{x} = x$; resolviendo $x^2 - x - 1 = 0$ tenemos que $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cong 1,62$.

- c) Si el corto mide 1, el largo mide 1,62. También se puede obtener usando $\frac{a+1}{a} = \frac{a}{1}$ y resolviendo la ecuación de 2.º grado anterior.

La razón entre los lados es la razón áurea, y un rectángulo que cumple esta proporción entre sus lados se llama rectángulo áureo. Esta proporción está relacionada con nuestra percepción de la belleza y aparece tanto en la naturaleza como en numerosas expresiones artísticas desde la Antigüedad.

5.2. Busca en tu entorno al menos cinco objetos rectangulares que cumplan la proporción áurea. (¡El DNI ya no vale!).

- Tarjetas de crédito
- Décimo de lotería de Navidad
- Algunas banderas
- Algunos sobres
- Algunos cromos
- El logotipo de Disney, de Toyota y de otras muchas empresas...

5.3. Busca información en internet sobre la historia de la razón áurea y elabora una cronología en la que figuren al menos:

- **Diez personajes históricos que la descubrieron o utilizaron y las fechas en las que vivieron.**
- **Cinco obras de arte que la contengan y su fecha de creación.**

Personajes históricos:

- Fidias (490-430 a. C.). Esculpió las estatuas del Partenón utilizando una proporción que más tarde fue considerada como el número áureo.
- Platón (427-347 a. C.). Sus cinco sólidos platónicos tenían relación con la proporción áurea.
- Euclides (300-265 a. C.). Define el número áureo en *Los elementos*. Demostró que este número no puede ser descrito como la razón de dos números enteros, es decir, es irracional.
- Fibonacci (1170-1250). Descubrió la sucesión que lleva su nombre y que está muy relacionada con el número áureo.
- Luca Pacioli. En 1509 publica su libro *La proporción divina*, en el que plantea cinco razones por las que considera apropiado considerar divino el número áureo.
- Alberto Durero (1471-1528). En 1525 publica *Instrucción sobre la medida con regla y compás de figuras planas y sólidas*, donde describe cómo trazar con regla y compás la espiral basada en la sección áurea.
- Johannes Kepler (1571-1630). Encontró la relación entre el número áureo y la sucesión de Fibonacci.
- Charles Bonnet (1720-1793). Descubrió que las estructuras en espiral en la naturaleza seguían la sucesión de Fibonacci.
- Martin Ohm (1792-1872). Propuso el nombre de número de oro para esta proporción en 1835.
- Mark Barr (siglo XX). Sugiere la letra griega phi (ϕ) como símbolo de la razón áurea, por ser la inicial del nombre del escultor griego Fidias.

Obras de arte:

- Gran Pirámide de Guiza (c. 1570 a. C.)
- Partenón de Atenas (siglo V a. C.)
- Catedral de Notre-Dame de París (1345)
- *Hombre de Vitruvio* (1847), *La Gioconda* o *La Mona Lisa* (1503)..., de Leonardo da Vinci
- *La muchacha en la ventana* (1925), *Leda atómica* (1949)..., de Salvador Dalí

5.4. Averigua la relación que hay entre la sucesión de Fibonacci y la razón áurea, y descríbela con tus propias palabras.

Si F_n es el término general de la sucesión de Fibonacci, el cociente $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ tiende al número áureo cuando n tiende a infinito.

5.5. La razón áurea también aparece en la naturaleza, especialmente en relación con la sucesión de Fibonacci.

Busca cinco ejemplos en los que esto ocurra (una pista: espirales).

- La distancia entre las espirales de caracolas, los helechos, las piñas...
- La relación entre la altura del ser humano y la altura del ombligo.
- La relación entre el grosor de las ramas principales y el tronco de un árbol.
- La relación entre la cantidad de abejas macho y abejas hembra en un panal.
- La relación entre la distancia del hombro a los dedos y la distancia del codo a los dedos.

5.6. Juntaos por equipos, poned en común toda la información obtenida y elaborad una presentación para contarla a la clase. Debe contener el desarrollo matemático de la razón áurea y los ejemplos más originales que hayáis encontrado.

Respuesta abierta.