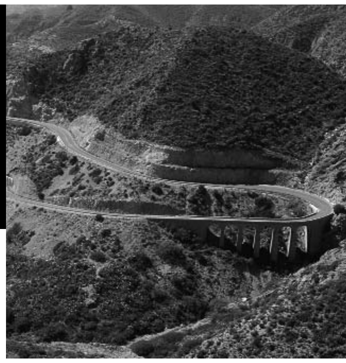
9 Geometría analítica

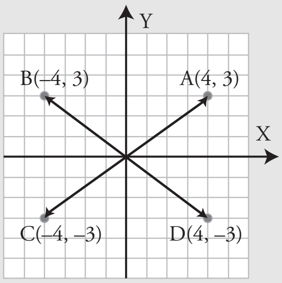


1. Vectores

PIENSA Y CALCULA

Dibuja en unos ejes coordenados los vectores que nacen en el origen de coordenadas y tienen sus extremos en los puntos: A(4, 3), B(– 4, 3), C(– 4, – 3) y D(4, – 3)

Solución:

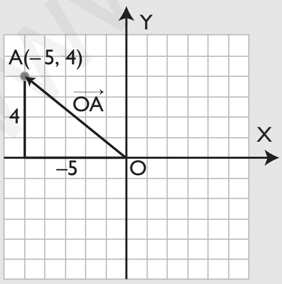


APLICA LA TEORÍA

1 Dado el punto A(– 5, 4), halla el vector $\overrightarrow{OA}$, represéntalo y halla sus componentes.

Solución:

$\overrightarrow{OA}(-5, 4)$

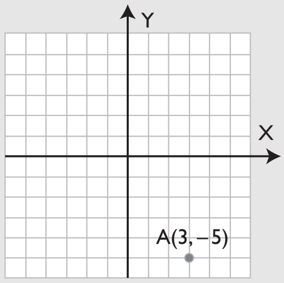


La componente horizontal es – 5, y la vertical, 4

2 Dado el vector $\vec{v}(3, -5)$, halla el punto A tal que el vector $\overrightarrow{OA} = \vec{v}$, y represéntalo.

Solución:

A(3, – 5)



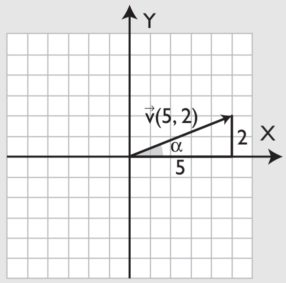
3 Calcula el módulo y el argumento de los siguientes vectores:

a) $\vec{v}(5, 2)$ b) $\vec{v}(-4, 3)$

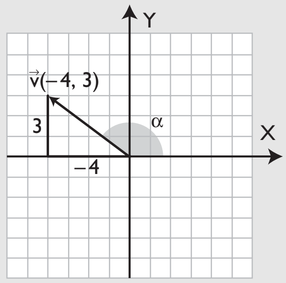
Solución:

a) $|\vec{v}| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} = 5{,}39$ unidades.

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{2}{5} \Rightarrow \alpha = 21°\ 48'\ 5''$



b) $|\vec{v}| = (-4)^2 + 3^2 = 5$ unidades.

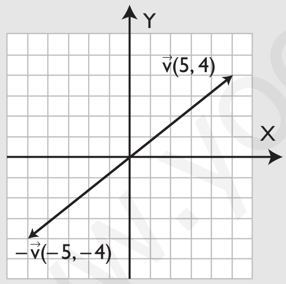


$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{3}{-4} \Rightarrow \alpha = 143°\ 7'\ 48''$

4 Halla el vector opuesto del vector $\vec{v}(5, 4)$ y represéntalos en unos mismos ejes coordenados.

Solución:

$-\vec{v} = (-5, -4)$



5 Dados los siguientes vectores:

$\vec{u}(-3, 2)$ y $\vec{v}(4, 3)$

calcula analítica y geométricamente:

a) $\vec{u} + \vec{v}$

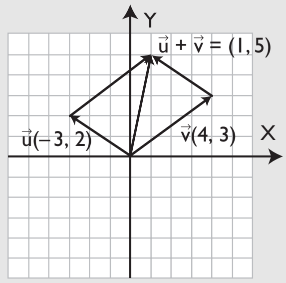
b) $\vec{u} - \vec{v}$

Solución:

a) Analíticamente:

$\vec{u} + \vec{v} = (-3, 2) + (4, 3) = (1, 5)$

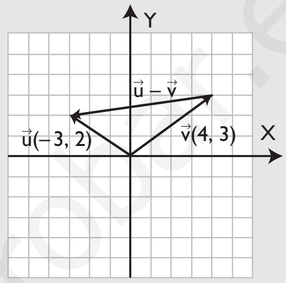
Geométricamente:



b) Analíticamente:

$\vec{u} - \vec{v} = (-3, 2) - (4, 3) = (-7, -1)$

Geométricamente:



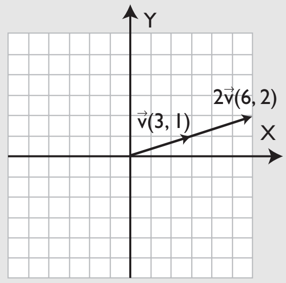
6 Dado el vector $\vec{v}(3, 1)$, calcula analítica y geométricamente:

a) $2\vec{v}$ b) $-2\vec{v}$

Solución:

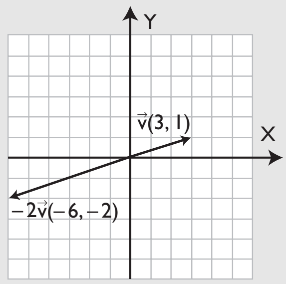
a) Analíticamente: $2\vec{v} = 2(3, 1) = (6, 2)$

Geométricamente:



b) Analíticamente: $-2\vec{v} = -2(3, 1) = (-6, -2)$

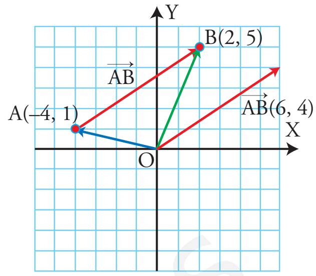
Geométricamente:



2. Ecuaciones de la recta

PIENSA Y CALCULA

Halla la pendiente del vector $\overrightarrow{AB}$ del primer dibujo del margen y simplifica el resultado.



Solución:

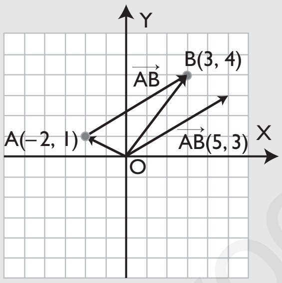
$\overrightarrow{AB}(6, 4) \Rightarrow m = \operatorname{tg} \alpha = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

APLICA LA TEORÍA

7 Dados los puntos A(–2, 1) y B(3, 4), calcula el vector $\overrightarrow{AB}$. Haz la representación gráfica.

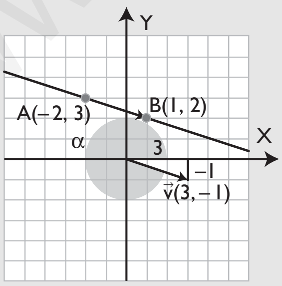
Solución:

$\overrightarrow{AB}(3 + 2, 4 - 1) = (5, 3)$



8 Representa la recta que pasa por los puntos A(–2, 3) y B(1, 2). Halla un vector director y la pendiente de dicha recta.

Solución:

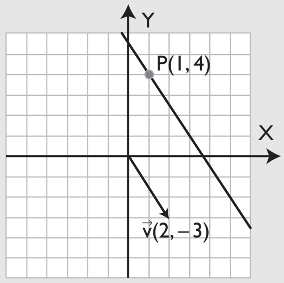


$\vec{v} = \overrightarrow{AB}(1 + 2, 2 - 3) = (3, -1)$

$m = \operatorname{tg} \alpha = -\dfrac{1}{3}$

9 Representa la recta que pasa por el punto P(1, 4) y tiene como vector director $\vec{v}(2, -3)$. Halla las distintas ecuaciones de dicha recta.

Solución:



Ecuación vectorial:

$(x, y) = (1, 4) + t(2, -3); t \in \mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas:

$\left.\begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 4 - 3t \end{array}\right\} ; t \in \mathbb{R}$

Ecuación continua:

$\dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y - 4}{-3}$

Ecuación general:

$-3x + 3 = 2y - 8$

$3x + 2y - 11 = 0$

Ecuación explícita:

$2y = -3x + 11$

$y = -\dfrac{3x}{2} + \dfrac{11}{2}$

10 Dada la recta $2x + 3y = 6$, ¿qué tipo de ecuación es? Halla un punto, un vector normal, un vector director y la pendiente. Haz la representación gráfica.

Solución:

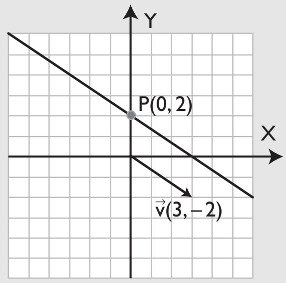
Es la ecuación general.

Para $x = 0 \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow P(0, 2)$

$\vec{n}(A, B) \Rightarrow \vec{n}(2, 3)$

$\vec{v}(B, -A) \Rightarrow \vec{v}(3, -2)$

$m = \text{tg}\ \alpha = -\dfrac{2}{3}$

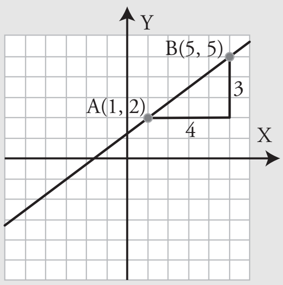


3. Otras ecuaciones de la recta

PIENSA Y CALCULA

Dibuja la recta que pasa por los puntos A(1, 2) y B(5, 5) y halla su pendiente.

Solución:

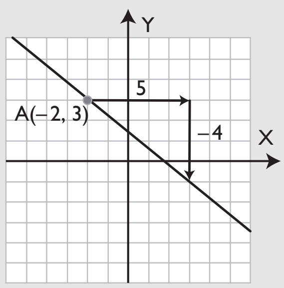


$m = \dfrac{3}{4}$

APLICA LA TEORÍA

11 Dibuja la recta que pasa por el punto A(– 2, 3) y que tiene de pendiente – 4/5. Halla la ecuación de dicha recta.

Solución:

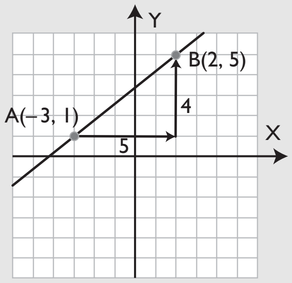


$y - 3 = -\dfrac{4}{5}(x + 2)$

$y = -\dfrac{4}{5}x + \dfrac{7}{5}$

12 Dibuja la recta que pasa por los puntos A(– 3, 1) y B(2, 5). Halla la ecuación de dicha recta.

Solución:



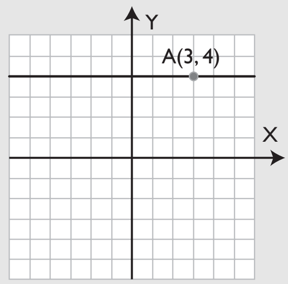
$\vec{v} = \overrightarrow{AB}\,(5, 4) \Rightarrow m = \dfrac{4}{5}$

$y - 1 = \dfrac{4}{5}(x + 3)$

$y = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{17}{5}$

13 Dibuja la recta que es paralela al eje X y que pasa por el punto A(3, 4). Escribe su ecuación vectorial.

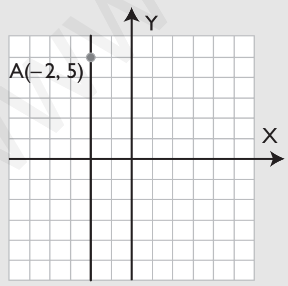
Solución:



$(x, y) = (3, 4) + t(1, 0); t \in \mathbb{R}$

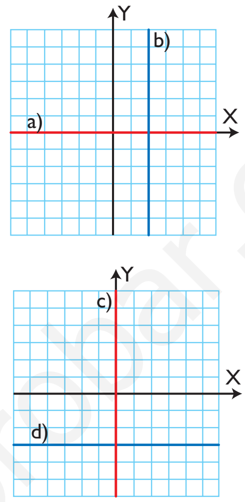
14 Dibuja la recta que es paralela al eje Y y que pasa por el punto A(– 2, 5). Escribe su ecuación paramétrica.

Solución:



$$\left.\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 5 + t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$$

15 Halla la ecuación general de las rectas representadas en los siguientes ejes de coordenadas:



Solución:

a) $y = 0$

b) $x = 2$

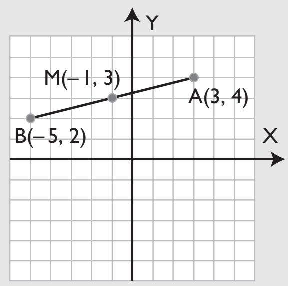
c) $x = 0$

d) $y = -3$

16 Halla el punto medio del segmento de extremos A(3, 4) y B(– 5, 2). Haz la representación gráfica.

Solución:

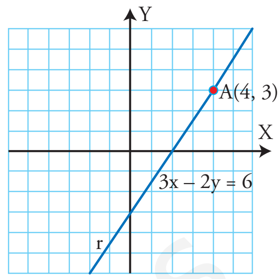
M(– 1, 3)



4. Posiciones, distancia y circunferencia

PIENSA Y CALCULA

Halla todos los puntos de coordenadas enteras en la recta del 1er dibujo del margen.



Solución:

A(4, 3); B(6, 6); C(2, 0); D(0, –3); E(–2, –6)

APLICA LA TEORÍA

17 Estudia analítica y gráficamente la posición relativa de los puntos A(1, 2) y B(–3, 4) respecto de la siguiente recta:

$r \equiv 2x + 3y = 6$

Solución:

$A(1, 2) \Rightarrow 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 2 + 6 = 8 \neq 6 \Rightarrow$

$A(4, 3) \notin r$

$B(-3, 4) \Rightarrow 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 = -6 + 12 = 6 \Rightarrow$

$B(-3, 4) \in r$

18 Estudia analíticamente la posición relativa de los siguientes pares de rectas. Si se cortan, halla el punto de corte:

a) $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 5 \\ 2x - 3y = 11 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 3 \\ -2x + y = 1 \end{array}\right\}$

Representa ambas rectas para comprobarlo.

Solución:

a) Analíticamente:

$\dfrac{2}{2} \neq \dfrac{3}{-3} \Rightarrow$ rectas secantes.

Para hallar el punto de corte hay que resolver el sistema.

Se resuelve por reducción.

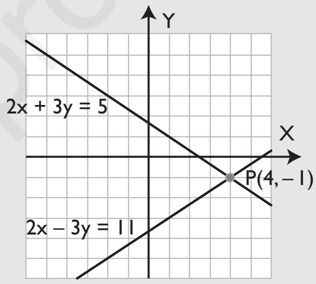
Sumando se obtiene:

$4x = 16 \Rightarrow x = 4$

$x = 4 \Rightarrow y = -1$

Se cortan en el punto A(4, – 1)

Representación:

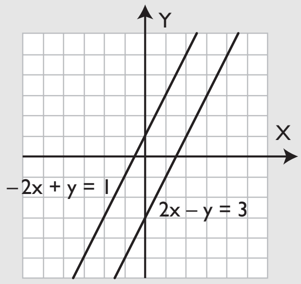


b) Analíticamente:

$\dfrac{2}{-2} = \dfrac{-1}{1} \neq \dfrac{3}{1} \Rightarrow$ rectas paralelas.

No se cortan.

Representación:



19 Dada la recta $r \equiv 3x + y = 2$, halla una recta **s**, paralela a **r**, y otra perpendicular **t** que pasen por el punto P(2, – 1). Haz la representación gráfica.

Solución:

La recta **s** tendrá la misma pendiente que la recta **r**, que es: $m = -A/B = -3$

Su ecuación será:

$y + 1 = -3(x - 2)$

$3x + y = 5$

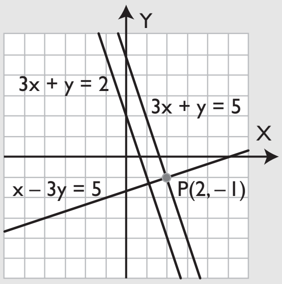
La recta **t** tendrá la pendiente inversa y opuesta a la de la recta **r:**

Si la pendiente de **r** es: $m_r = -3$,

la pendiente de **t** será: $m_t = \frac{1}{3}$

$y + 1 = \frac{1}{3}(x - 2)$

$x - 3y = 5$

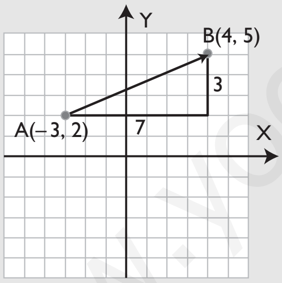


20 Halla la distancia que hay entre los puntos A(– 3, 2) y B(4, 5). Haz la representación gráfica.

Solución:

$\overrightarrow{AB}(7, 3)$

$d(A, B) = \sqrt{7^2 + 3^2} = \sqrt{58} = 7{,}62$ unidades.



21 Halla el coeficiente **a** para que la recta ax + 4y = 11 pase por el punto P(1, 2). Haz la representación gráfica.

Solución:

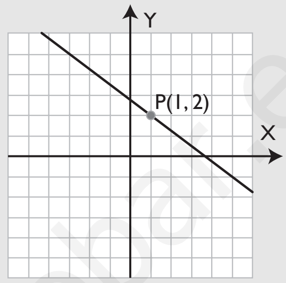
$a \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 11$

$a + 8 = 11$

$a = 3$

La ecuación de la recta será:

$3x + 4y = 11$

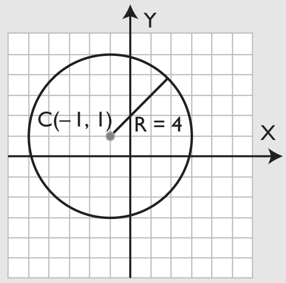


22 Halla la ecuación de la circunferencia que tiene el centro en el punto C(– 1, 1), y de radio, 4. Haz el dibujo.

Solución:

$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4^2$

$x^2 + y^2 + 2x - 2y = 14$



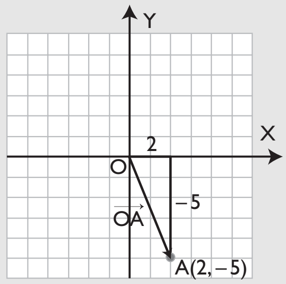
Ejercicios y problemas

1. Vectores

23 Dado el punto A(2, – 5), halla el vector $\overrightarrow{OA}$, represéntalo y halla sus componentes.

Solución:

$\overrightarrow{OA}$ (2, – 5)

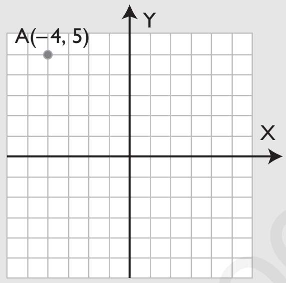


La componente horizontal es 2, y la vertical, – 5

24 Dado el vector $\vec{v}$(– 4, 5), halla el punto A, tal que el vector $\overrightarrow{OA} = \vec{v}$, y represéntalo.

Solución:

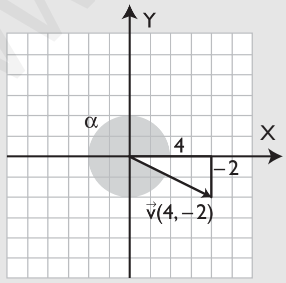
A(– 4, 5)



25 Calcula el módulo y el argumento de los siguientes vectores:

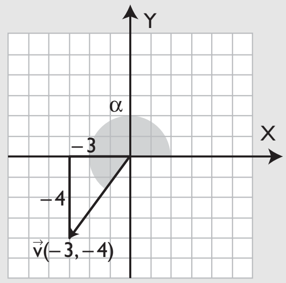
a) $\vec{v}$(4, – 2) b) $\vec{v}$(– 3, – 4)

Solución:



a) $|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{-2}{4} \Rightarrow \alpha = 333°\ 26'\ 6''$



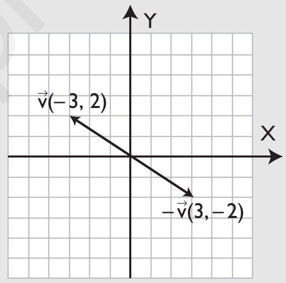
b) $|\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{-4}{-3} \Rightarrow \alpha = 233°\ 7'\ 48''$

26 Halla el vector opuesto del vector $\vec{v}$(– 3, 2) y represéntalos en unos mismos ejes coordenados.

Solución:

$-\vec{v}$ = (3, – 2)



27 Dados los siguientes vectores:

$\vec{u}$(3, 2) y $\vec{v}$(1, 4)

calcula analítica y geométricamente:

a) $\vec{v} + \vec{v}$

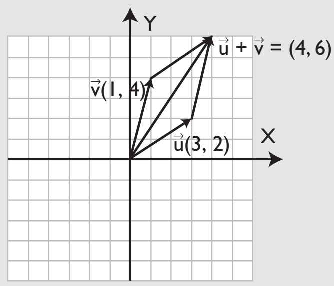
b) $\vec{u} - \vec{v}$

Solución:

a) Analíticamente:

$\vec{u} + \vec{v}$ = (3, 2) + (1, 4) = (4, 6)

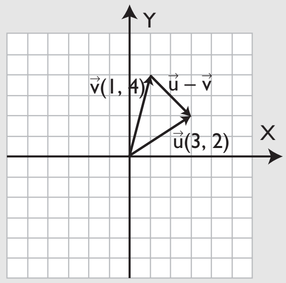
Geométricamente:



b) Analíticamente:

$\vec{u} - \vec{v} = (3, 2) - (1, 4) = (2, -2)$

Geométricamente:



28 Dado el vector $\vec{v}(1, -2)$, calcula analítica y geométricamente:

a) $3\vec{v}$

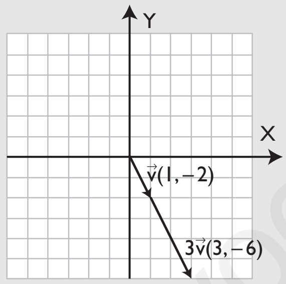
b) $-3\vec{v}$

Solución:

a) Analíticamente:

$3\vec{v} = 3(1, -2) = (3, -6)$

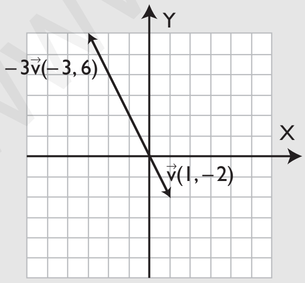
Geométricamente:



b) Analíticamente:

$-3\vec{v} = -3(1, -2) = (-3, 6)$

Geométricamente:

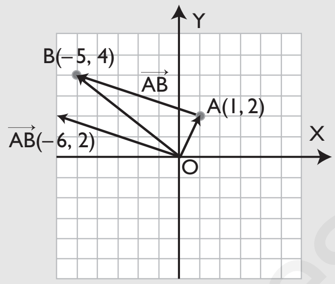


2. Ecuaciones de la recta

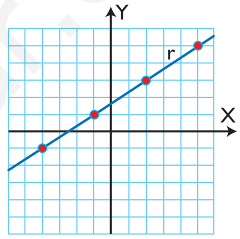
29 Dados los puntos A(1, 2) y B(–5, 4), calcula el vector $\overrightarrow{AB}$. Haz la representación gráfica.

Solución:

$\overrightarrow{AB}(-5 - 1, 4 - 2) = (-6, 2)$

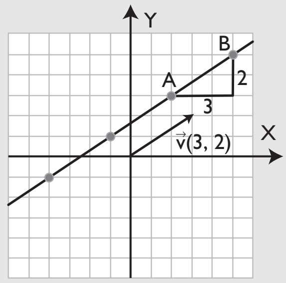


30 Halla un vector director y la pendiente de la siguiente recta:



Solución:

Se dibuja un vector de la recta y se hallan sus componentes.

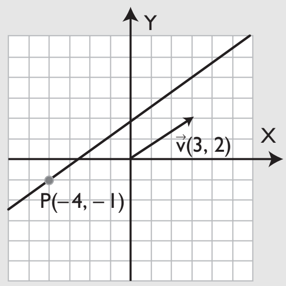


$\vec{v} = \overrightarrow{AB}(3, 2)$

$m = \text{tg}\ \alpha = \dfrac{2}{3}$

31 Representa la recta que pasa por el punto P(–4, –1) y tiene como vector director $\vec{v}(3, 2)$. Halla las distintas ecuaciones de dicha recta.

Solución:



Ecuación vectorial:

$(x, y) = (-4, -1) + t(3, 2); t \in \mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas:

$\left.\begin{array}{l} x = -4 + 3t \\ y = -1 + 2t \end{array}\right\} ; t \in \mathbb{R}$

Ecuación continua:

$\dfrac{x + 4}{3} = \dfrac{y + 1}{2}$

Ecuación general:

$2x + 8 = 3y + 3$

$2x - 3y + 5 = 0$

Ecuación explícita:

$-3y = -2x - 5$

$3y = 2x + 5$

$y = \dfrac{2x}{3} + \dfrac{5}{3}$

32 Dada la recta $y = 2x + 5$, ¿qué tipo de ecuación es? Halla un punto, la pendiente, un vector director y un vector normal. Haz la representación gráfica.

Solución:

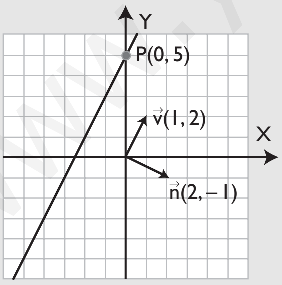
Es la ecuación explícita.

Para $x = 0 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow P(0, 5)$

$m = \text{tg}\ \alpha = 2$

$\vec{v}(1, 2)$

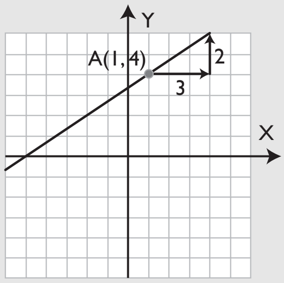
$\vec{n}(2, -1)$



3. Otras ecuaciones de la recta

33 Dibuja la recta que pasa por el punto $A(1, 4)$ y tiene de pendiente $2/3$. Halla la ecuación de dicha recta.

Solución:

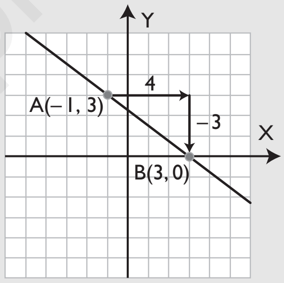


$y - 4 = \dfrac{2}{3}(x - 1)$

$y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{10}{3}$

34 Dibuja la recta que pasa por los puntos $A(-1, 3)$ y $B(3, 0)$. Halla la ecuación de dicha recta.

Solución:

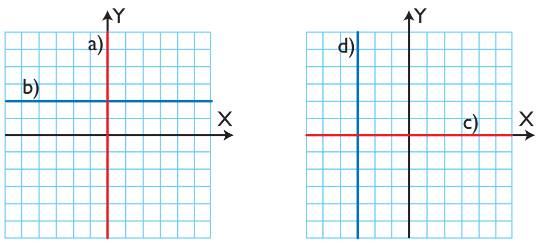


$\vec{v} = \overrightarrow{AB}\ (4, -3) \Rightarrow m = -\dfrac{3}{4}$

$y - 3 = -\dfrac{3}{4}(x + 1)$

$y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{9}{4}$

35 Halla la ecuación general de las rectas representadas en los siguientes ejes de coordenadas:



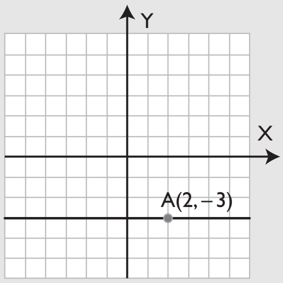
Solución:

a) $x = 0$ b) $y = 2$

c) $y = 0$ d) $x = -3$

36 Dibuja la recta que es paralela al eje X y que pasa por el punto A(2, – 3). Escribe su ecuación general.

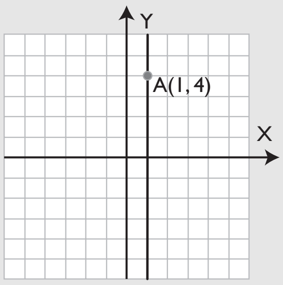
Solución:



$y = -3$

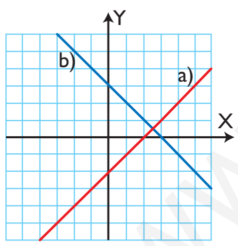
37 Dibuja la recta que es paralela al eje Y y que pasa por el punto A(1, 4). Escribe su ecuación general.

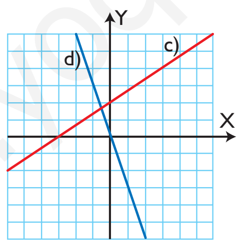
Solución:



$x = 1$

38 Halla la ecuación explícita de las rectas representadas en los siguientes ejes de coordenadas:





Solución:

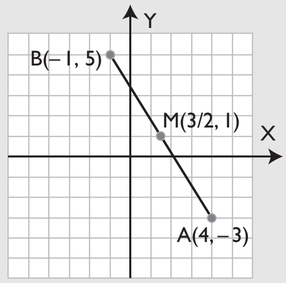
a) $y = x - 2$ b) $y = -x + 3$

c) $y = \frac{2}{3}x + 2$ d) $y = -3x$

39 Halla mentalmente el punto medio del segmento de extremos A(4, – 3) y B(– 1, 5). Haz la representación gráfica.

Solución:

M(3/2, 1)



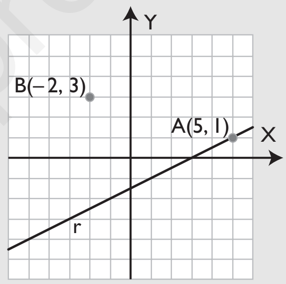
4. Posiciones, distancia y circunferencia

40 Estudia analítica y gráficamente la posición relativa de los puntos A(5, 1) y B(– 2, 3) respecto de la siguiente recta: $r \equiv x - 2y = 3$

Solución:

$A(5, 1) \Rightarrow 5 - 2 \cdot 1 = 5 - 2 = 3 \Rightarrow A(5, 1) \in r$

$B(-2, 3) \Rightarrow -2 - 2 \cdot 3 = -2 - 6 = -8 \neq 3 \Rightarrow$
$B(-2, 3) \notin r$



41 Estudia analíticamente la posición relativa de los siguientes pares de rectas. Si se cortan, halla el punto de corte:

a) $\left.\begin{array}{r} x - 2y = 3 \\ -x + 2y = -3 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 3x + 4y = 5 \\ 2x - y = -4 \end{array}\right\}$

Representa ambas rectas para comprobarlo.

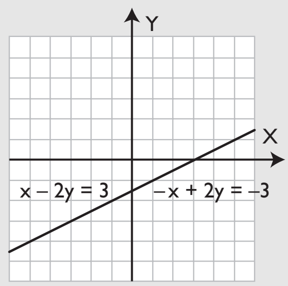
Solución:

a) Analíticamente:

$\frac{1}{-1} = \frac{-2}{2} = \frac{3}{-3} \Rightarrow$ rectas coincidentes.

Todos los puntos son comunes.

Representación:



b) Analíticamente:

$\frac{3}{2} \neq \frac{4}{-1} \Rightarrow$ rectas secantes.

Para hallar el punto de corte hay que resolver el sistema.

Se resuelve por reducción.

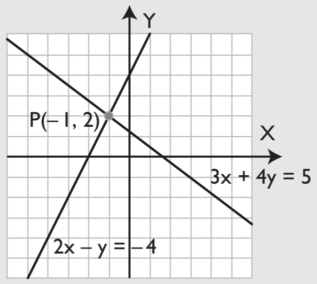
Se multiplica la 2ª ecuación por 4 y sumando se obtiene:

$11x = -11 \Rightarrow x = -1$

$x = -1 \Rightarrow y = 2$

Se cortan en el punto A(– 1, 2)

Representación:



42 Dada la recta $r \equiv x - 3y = 1$, halla una recta **s,** paralela a **r,** que pase por el punto P(2, 5). Haz la representación gráfica.

Solución:

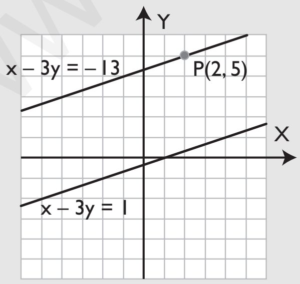
La recta **s** tendrá la misma pendiente que la recta **r,** que es:

$m = -A/B = 1/3$

Su ecuación será:

$y - 5 = \frac{1}{3}(x - 2)$

$x - 3y = -13$



43 Dada la recta $r \equiv 2x + y = 1$, halla una recta **t,** perpendicular a **r,** que pase por el punto P(3, 2). Haz la representación gráfica.

Solución:

La recta **t** tendrá de vector director:

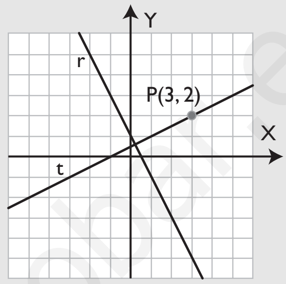
$\vec{n}(2, 1)$

$m = 1/2$

Su ecuación será:

$y - 2 = \frac{1}{2}(x - 3)$

$x - 2y = -1$



44 Halla la distancia que hay entre los siguientes puntos:

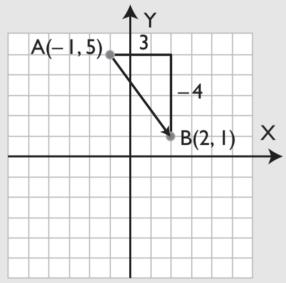
A(– 1, 5) y B(2, 1)

Haz la representación gráfica.

Solución:

$\overrightarrow{AB}(3, -4)$

$d(A, B) = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$ unidades.



45 Halla el coeficiente **a** para que la recta:

$4x + ay = 7$

pase por el punto P(– 2, 3). Haz la representación gráfica.

Solución:

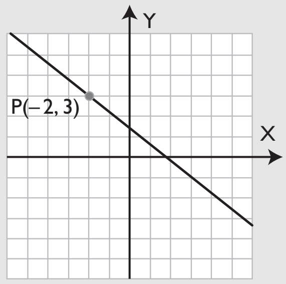
$4 \cdot (-2) + a \cdot 3 = 7$

$-8 + 3a = 7$

$a = 5$

La ecuación de la recta será:

$4x + 5y = 7$

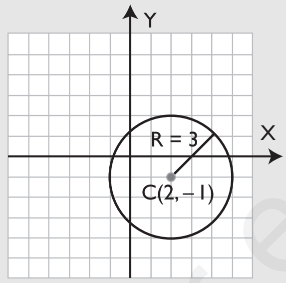


46 Halla la ecuación de la circunferencia que tiene el centro en el punto C(2, – 1), y de radio, 3. Haz el dibujo.

Solución:

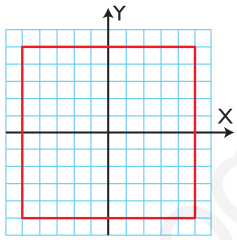
$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 3^2$

$x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4$



Para ampliar

47 Dado el siguiente cuadrado de centro el origen de coordenadas y lado de longitud 10:

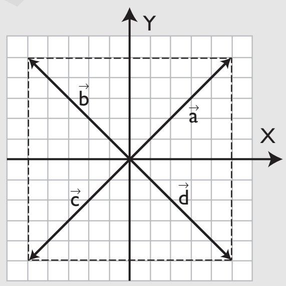


a) representa todos los vectores que nacen en el origen de coordenadas y tienen como extremo uno de los vértices del cuadrado.

b) escribe la expresión analítica de cada uno de los vectores representados.

Solución:

a) Vectores:



b) $\vec{a}(5, 5), \vec{b}(-5, 5), \vec{c}(-5, -5), \vec{d}(5, -5)$

48 Calcula mentalmente las componentes de los vectores $\overrightarrow{AB}$ en los siguientes casos:

a) A(3, 4), B(5, 7)

b) A(– 4, 1), B(2, – 5)

c) A(0, 5), B(– 7, 2)

d) A(0, 0), B(3, 5)

Solución:

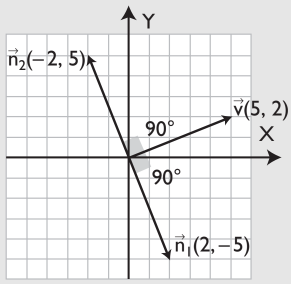
a) $\overrightarrow{AB}(2, 3)$ b) $\overrightarrow{AB}(6, -6)$

c) $\overrightarrow{AB}(-7, -3)$ c) $\overrightarrow{AB}(3, 5)$

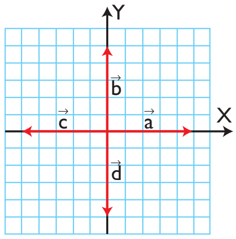
49 Halla mentalmente dos vectores perpendiculares al vector $\vec{v}(5, 2)$ y represéntalos gráficamente.

Solución:

$\vec{n}_1(2, -5), \vec{n}_2(-2, 5)$



50 Calcula mentalmente el módulo y el argumento de los siguientes vectores:



Solución:

$\vec{a}$: módulo = 5, argumento = 0°

$\vec{b}$: módulo = 5, argumento = 90°

$\vec{c}$: módulo = 5, argumento = 180°

$\vec{d}$: módulo = 5, argumento = 270°

51 Dada la siguiente recta:

$(x, y) = (-4, 1) + t(2, 3); t \in \mathbb{R}$

halla:

a) el tipo de ecuación.

b) un punto.

c) el vector director.

d) un vector normal.

e) la pendiente.

f) Represéntala.

Solución:

a) Vectorial.

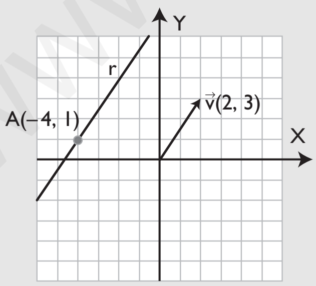
b) $P(-4, 1)$

c) $\vec{v}(2, 3)$

d) $\vec{n}(3, -2)$

e) $m = 3/2$

f) Representación:



52 Halla mentalmente un vector normal y un vector director de cada una de las siguientes rectas:

a) $2x + 3y = 5$ b) $-x - 2y = 4$

c) $-3x + y = 1$ d) $5x - 4y = 2$

Solución:

a) $\vec{n}(2, 3), \vec{v}(3, -2)$

b) $\vec{n}(-1, -2) \parallel (1, 2), \vec{v}(2, -1)$

c) $\vec{n}(-3, 1), \vec{v}(1, 3)$

d) $\vec{n}(5, -4), \vec{v}(4, 5)$

53 Halla mentalmente las ecuaciones generales de las siguientes rectas:

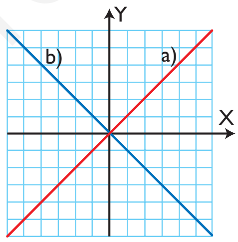
a) Eje X   b) Eje Y

Solución:

a) $y = 0$

b) $x = 0$

54 Halla la ecuación explícita de las siguientes rectas representadas en los ejes de coordenadas.



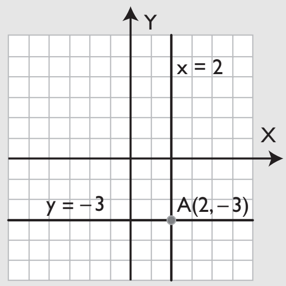
Solución:

a) $y = x$

b) $y = -x$

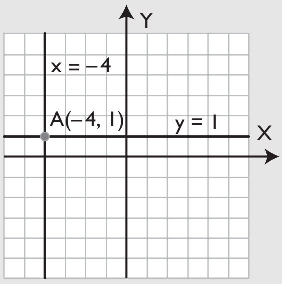
55 Representa y halla mentalmente las ecuaciones generales de las rectas paralelas a los ejes coordenados, que pasan por el punto $A(2, -3)$

Solución:



56 Representa y halla mentalmente las ecuaciones generales de las rectas paralelas a los ejes coordenados, que pasan por el punto $A(-4, 1)$

Solución:



57 Halla mentalmente la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - \ \ y = \ \ 2 \\ -4x + 2y = -1 \end{array}\right\}$$

Solución:

Son paralelas porque los coeficientes de las variables son proporcionales, y no lo son con los términos independientes.

$$\frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} \neq \frac{2}{-1}$$

58 Halla mentalmente la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 6y = \ \ 3 \\ -x + 2y = -1 \end{array}\right\}$$

Solución:

Son coincidentes porque todos los coeficientes son proporcionales:

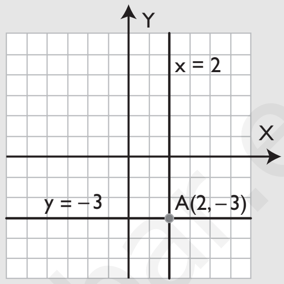
$$\frac{3}{-1} = \frac{-6}{2} = \frac{3}{-1}$$

59 Halla mentalmente la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

$$\left.\begin{array}{r} x = \ \ 2 \\ y = -3 \end{array}\right\}$$

Represéntalas y halla el punto de corte.

Solución:

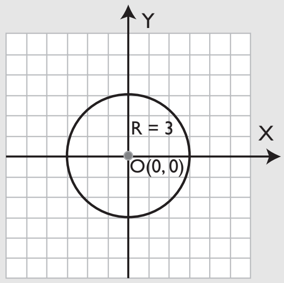


Se cortan, porque la primera es vertical y la segunda es horizontal.

60 Halla mentalmente la ecuación de la circunferencia de centro el origen de coordenadas y de radio R = 3 unidades. Represéntala.

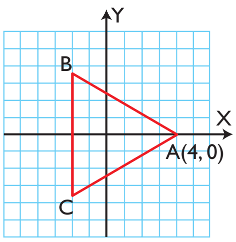
Solución:

$x^2 + y^2 = 9$



Problemas

61 Dado el triángulo equilátero siguiente, de centro el origen de coordenadas y vértice A(4, 0):

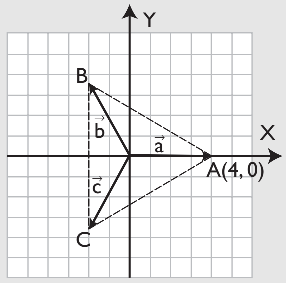


a) representa todos los vectores que nacen en el origen de coordenadas y tienen como extremo uno de los vértices del triángulo equilátero.

b) Aplicando las razones trigonométricas, halla la expresión analítica de cada uno de los vectores representados.

Solución:

a) Vectores:



b) $\vec{a}(4, 0)$

$\vec{b}(4 \cos 120°, 4 \text{ sen } 120°) =$

$[4 \cdot (-1/2), 4\sqrt{3}/2] = (-2, 2\sqrt{3})$

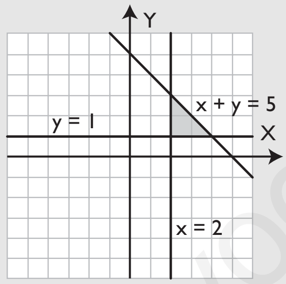
$\vec{c}(4 \cos 240°, 4 \text{ sen } 240°) =$

$[4 \cdot (-1/2), 4(-\sqrt{3}/2)] = (-2, -2\sqrt{3})$

62 Dibuja y calcula el área del triángulo comprendido entre las rectas siguientes:

$x = 2, y = 1, x + y = 5$

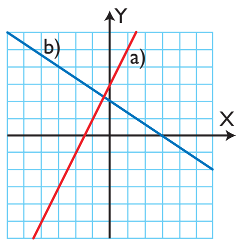
Solución:



Es un triángulo rectángulo, la base mide 2 unidades y la altura también mide 2 unidades.

Área = $2 \cdot 2 / 2 = 2$ unidades cuadradas.

63 Halla la ecuación general de las siguientes rectas representadas en los ejes de coordenadas:

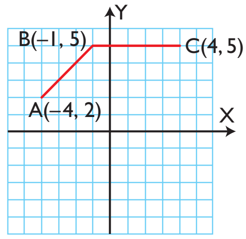


Solución:

a) $y = 2x + 3$

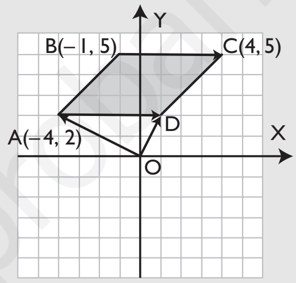
b) $y = -\dfrac{2}{3}x + 2$

64 De un paralelogramo se conocen tres vértices consecutivos: A(– 4, 2), B(– 1, 5) y C(4, 5)



Halla las coordenadas del cuarto vértice D utilizando la suma de vectores.

Solución:



$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{OA}(-4, 2)$

$\overrightarrow{BC}(5, 0)$

$\overrightarrow{OD} = (-4, 2) + (5, 0) = (1, 2)$

65 Halla analíticamente un vector director y la pendiente de las rectas que están definidas por los dos puntos siguientes:

a) A(0, 0), B(3, 4)

b) A(2, – 1), B(4, 6)

c) A(–2, 5), B(3, –4)

d) A(3, –2), B(4, – 1)

Solución:

a) $\vec{v} = \overrightarrow{AB}(3, 4), m = 4/3$

b) $\vec{v} = \overrightarrow{AB}(2, 7), m = 7/2$

c) $\vec{v} = \overrightarrow{AB}(5, -9), m = -9/5$

d) $\vec{v} = \overrightarrow{AB}(1, 1), m = 1$

66 Dada la siguiente recta:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4}$$

halla:

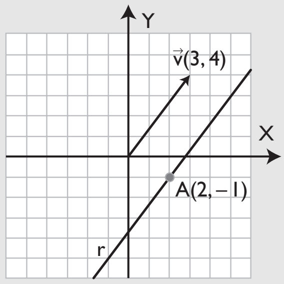
a) el tipo de ecuación.

b) un punto.

c) el vector director.
d) un vector normal.
e) la pendiente.
f) Represéntala.

Solución:

a) Continua.
b) P(2, – 1)
c) $\vec{v}(3, 4)$
d) $\vec{n}(4, -3)$
e) m = 4/3
f) Representación:



67 Dada la siguiente recta:

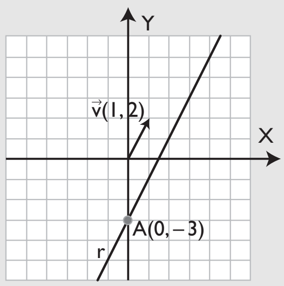
$$y = 2x - 3$$

halla:

a) el tipo de ecuación.
b) un punto.
c) la pendiente.
d) un vector director.
e) un vector normal.
f) Represéntala.

Solución:

a) Explícita.
b) P(0, – 3)
c) m = 2
d) $\vec{v}(1, 2)$
e) $\vec{n}(2, -1)$
f) Representación:

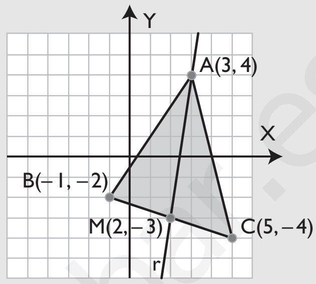


68 Dado el triángulo que tiene los vértices en los puntos A(3, 4), B(– 1, – 2) y C(5, – 4):

a) representa dicho triángulo y dibuja la recta que contiene la mediana definida por el vértice A
b) Halla la ecuación de dicha recta.

Solución:

a) Dibujo:



b) La recta **r** pasa por los puntos M(2, – 3) y A(3, 4)

$\vec{v} = \overrightarrow{MB}(1, 7)$

m = 7

Se aplica la recta en la forma punto-pendiente:

$y + 3 = 7(x - 2)$

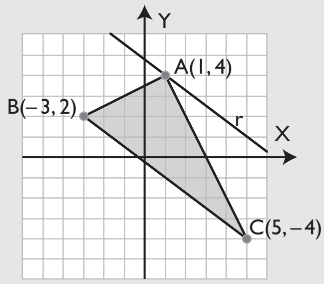
$y = 7x - 17$

69 Dado el triángulo que tiene los vértices en los puntos A(1, 4), B(–3, 2) y C(5, – 4):

a) representa dicho triángulo y dibuja la recta paralela al lado BC, que pasa por el vértice A
b) halla la ecuación de dicha recta.

Solución:

a) Dibujo:



b) La recta **r** pasa por el punto A(1, 4) y tiene la misma pendiente que el lado BC

$\vec{v} = \overrightarrow{BC}(8, -6) \parallel (4, -3)$

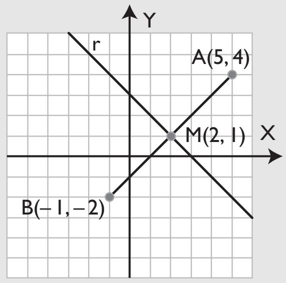
m = – 3/4

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 1)$$

$3x + 4y = 19$

70 Dibuja el segmento de extremos los puntos A(5, 4) y B(– 1, – 2) y su mediatriz. Halla la ecuación de la mediatriz.

Solución:



La recta **r** pasa por el punto medio del segmento $\overrightarrow{AB}$

M(2, 1)

$\vec{v} = \overrightarrow{AB}(-6, -6) \parallel (1, 1)$

m = 1

Como la recta **r** es perpendicular, su pendiente será inversa y opuesta:

$m_r = -1$

Se aplica la recta en la forma punto-pendiente:

$y - 1 = -(x - 2)$

$y = -x + 3$

71 Halla el coeficiente **k** para que la recta:

$$kx + 3y = 8$$

pase por el punto A(1, 2)

Solución:

$k \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8$

$k = 2$

72 Halla mentalmente la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 4y = 12 \\ 2x + y = 3 \end{array}\right\}$$

Represéntalas y halla el punto de corte.

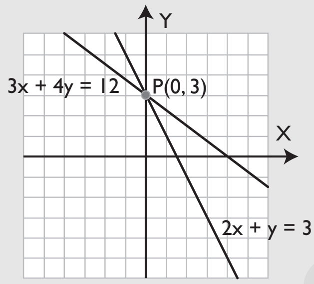
Solución:

Las rectas son secantes porque los coeficientes de las variables no son proporcionales.

$\frac{3}{2} \neq \frac{4}{1}$

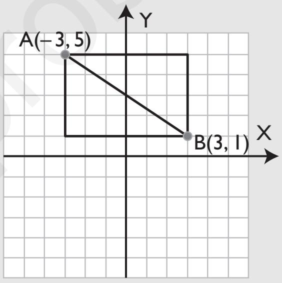
El sistema se resuelve por sustitución despejando **y** de la segunda ecuación.

La solución es x = 0, y = 3



73 Dibuja un rectángulo sabiendo que tiene los lados paralelos a los ejes coordenados, y que las coordenadas de dos vértices opuestos son A(– 3, 5) y B(3, 1). Dibuja y halla la longitud de la diagonal.

Solución:



$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(3 + 3)^2 + (1 - 5)^2} =$

$= \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} = 7,21$

74 Halla el valor de **k** para que las siguientes rectas sean paralelas:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 5 \\ kx - 6y = 1 \end{array}\right\}$$

Solución:

Para que sean paralelas, los coeficientes de las variables tienen que ser proporcionales.

$\frac{2}{k} = \frac{3}{-6}$

$3k = -12$

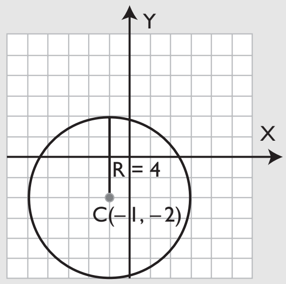
$k = -4$

75 Halla la ecuación de la circunferencia que tiene el centro en el punto A(– 1, – 2), y de radio, 4 unidades. Haz el dibujo.

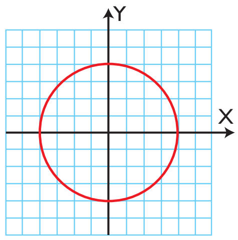
Solución:

$(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 4^2$

$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 11 = 0$



76 Halla la ecuación de la siguiente circunferencia:



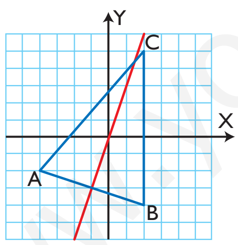
Solución:

Tiene el centro en O(0, 0) y radio R = 4

$x^2 + y^2 = 4^2$

$x^2 + y^2 = 16$

77 Dado el triángulo de la siguiente figura:



halla la ecuación de la mediatriz del lado AB

Solución:

La mediatriz del lado AB pasa por el punto medio M de AB y es perpendicular a dicho lado. Luego tendrá pendiente inversa y opuesta de la que tiene dicho lado.

$A(-4, -2), B(2, -4) \Rightarrow M(-1, -3)$

Pendiente del lado AB:

$\overrightarrow{AB}(6, -2) \parallel (3, -1)$

$m_{AB} = -\dfrac{1}{3}$

Pendiente de la mediatriz:

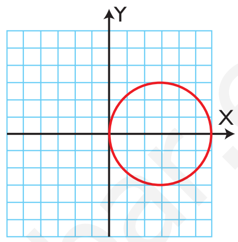
$m_{\perp} = 3$

Ecuación de la mediatriz:

$y + 3 = 3(x + 1)$

$y = 3x$

78 Halla la ecuación de la siguiente circunferencia:



Solución:

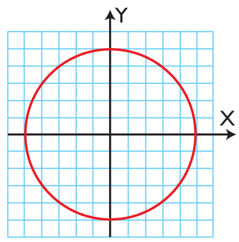
El centro es el punto C(3, 0) y el radio, R = 3

$(x - 3)^2 + y^2 = 3^2$

$x^2 + y^2 - 6x = 0$

Para profundizar

79 Dada la circunferencia de centro el origen de coordenadas, y radio, 5

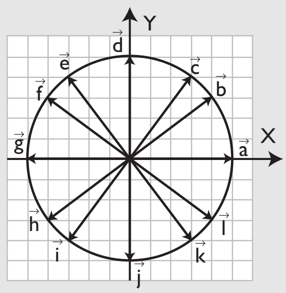


a) representa todos los vectores que nacen en el origen de coordenadas y tienen como extremo un punto de la circunferencia de coordenadas enteras.

b) Escribe la expresión analítica de cada uno de los vectores representados.

Solución:

a) Representación:



b) Expresión analítica:

$\vec{a}(5, 0)$	$\vec{b}(4, 3)$
$\vec{c}(3, 4)$	$\vec{d}(0, 5)$
$\vec{e}(-3, 4)$	$\vec{f}(-4, 3)$
$\vec{g}(-5, 0)$	$\vec{h}(-4, -3)$
$\vec{i}(-3, -4)$	$\vec{j}(0, -5)$
$\vec{k}(3, -4)$	$\vec{l}(4, -3)$

80 Dados los vectores:

$\vec{u}(2, -3)$ y $\vec{v}(-1, 4)$

calcula analíticamente:

a) $3\vec{u} + 5\vec{v}$

b) $5\vec{u} - 3\vec{v}$

Solución:

a) $3(2, -3) + 5(-1, 4) = (1, 11)$

b) $5(2, -3) - 3(-1, 4) = (13, -27)$

81 Dada la siguiente recta:

$5x - 2y + 9 = 0$

halla:

a) el tipo de ecuación.

b) un punto.

c) un vector normal.

d) un vector director.

e) la pendiente.

f) Represéntala.

Solución:

a) Ecuación general.

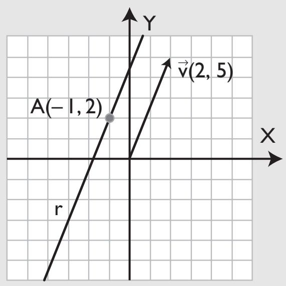
b) $P(-1, 2)$

c) $\vec{n}(5, -2)$

d) $\vec{v}(2, 5)$

e) $m = 5/2$

f) Representación:



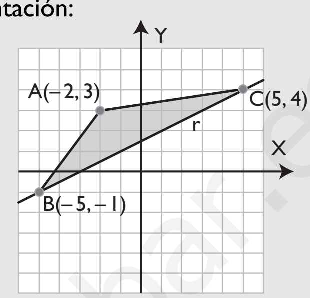
82 Dado el triángulo que tiene los vértices en los puntos $A(-2, 3)$, $B(-5, -1)$ y $C(5, 4)$

a) representa dicho triángulo y dibuja la recta que contiene al lado BC

b) halla la ecuación de dicha recta.

Solución:

a) Representación:



b) Pendiente del lado BC:

$\overrightarrow{BC}(10, 5) \parallel (2, 1)$

$m = \dfrac{1}{2}$

$y + 1 = \dfrac{1}{2}(x + 5)$

$y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$

83 Halla el coeficiente **k** para que la recta: $5x + ky = 1$ pase por el punto $A(-3, 4)$

Solución:

$5 \cdot (-3) + k \cdot 4 = 1$

$k = 4$

84 Un romboide tiene tres vértices en los puntos $A(-5, 1)$, $B(-2, 5)$ y $C(2, 5)$

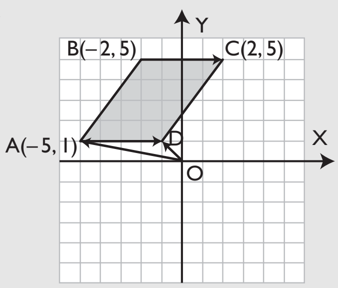
Halla:

a) el cuarto vértice.

b) la longitud de sus diagonales.

Solución:

a) Vértice D



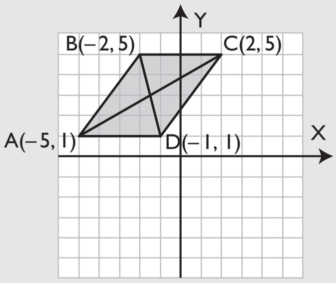
$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{OA}(-5, 1)$

$\overrightarrow{BC}(4, 0)$

$\overrightarrow{OD} = (-5, 1) + (4, 0) = (-1, 1)$

b) Longitud de las diagonales.



$d(A, C) = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65} = 8{,}06$ u

$d(B, D) = |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{17} = 4{,}12$ u

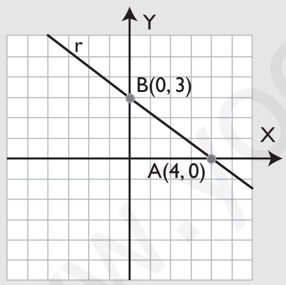
85 Halla la longitud del segmento determinado por los puntos de corte con los ejes coordenados de la recta siguiente:

$$3x + 4y = 12$$

Solución:

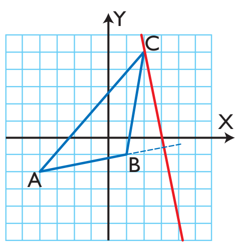
Para $y = 0 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow A(4, 0)$

Para $x = 0 \Rightarrow 4y = 12 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow B(0, 3)$



$d(A, B) = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ unidades.

86 Dado el triángulo de la siguiente figura:



halla la ecuación de la recta que contiene a la altura relativa al vértice C

Solución:

Se aplica la forma punto-pendiente.

Punto C(2, 5)

Pendiente: la altura es perpendicular a la base AB, luego su pendiente es inversa y opuesta de la pendiente del lado AB

$\overrightarrow{AB}(5, 1) \Rightarrow m_{AB} = 1/5$

$m_{\perp} = -5$

$y - 5 = -5(x - 2)$

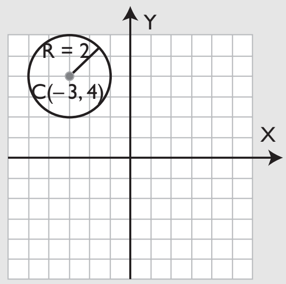
$y = -5x + 15$

87 Halla la ecuación de la circunferencia que tiene el centro en el punto C(–3, 4), y de radio, 2 unidades. Haz el dibujo.

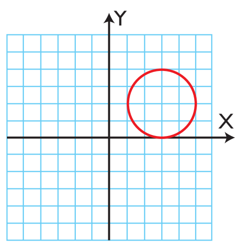
Solución:

$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 2^2$

$x^2 + y^2 + 6x - 8y + 21 = 0$



88 Halla la ecuación de la siguiente circunferencia:



Solución:

Tiene el centro en el punto C(3, 2) y radio, R = 2

$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$

$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$

Aplica tus competencias

89 Halla mentalmente el centro y el radio de la siguiente circunferencia:
$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$

Solución:
C(3, 2), R = 5

90 Halla mentalmente el centro y el radio de la siguiente circunferencia:
$x^2 + y^2 + 8x + 7 = 0$

Solución:
C(– 4, 0), R = 3

91 Halla mentalmente el centro y el radio de la siguiente circunferencia:
$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$

Solución:
C(1, – 3), R = 2

1 Explica cómo se hallan las componentes de un vector definido por dos puntos. Pon un ejemplo.

Solución:

El **vector definido por dos puntos** $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es el que se obtiene al restar al vector de posición del extremo el del origen.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

Sus coordenadas son:

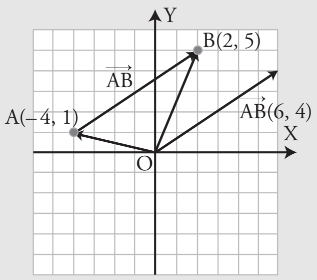
$$\overrightarrow{AB}\,(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Ejemplo

Dados los puntos A(– 4, 1) y B(2, 5), calcula el vector $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}\,(2 - (-4), 5 - 1)$

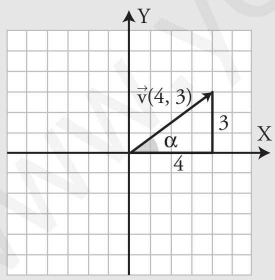
$\overrightarrow{AB}\,(6, 4)$



2 Calcula el módulo y el argumento del vector $\vec{v}(4, 3)$

Solución:

Representación gráfica:



$|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{3}{4}$

$\alpha = 36° 52' 12''$

3 Dada la recta $4x - 3y = 12$, ¿qué tipo de ecuación es? Halla dos puntos, un vector normal, un vector director y la pendiente. Haz la representación gráfica.

Solución:

Es la ecuación general.

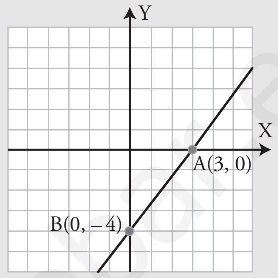
Para $y = 0 \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow A(3, 0)$

Para $x = 0 \Rightarrow -3y = 12 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow B(0, -4)$

$\vec{n}(4, -3)$

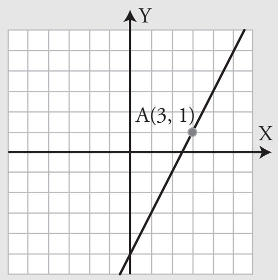
$\vec{v}(3, 4)$

$m = 4/3$



4 Dibuja la recta que pasa por el punto A(3, 1) y tiene de pendiente 2. Halla la ecuación de dicha recta.

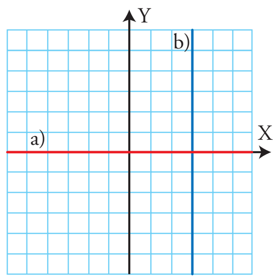
Solución:

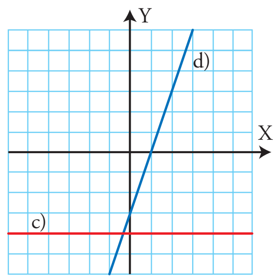


Se aplica la ecuación punto-pendiente

$y - 1 = 2(x - 3) \Rightarrow y = 2x - 5$

5 Halla la ecuación general de las rectas representadas en los siguientes ejes de coordenadas:





Solución:

a) $y = 0$ b) $x = 3$

c) $y = -4$ d) $y = 3x - 3$

6 Estudia analíticamente la posición relativa del siguiente par de rectas. Si se cortan, halla el punto de corte:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 5 \\ x - 3y = 6 \end{array}\right\}$$

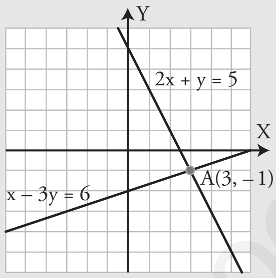
Representa ambas rectas para comprobarlo.

Solución:

Analíticamente:

$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-3} \Rightarrow$ Rectas secantes.

Resolviendo el sistema se halla el punto de corte: A(3, – 1)



7 Dada la recta $2x - 3y = 6$, halla su ecuación vectorial.

Solución:

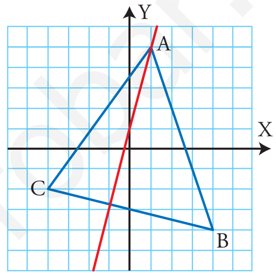
Un punto es: P(3, 0)

El vector normal es: $\vec{n}(2, -3) \Rightarrow \vec{v}(3, 2)$

Ecuación vectorial:

$(x, y) = (3, 0) + t(3, 2); t \in \mathbb{R}$

8 Dado el triángulo de la figura del margen, halla la ecuación de la recta que contiene a la altura relativa al vértice A



Solución:

Punto: A(1, 5)

La altura es perpendicular al lado BC; por tanto, su pendiente es la inversa y opuesta a la de dicho lado.

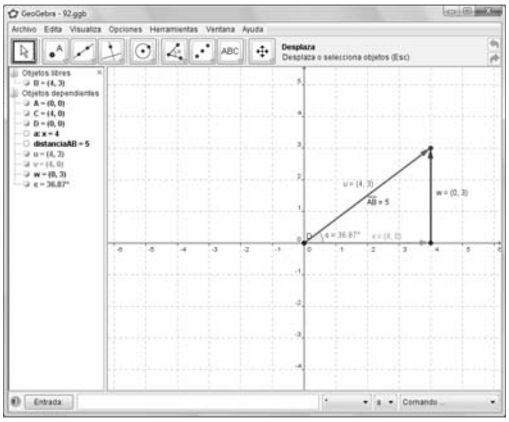
$\overrightarrow{BC}(8, -2) \parallel (4, -1) \Rightarrow m_{BC} = -1/4$

$m_\perp = 4$

$y - 5 = 4(x - 1) \Rightarrow y = 4x + 1$

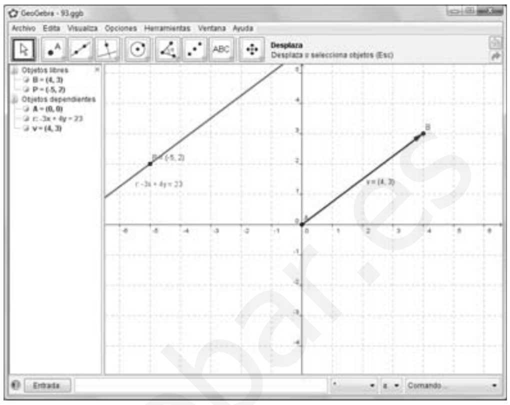
Paso a paso

92 Dibuja el vector **u(4, 3)** y sus componentes. Halla el módulo y el argumento.



Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

93 Dibuja la recta que pasa por el punto **P(– 5, 2)** y tiene de vector director a **v(4, 3).** Halla la ecuación de la recta.

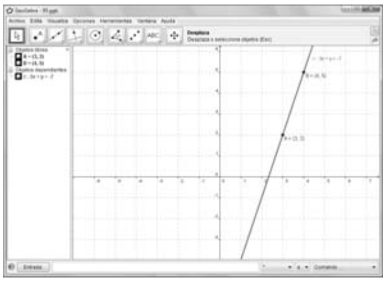


Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

94 **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

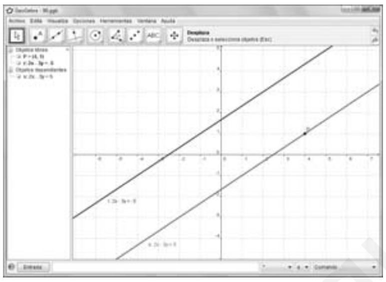
Practica

95 Dibuja la recta que pasa por los puntos **A(3, 2)** y **B(4, 5)** y halla su ecuación.



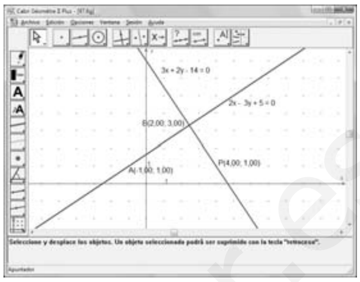
Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

96 Dada la recta **r ≡ 2x – 3y + 5 = 0,** halla una recta **s,** paralela a **r,** que pase por el punto **P(4, 1)**



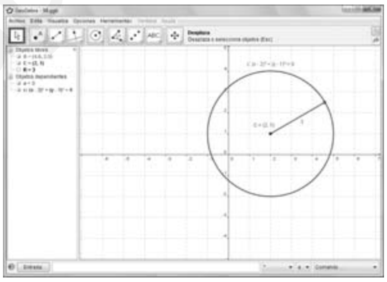
Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

97 Dada la recta **r ≡ 2x – 3y + 5 = 0,** halla una recta **t,** perpendicular a **r,** que pase por el punto **P(4, 1)**



Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

98 Dibuja la circunferencia de centro **C(2, 1)** y radio **R = 3.** Halla su ecuación.



Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.