



Amparo quiere fabricar las cuatro velas que ha diseñado sobre el lienzo, pero aún no se ha decidido sobre alguna de sus dimensiones. Para hacerlo necesita saber su volumen (¿cuánta cera gastará?) y su superficie total (¿cuánto le costará pintarlas?).

- 1** Escribe la expresión del volumen de los cuatro objetos en función de r o de l . Averigua su valor para $r = 6$ cm y para $l = 10$ cm.

$$V_{\text{CILINDRO}} = \pi \cdot r^2 \cdot 20 = \pi \cdot 36 \cdot 20 = 720\pi \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{ESFERA}} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 6^3 = 288\pi \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{CUBO}} = l^3 = 10^3 = 1\,000 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{PARALELEPÍPEDO}} = 20l^2 = 20 \cdot 10^2 = 2\,000 \text{ cm}^3$$

2 Escribe la expresión de la superficie total de estos cuatro objetos en función de r o de l . Averigua su valor para $r = 6$ cm y para $l = 10$ cm.

$$A_{\text{CILINDRO}} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 20 = 2\pi r^2 + 40\pi r = 72\pi + 240\pi = 312\pi \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{ESFERA}} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 36 = 144\pi \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{CUBO}} = 6l^2 = 6 \cdot 10^2 = 600 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{PARALELEPÍPEDO}} = 2l^2 + 4l \cdot 20 = 2l^2 + 80l = 200 + 800 = 1\,000 \text{ cm}^2$$

PÁGINA 43

ANTES DE COMENZAR, RECUERDA

1 Opera y simplifica.

$$\begin{aligned} & (5x^2 - 4x + 2) \cdot [(2x^3 - 3x + 2) - (2x + 1)(x^2 - 2x)] \\ & (5x^2 - 4x + 2) \cdot [(2x^3 - 3x + 2) - (2x + 1)(x^2 - 2x)] = \\ & = (5x^2 - 4x + 2) [(2x^3 - 3x + 2) - (2x^3 - 4x^2 + x^2 - 2x)] = \\ & = (5x^2 - 4x + 2) [3x^2 - x + 2] = \\ & = 15x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 12x^3 + 4x^2 - 8x + 6x^2 - 2x + 4 = \\ & = 15x^4 - 17x^3 + 20x^2 - 10x + 4 \end{aligned}$$

2 Extrae factor común en $35x^5 - 42x^4 + 14x^3$.

$$35x^5 - 42x^4 + 14x^3 = 7x^3(5x^2 - 6x + 2)$$

3 Desarrolla las siguientes expresiones:

a) $(7x^2 - 3)^2$

b) $(2x + 3x^2)^2$

c) $(\sqrt{3}x - \sqrt{2})(\sqrt{3}x + \sqrt{2})$

d) $(\sqrt{5}x^2 + 2x)(\sqrt{5}x^2 - 2x)$

a) $(7x^2 - 3)^2 = 49x^4 - 42x^2 + 9$

b) $(2x + 3x^2)^2 = 4x^2 + 12x^3 + 9x^4$

c) $(\sqrt{3}x - \sqrt{2})(\sqrt{3}x + \sqrt{2}) = 3x^2 - 2$

d) $(\sqrt{5}x^2 + 2x)(\sqrt{5}x^2 - 2x) = 5x^4 - 4x^2$

4 Expresa en forma de producto:

a) $36x^4 + 60x^3 + 25x^2$

b) $36x^4 - 60x^3 + 25x^2$

c) $144x^4 - x^2$

d) $3x^4 - 4x^2$ (recuerda que $3 = (\sqrt{3})^2$)

e) $3x^4 - \sqrt{24}x^3 + 2x^2$

f) $3x^2 - 5$

a) $(6x^2 + 5x)^2$

b) $(6x^2 - 5x)^2$

c) $(12x^2 + x)(12x^2 - x)$

d) $(\sqrt{3}x^2 + 2x)(\sqrt{3}x^2 - 2x)$

e) $(\sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}x)^2$

f) $(\sqrt{3}x + \sqrt{5})(\sqrt{3}x - \sqrt{5})$

PÁGINA 44**1** Efectúa las siguientes divisiones y expresa el resultado así:

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$$

Indica en qué casos la división es exacta y, por tanto, el dividendo se ha factorizado:

a) $(x^5 - 7x^4 + x^3 - 8) : (x^2 - 3x + 1)$

b) $(4x^5 + 20x^4 - 18x^3 - 28x^2 + 28x - 6) : (x^2 + 5x - 3)$

c) $(6x^4 + 3x^3 - 2x) : (3x^2 + 2)$

d) $(45x^5 + 120x^3 + 80x) : (3x^2 + 4)$

$$\begin{array}{r} a) \quad x^5 - 7x^4 + \quad x^3 \qquad \qquad \qquad - 8 \qquad \qquad \qquad \left| \begin{array}{l} x^2 - 3x + 1 \\ \hline x^3 - 4x^2 - 12x - 32 \end{array} \right. \\ \underline{-x^5 + 3x^4 - \quad x^3} \\ -4x^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{4x^4 - 12x^3 + \quad 4x^2} \\ -12x^3 + \quad 4x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{12x^3 - 36x^2 + 12x} \\ -32x^2 + 12x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{+32x^2 - 96x + 32} \\ -84x + 24 \end{array}$$

$$-84x + 24$$

$$x^5 - 7x^4 + x^3 = (x^2 - 3x + 1)(x^3 - 4x^2 - 12x - 32) - 84x + 24$$

$$\begin{array}{r} b) \quad 4x^5 + 20x^4 - 18x^3 - 28x^2 + 28x - 6 \qquad \left| \begin{array}{l} x^2 + 5x - 3 \\ \hline 4x^3 - 6x + 2 \end{array} \right. \\ \underline{-4x^5 - 20x^4 + 12x^3} \\ -6x^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{6x^3 + 30x^2 - 18x} \\ 2x^2 + 10x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{-2x^2 - 10x + 6} \\ 0 \end{array}$$

0

La división es exacta.

$$4x^5 + 20x^4 - 18x^3 - 28x^2 + 28x - 6 = (x^2 + 5x - 3)(4x^3 - 6x + 2)$$

$$\begin{array}{r}
 c) \quad 6x^4 + 3x^3 \quad - 2x \qquad \left| \begin{array}{l} 3x^2 + 2 \\ 2x^2 + x - 4/3 \end{array} \right. \\
 \underline{-6x^4 \qquad - 4x^2} \\
 3x^3 - 4x^2 \\
 \underline{-3x^3 \qquad - 2x} \\
 -4x^2 - 4x \\
 \underline{4x^2 \qquad + 8/3} \\
 -4x + 8/3
 \end{array}$$

$$6x^4 + 3x^2 - 2x = (3x^2 + 2)(2x^2 + x - 4/3) - 4x + 8/3$$

$$\begin{array}{r}
 d) \quad 45x^5 + 120x^3 + 80x \qquad \left| \begin{array}{l} 3x^2 + 4 \\ 15x^3 + 20x \end{array} \right. \\
 \underline{-45x^5 - 60x^3} \\
 60x^3 \\
 \underline{-60x^3 - 80x} \\
 0
 \end{array}$$

La división es exacta.

$$45x^5 + 120x^3 + 80x = (3x^2 + 4)(15x^3 + 20x)$$

PÁGINA 45

2 Aplica la regla de Ruffini para efectuar las siguientes divisiones:

a) $(5x^4 + 6x^2 - 11x + 13) : (x - 2)$

b) $(6x^5 - 3x^4 + 2x) : (x + 1)$

c) $(3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 2x + 13) : (x - 4)$

d) $(6x^4 + 4x^3 - 51x^2 - 3x - 9) : (x + 3)$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 a) & 5 & 0 & 6 & -11 & 13 \\
 2 & & 10 & 20 & 52 & 82 \\
 \hline
 & 5 & 10 & 26 & 41 & \underline{95}
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l} \text{COCIENTE: } 5x^3 + 10x^2 + 26x + 41 \\ \text{RESTO: } 95 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrrrr}
 b) & 6 & -3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
 -1 & & -6 & 9 & -9 & 9 & -11 \\
 \hline
 & 6 & -9 & 9 & -9 & 11 & \underline{-11}
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l} \text{COCIENTE: } 6x^4 - 9x^3 + 9x^2 - 9x + 11 \\ \text{RESTO: } -11 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 c) & 3 & -5 & 7 & -2 & 13 \\
 4 & & 12 & 28 & 140 & 552 \\
 \hline
 & 3 & 7 & 35 & 138 & \underline{565}
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l} \text{COCIENTE: } 3x^3 + 7x^2 + 35x + 138 \\ \text{RESTO: } 565 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 d) & 6 & 4 & -51 & -3 & -9 \\
 -3 & & -18 & 42 & 27 & -72 \\
 \hline
 & 6 & -14 & -9 & 24 & \underline{-81}
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l} \text{COCIENTE: } 6x^3 - 14x^2 - 9x + 24 \\ \text{RESTO: } -81 \end{array}$$

- 3** En cada una de las divisiones efectuadas en el ejercicio anterior, expresa el resultado de estas dos formas distintas:

$$P(x) = (x - a) \cdot C(x) + R \qquad \frac{P(x)}{x - a} = C(x) + \frac{R}{x - a}$$

a) $5x^4 + 6x^2 - 11x + 13 = (x - 2)(5x^3 + 10x^2 + 26x + 41) + 95$

$$\frac{5x^4 + 6x^2 - 11x + 13}{x - 2} = 5x^3 + 10x^2 + 26x + 41 + \frac{95}{x - 2}$$

b) $6x^5 - 3x^4 + 2x = (x + 1)(6x^4 - 9x^3 + 9x^2 - 9x + 11) - 11$

$$\frac{6x^5 - 3x^4 + 2x}{x + 1} = 6x^4 - 9x^3 + 9x^2 - 9x + 11 - \frac{11}{x + 1}$$

c) $3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 2x + 13 = (x - 4)(3x^3 + 7x^2 + 35x + 138) + 565$

$$\frac{3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 2x + 13}{x - 4} = 3x^3 + 7x^2 + 35x + 138 + \frac{565}{x - 4}$$

d) $6x^4 + 4x^3 - 51x^2 - 3x - 9 = (x + 3)(6x^3 - 14x^2 - 9x + 24) - 81$

$$\frac{6x^4 + 4x^3 - 51x^2 - 3x - 9}{x + 3} = 6x^3 - 14x^2 - 9x + 24 - \frac{81}{x + 3}$$

PÁGINA 46

- 1** El polinomio $x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x - 12$ es divisible por $x - a$ para dos valores enteros de a . Localízalos y da el cociente en ambos casos.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 3 & -2 & -10 & -12 \\ & & 2 & 10 & 16 & 12 \\ \hline & 1 & 5 & 8 & 6 & 0 \end{array} \qquad a = 2$$

COCIENTE: $x^3 + 5x^2 + 8x + 6$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -3 & 1 & 3 & -2 & -10 & -12 \\ & & -3 & 0 & 6 & 12 \\ \hline & 1 & 0 & -2 & -4 & 0 \end{array} \qquad a = -3$$

COCIENTE: $x^3 - 2x - 4$

- 2** Comprueba que el polinomio $x^4 + x^3 + 7x^2 + 2x + 10$ no es divisible por $x - a$ para ningún valor entero de a .

Probaremos con los divisores de 10 que sean negativos. No lo haremos con los positivos porque, al ser todos los coeficientes del polinomio positivos, no conseguiremos, en ningún caso, encontrar un resto cero.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 1 & 7 & 2 & 10 \\ & & -1 & 0 & -7 & 5 \\ \hline & 1 & 0 & 7 & -5 & 15 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & 1 & 7 & 2 & 10 \\ & & -2 & 2 & -18 & 32 \\ \hline & 1 & -1 & 9 & -16 & 42 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -5 & 1 & 1 & 7 & 2 & 10 \\ & & -5 & 20 & -135 & 665 \\ \hline & 1 & -4 & 27 & -133 & 675 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrr} -10 & 1 & 1 & 7 & 2 & 10 \\ & & -10 & 90 & -970 & 9680 \\ \hline & 1 & -9 & 97 & -968 & 9690 \end{array}$$

PÁGINA 47

3 Utiliza la regla de Ruffini para hallar $P(a)$ en los siguientes casos:

a) $P(x) = 7x^4 - 5x^2 + 2x - 24$, $a = 2$, $a = -5$, $a = 10$

b) $P(x) = 3x^3 - 8x^2 + 3x$, $a = -3$, $a = 1$, $a = 8$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 7 & 0 & -5 & 2 & -24 \\ & & 14 & 28 & 46 & 96 \\ \hline & 7 & 14 & 23 & 48 & \underline{72} \end{array} \quad P(2) = 72$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -5 & 7 & 0 & -5 & 2 & -24 \\ & & -35 & 175 & -850 & 4240 \\ \hline & 7 & -35 & 170 & -848 & \underline{4216} \end{array} \quad P(-5) = 4216$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 10 & 7 & 0 & -5 & 2 & -24 \\ & & 70 & 700 & 6950 & 69520 \\ \hline & 7 & 70 & 695 & 6952 & \underline{69496} \end{array} \quad P(10) = 69496$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 3 & -8 & 3 & 0 \\ & & -9 & 51 & -162 \\ \hline & 3 & -17 & 54 & \underline{-162} \end{array} \quad P(-3) = -162$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & -8 & 3 & 0 \\ & & 3 & -5 & -2 \\ \hline & 3 & -5 & -2 & \underline{-2} \end{array} \quad P(1) = -2$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 8 & 3 & -8 & 3 & 0 \\ & & 24 & 128 & 1048 \\ \hline & 3 & 16 & 131 & \underline{1048} \end{array} \quad P(8) = 1048$$

PÁGINA 48

Cálculo mental

Di si 0, 1, -1, 2 o -2 son raíces de los siguientes polinomios:

a) $x^3 - 4x$

b) $x^4 - x^3 - 2x^2$

c) $x^3 + x^2 - 25x - 25$

d) $x^5 - 5x^3 + 4x$

a) Son raíces: 0, 2 y -2

b) Son raíces: 0, -1 y 2

c) Son raíces: -1

d) Son raíces: 0, 1, -1, 2 y -2

2 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

PÁGINA 49

1 Factoriza los siguientes polinomios:

a) $3x^2 + 2x - 8$

b) $3x^5 - 48x$

c) $2x^3 + x^2 - 5x + 12$

d) $x^3 - 7x^2 + 8x + 16$

e) $x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 60x$

f) $9x^4 - 36x^3 + 26x^2 + 4x - 3$

$$a) x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 8 \cdot 3}}{6} = \frac{-2 \pm 10}{6} = \begin{cases} 4/3 \\ -2 \end{cases}$$

$$3x^2 + 2x - 8 = 3 \left(x - \frac{4}{3} \right) (x + 2) = (3x - 4)(x + 2)$$

$$b) 3x^5 - 48x = x(3x^4 - 48) = 3x(x^4 - 16) = 3x(x^2 + 4)(x^2 - 4) = 3x(x + 2)(x - 2)(x^2 + 4)$$

c) Probamos con los divisores enteros de 12 y no encontramos ningún resto cero.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 1 & -5 & 12 \\ -3 & & -6 & 15 & -30 \\ \hline & 2 & -5 & 10 & -18 \end{array}$$

No podemos factorizar el polinomio $2x^3 + x^2 - 5x + 12$.

$$d) \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 8 & 16 \\ 4 & & 4 & -12 & -16 \\ \hline & 1 & -3 & -4 & 0 \end{array}$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

$$x^3 - 7x^2 + 8x + 16 = (x - 4)^2(x + 1)$$

e) $x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 60x = x(x^3 + 2x^2 - 23x - 60)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -23 & -60 \\ 5 & & 5 & 35 & 60 \\ \hline & 1 & 7 & 12 & 0 \end{array}$$

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{-7 \pm 1}{2} = \begin{cases} -4 \\ -3 \end{cases}$$

$$x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 60x = x(x - 5)(x + 4)(x + 3)$$

$$f) \begin{array}{r|rrrrr} & 9 & -36 & 26 & 4 & -3 \\ 1 & & 9 & -27 & -1 & 3 \\ \hline & 9 & -27 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & & 27 & 0 & -3 & \\ \hline & 9 & 0 & -1 & 0 & \end{array}$$

$$9x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm \frac{1}{3}$$

$$9x^2 - 1 = (3x + 1)(3x - 1)$$

$$9x^4 - 36x^3 + 26x^2 + 4x - 3 = (x - 1)(x - 3)(3x + 1)(3x - 1)$$

PÁGINA 50

Cálculo mental

Halla el máx.c.d. y el mín.c.m. de los siguientes pares de polinomios:

- a) $x^2 - 1$ y $(x + 1)^2$ b) $x^2 + x$ y $x^2 - x$
c) $x^3 - x$ y $x^2 - 1$ d) $x^2 + 1$ y x^2

- a) máx.c.d. $[x^2 - 1, (x + 1)^2] = x + 1$
mín.c.m. $[x^2 - 1, (x + 1)^2] = (x + 1)^2(x - 1)$
b) máx.c.d. $[x^2 + x, x^2 - x] = x$
mín.c.m. $[x^2 + x, x^2 - x] = x(x - 1)(x + 1)$
c) máx.c.d. $[x^3 - x, x^2 - 1] = (x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$
mín.c.m. $[x^3 - x, x^2 - 1] = x(x + 1)(x - 1) = x^3 - x$
d) máx.c.d. $[x^2 + 1, x^2] = 1$
mín.c.m. $[x^2 + 1, x^2] = x^2(x^2 + 1)$

1 Razona si existe alguna relación de divisibilidad entre los siguientes pares de polinomios:

- a) $P(x) = x^3 - 7x^2$ y $Q(x) = x^3 - 7x$
b) $P(x) = x^3 - 7x^2$ y $Q(x) = x^2 - 7x$
c) $P(x) = x^4 - 3x - 10$ y $Q(x) = x - 2$

a) $\left. \begin{array}{l} P(x) = x^2(x - 7) \\ Q(x) = x(x^2 - 7) \end{array} \right\}$ No existe ninguna relación de divisibilidad.

b) $\left. \begin{array}{l} P(x) = x^2(x - 7) \\ Q(x) = x(x - 7) \end{array} \right\}$ $Q(x)$ divide a $P(x)$.

c)

1	0	0	-3	-10
2	2	4	8	10
1	2	4	5	0

$\left. \begin{array}{l} P(x) = (x - 2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 5) \\ Q(x) = x - 2 \end{array} \right\}$ $Q(x)$ divide a $P(x)$.

2 Busca dos polinomios de tercer grado que sean divisibles por $x - 5$ y x . Halla su máx.c.d. y su mín.c.m.

Por ejemplo:

$$x(x - 5)(x - 2) = x^3 - 7x^2 + 10x$$

$$x(x - 5)x = x^3 - 5x^2$$

$$\text{máx.c.d. } [x^3 - 7x^2 + 10x, x^3 - 5x^2] = x(x - 5)$$

$$\text{mín.c.m. } [x^3 - 7x^2 + 10x, x^3 - 5x^2] = x^2(x - 5)(x - 2)$$

2 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

3 $P(x) = (x-2)^2x^2$. Busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

a) máx.c.d. $[P(x), Q(x)] = x^2 - 2x$

b) mín.c.m. $[P(x), Q(x)] = (x-2)^2x^2(x+5)$

$$P(x) = (x-2)^2x^2$$

Si máx.c.d. $[P(x), Q(x)] = x^2 - 2x = x(x-2)$ y

mín.c.m. $[P(x), Q(x)] = (x-2)^2x^2(x+5)$,

debe ser $Q(x) = x(x-2)(x+5)$

4 Di cuáles de los siguientes polinomios son irreducibles. Descompón en factores los que no lo sean.

a) $x^2 - 3x + 2$

b) $x^2 - 5x + 6$

c) $3x^2 + 5x$

d) $3x^2 - 5x - 2$

e) $3x^2 - 5x + 3$

f) $3x^3 - 5x^2 + 3x$

$$a) x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$$

$$b) x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$$

c) $3x^2 + 5x = x(3x+5)$

$$d) x = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} = \begin{matrix} 2 \\ -1/3 \end{matrix}$$

$$3x^2 - 5x - 2 = (x-2)(3x+1)$$

e) $x = \frac{5 \pm \sqrt{25-36}}{6}$ No tiene solución.

$3x^2 - 5x + 3$ es irreducible.

f) $3x^3 - 5x^2 + 3x = x(3x^2 - 5x + 3)$

$3x^2 - 5x + 3$ es irreducible (apartado e)).

5 Calcula el máx.c.d. y el mín.c.m. de cada pareja de polinomios:

a) $P(x) = x^2 - 9$, $Q(x) = x^2 - 6x + 9$

b) $P(x) = x^3 - 7x^2 + 12x$, $Q(x) = x^4 - 3x^3 - 4x^2$

c) $P(x) = x(x-3)^2(x+5)$, $Q(x) = x^3(x-3)(x^2+x+2)$

a) $P(x) = (x+3)(x-3)$ $Q(x) = (x-3)^2$

máx.c.d. $[P(x), Q(x)] = x-3$

mín.c.m. $[P(x), Q(x)] = (x-3)^2(x+3)$

b) $P(x) = x(x^2 - 7x + 12) = x(x-4)(x-3)$ $Q(x) = x^2(x-4)(x+1)$

máx.c.d. $[P(x), Q(x)] = x(x-4)$

mín.c.m. $[P(x), Q(x)] = x^2(x-4)(x-3)(x+1)$

c) $P(x) = x(x-3)^2(x+5)$ $Q(x) = x^3(x-3)(x^2+x+2)$

máx.c.d. $[P(x), Q(x)] = x(x-3)$

mín.c.m. $[P(x), Q(x)] = x^3(x-3)^2(x+5)(x^2+x+2)$

PÁGINA 51

Cálculo mental

1 Simplifica estas fracciones:

a) $\frac{2x}{x^2 + x}$

b) $\frac{x + 1}{(x + 1)^2}$

c) $\frac{x + 1}{x^2 - 1}$

d) $\frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}$

e) $\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 3x}$

f) $\frac{x^3 - 4x^2}{x^3}$

a) $\frac{2}{x + 1}$

b) $\frac{1}{x + 1}$

c) $\frac{1}{x - 1}$

d) $x - 3$

e) $\frac{x - 2}{x - 3}$

f) $\frac{x - 4}{x}$

2 Di si cada par de fracciones son equivalentes o no.

a) $\frac{x - 3}{x^2 - 3x}$ y $\frac{x}{x^2}$

b) $\frac{x}{x - 1}$ y $\frac{x - 1}{x}$

c) $\frac{1}{x - 1}$ y $\frac{x + 1}{x^2 - 1}$

a) $\frac{x - 3}{x^2 - 3x} = \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2} \rightarrow$ Son equivalentes.

b) $\frac{x}{x - 1} \neq \frac{x - 1}{x} \rightarrow x^2 \neq (x - 1)^2$. No son equivalentes.

c) $\frac{1}{x - 1} = \frac{x + 1}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x + 1}{x^2 - 1}$. Sí son equivalentes.

1 Simplifica las siguientes fracciones:

a) $\frac{2x^2 - 6x}{4x^3 - 2x}$

b) $\frac{(x - 3)^2 x(x + 3)}{(x - 3)x^2(x + 2)}$

c) $\frac{x^3 + 3x^2 + x + 3}{x^3 + 3x^2}$

d) $\frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^3 - x^2 - 14x + 24}$

a) $\frac{2x^2 - 6x}{4x^3 - 2x} = \frac{2x(x - 3)}{2x(2x^2 - 1)} = \frac{x - 3}{2x^2 - 1}$

b) $\frac{(x - 3)^2 x(x + 3)}{(x - 3)x^2(x + 2)} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x(x + 2)}$

c) $\frac{x^3 + 3x^2 + x + 3}{x^3 + 3x^2} = \frac{(x + 3)(x^2 + 1)}{x^2(x + 3)} = \frac{x^2 + 1}{x^2}$

d) $\frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^3 - x^2 - 14x + 24} = \frac{x(x^2 - 5x + 6)}{x^3 - x^2 - 14x + 24} = \frac{x(x - 2)(x - 3)}{(x - 2)(x - 3)(x + 4)} = \frac{x}{x + 4}$

2 Comprueba si cada par de fracciones son equivalentes:

$$\text{a) } \frac{x^3 - x}{x^3 + x^2} \text{ y } \frac{3x - 3}{3x} \qquad \text{b) } \frac{(x + 5)^2}{x^3 + 10x^2 + 25x} \text{ y } \frac{x - 3}{3x - x^2}$$

$$\text{a) } \frac{x^3 - x}{x^3 + x^2} = \frac{x(x^2 - 1)}{x(x^2 + x)} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x(x + 1)} = \frac{x - 1}{x} = \frac{3x - 3}{3x}. \text{ Son equivalentes.}$$

$$\text{b) } \frac{(x + 5)^2}{x^3 + 10x^2 + 25x} = \frac{(x + 5)^2}{x(x + 5)^2} = \frac{1}{x} = \frac{x - 3}{x(x - 3)} = \frac{x - 3}{x^2 - 3x} \neq \frac{x - 3}{3x - x^2}$$

No son equivalentes.

PÁGINA 52

Cálculo mental

1 Reduce a común denominador:

$$\text{a) } \frac{3x + 1}{x^2} \text{ y } \frac{3}{x}$$

$$\text{b) } \frac{5}{x - 1} \text{ y } \frac{x}{(x + 1)(x - 1)}$$

$$\text{c) } \frac{3}{x + 1} \text{ y } \frac{2}{x^2 - 1}$$

$$\text{a) } \frac{3x + 1}{x^2}; \frac{3x}{x^2}$$

$$\text{b) } \frac{5(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)}; \frac{x}{(x - 1)(x + 1)}$$

$$\text{c) } \frac{3(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{3(x - 1)}{x^2 - 1}; \frac{2}{x^2 - 1}$$

2 Opera.

$$\text{a) } \frac{3x + 1}{x^2} - \frac{3}{x}$$

$$\text{b) } \frac{3}{x + 1} + \frac{2}{x^2 - 1}$$

$$\text{c) } \frac{2x}{x + 2} \cdot \frac{x^2 - 4}{x}$$

$$\text{d) } \frac{x^2}{x^2 - 25} : \frac{x}{x - 5}$$

$$\text{a) } \frac{1}{x^2}$$

$$\text{b) } \frac{3x - 1}{x^2 - 1}$$

$$\text{c) } 2(x - 2)$$

$$\text{d) } \frac{x}{x + 5}$$

3 Efectúa las operaciones y simplifica el resultado.

$$\text{a) } \frac{2x+1}{x+3} - \frac{x^2+5}{x^2+3x}$$

$$\text{b) } \frac{3}{x} \left(\frac{x}{x+1} - \frac{x^2}{x^2-1} \right)$$

$$\text{c) } \frac{5x-10}{x+3} \cdot \frac{x^2-9}{x-2}$$

$$\text{d) } \frac{3x-1}{x} - \frac{x+3}{x^2-2x} + \frac{2x+5}{x-2}$$

$$\text{e) } \frac{2x+1}{2x-1} : \frac{x^2}{4x-2}$$

$$\text{f) } \frac{x^2}{x-1} : \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} \right)$$

$$\text{a) } \frac{2x+1}{x+3} - \frac{x^2+5}{x^2+3x} = \frac{(2x+1) \cdot x - (x^2+5)}{x^2+3x} = \frac{2x^2+x-x^2-5}{x^2+3x} = \frac{x^2+x-5}{x^2+3x}$$

$$\text{b) } \frac{3}{x} \left(\frac{x}{x+1} - \frac{x^2}{x^2-1} \right) = \frac{3}{x} \left(\frac{x(x-1)-x^2}{x^2-1} \right) = \frac{3(x-1-x)}{x^2-1} = \frac{-3}{x^2-1}$$

$$\text{c) } \frac{5x-10}{x+3} \cdot \frac{x^2-9}{x-2} = \frac{5(x-2)(x+3)(x-3)}{(x+3)(x-2)} = 5(x-3)$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{3x-1}{x} - \frac{x+3}{x^2-2x} + \frac{2x+5}{x-2} &= \frac{(3x-1)(x-2) - (x+3) + x(2x+5)}{x(x-2)} = \\ &= \frac{3x^2-7x+2-x-3+2x^2+5x}{x(x-2)} = \frac{5x^2-3x-1}{x(x-2)} \end{aligned}$$

$$\text{e) } \frac{2x+1}{2x-1} : \frac{x^2}{4x-2} = \frac{(2x+1) \cdot 2 \cdot (2x-1)}{x^2(2x-1)} = \frac{2(2x+1)}{x^2}$$

$$\text{f) } \frac{x^2}{x-1} : \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} \right) = \frac{x^2}{x-1} : \left(\frac{x-1-x}{x(x-1)} \right) = \frac{x^3(x-1)}{-(x-1)} = -x^3$$

PÁGINA 53

PRACTICA

Operaciones con polinomios

1 ■■■ Opera y simplifica las siguientes expresiones:

a) $3x(2x - 1) - (x - 3)(x + 3) + (x - 2)^2$

b) $(2x - 1)^2 + (x - 1)(3 - x) - 3(x + 5)^2$

c) $\frac{4}{3}(x - 3)^2 - \frac{1}{3}(3x - 1)(3x + 1) - \frac{1}{3}(4x^3 + 35)$

a) $6x^2 - 3x - x^2 + 9 + x^2 - 4x + 4 = 6x^2 - 7x + 13$

b) $4x^2 - 4x + 1 - x^2 + 4x - 3 - 3x^2 - 30x - 75 = -30x - 77$

c) $\frac{4}{3}(x^2 - 6x + 9) - \frac{1}{3}(9x^2 - 1) - \frac{1}{3}(4x^3 + 35) =$

$$= \frac{4}{3}x^2 - 8x + 12 - 3x^2 + \frac{1}{3} - \frac{4}{3}x^3 - \frac{35}{3} = -\frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{3}x^2 - 8x + \frac{2}{3}$$

2 ■■■ Efectúa las siguientes operaciones y simplifica el resultado:

a) $(2y + x)(2y - x) + (x + y)^2 - x(y + 3)$

b) $3x(x + y) - (x - y)^2 + (3x + y)y$

c) $(2y + x + 1)(x - 2y) - (x + 2y)(x - 2y)$

a) $4y^2 - x^2 + x^2 + 2xy + y^2 - xy - 3x = 5y^2 + xy - 3x$

b) $3x^2 + 3xy - x^2 + 2xy - y^2 + 3xy + y^2 = 2x^2 + 8xy$

c) $2yx - 4y^2 + x^2 + 2xy + x - 2y - x^2 + 4y^2 = x - 2y$

3 ■■■ Multiplica cada expresión por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica:

a) $\frac{3x(x + 5)}{5} - \frac{(2x + 1)^2}{4} + \frac{(x - 4)(x + 4)}{2}$

b) $\frac{(8x^2 - 1)(x^2 + 2)}{10} - \frac{(3x^2 + 2)^2}{15} + \frac{(2x + 3)(2x - 3)}{6}$

a) $20 \left[\frac{3x(x + 5)}{5} - \frac{(2x + 1)^2}{4} + \frac{(x - 4)(x + 4)}{2} \right] =$

$$= 12x^2 + 60x - 5(4x^2 + 4x + 1) + 10(x^2 - 16) =$$

$$= 12x^2 + 60x - 20x^2 - 20x - 5 + 10x^2 - 160 = 2x^2 + 40x - 165$$

b) $3(8x^4 + 15x^2 - 2) - 2(9x^4 + 12x^2 + 4) + 5(4x^2 - 9) =$

$$= 24x^4 + 45x^2 - 6 - 18x^4 - 24x^2 - 8 + 20x^2 - 45 = 6x^4 + 41x^2 - 59$$

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

4 ■■■ Halla el cociente y el resto de cada una de estas divisiones:

a) $(7x^2 - 5x + 3) : (x^2 - 2x + 1)$

b) $(2x^3 - 7x^2 + 5x - 3) : (x^2 - 2x)$

c) $(x^3 - 5x^2 + 2x + 4) : (x^2 - x + 1)$

$$\begin{array}{r} 7x^2 - 5x + 3 \quad | \quad x^2 - 2x + 1 \\ -7x^2 + 14x - 7 \\ \hline 9x - 4 \end{array}$$

COCIENTE: 7
RESTO: $9x - 4$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 7x^2 + 5x - 3 \quad | \quad x^2 - 2x \\ -2x^3 + 4x^2 \\ \hline -3x^2 \\ 3x^2 - 6x \\ \hline -x - 3 \end{array}$$

COCIENTE: $2x - 3$
RESTO = $-x - 3$

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x^2 + 2x + 4 \quad | \quad x^2 - x + 1 \\ -x^3 + x^2 - x \\ \hline -4x^2 + x \\ 4x^2 - 4x + 4 \\ \hline -3x + 8 \end{array}$$

COCIENTE: $x - 4$
RESTO: $-3x + 8$

5 ■■■ Calcula el cociente y el resto de las divisiones siguientes:

a) $(3x^5 - 2x^3 + 4x - 1) : (x^3 - 2x + 1)$

b) $(x^4 - 5x^3 + 3x - 2) : (x^2 + 1)$

c) $(4x^5 + 3x^3 - 2x) : (x^2 - x + 1)$

$$\begin{array}{r} 3x^5 - 2x^3 \quad + 4x - 1 \quad | \quad x^3 - 2x + 1 \\ -3x^5 + 6x^3 - 3x^2 \\ \hline 4x^3 - 3x^2 \\ -4x^3 \quad + 8x - 4 \\ \hline -3x^2 + 12x - 5 \end{array}$$

COCIENTE: $3x^2 + 4$
RESTO: $-3x^2 + 12x - 5$

$$\begin{array}{r} x^4 - 5x^3 \quad + 3x - 2 \quad | \quad x^2 + 1 \\ -x^4 \quad - x^2 \\ \hline -5x^3 - x^2 \\ 5x^3 \quad + 5x \\ \hline -x^2 + 8x \\ x^2 \quad + 1 \\ \hline 8x - 1 \end{array}$$

COCIENTE: $x^2 - 5x - 1$
RESTO: $8x - 1$

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

$$\begin{array}{r}
 c) \quad 4x^5 \quad + 3x^3 \quad - 2x \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - x + 1 \\ \hline 4x^3 + 4x^2 + 3x - 1 \end{array} \right. \\
 \underline{-4x^5 + 4x^4 - 4x^3} \\
 4x^4 - x^3 \\
 \underline{-4x^4 + 4x^3 - 4x^2} \\
 3x^3 - 4x^2 \\
 \underline{-3x^3 + 3x^2 - 3x} \\
 -x^2 - 5x \\
 \underline{x^2 - x + 1} \\
 -6x + 1
 \end{array}$$

COCIENTE: $4x^3 + 4x^2 + 3x - 1$
 RESTO: $-6x + 1$

6 ■■■ Divide y comprueba que:

Dividendo = divisor × cociente + resto

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - 5x^2 + 3x + 1) : (x^2 - 5x + 1) \\
 \begin{array}{r}
 x^3 - 5x^2 + 3x + 1 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - 5x + 1 \\ \hline x \end{array} \right. \\
 \underline{-x^3 + 5x^2 - x} \\
 2x + 1
 \end{array}
 \end{array}$$

$$(x^2 - 5x + 1)x + 2x + 1 = x^3 - 5x^2 + x + 2x + 1 = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$$

7 ■■■ Expresa las siguientes divisiones de la forma $D = d \cdot c + r$.

- a) $(6x^3 + 5x^2 - 9x) : (3x - 2)$
 b) $(x^4 - 4x^2 + 12x - 9) : (x^2 - 2x + 3)$
 c) $(4x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 9x + 5) : (-2x^3 + x - 5)$

$$\begin{array}{r}
 a) \quad 6x^3 + 5x^2 - 9x \quad \left| \begin{array}{l} 3x - 2 \\ \hline 2x^2 + 3x - 1 \end{array} \right. \\
 \underline{-6x^3 + 4x^2} \\
 9x^2 \\
 \underline{-9x^2 + 6x} \\
 -3x \\
 \underline{3x - 2} \\
 -2
 \end{array}$$

$$6x^3 + 5x^2 - 9x = (3x - 2)(2x^2 + 3x - 1) - 2$$

$$\begin{array}{r}
 b) \quad x^4 \quad - 4x^2 + 12x - 9 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - 2x + 3 \\ \hline x^2 + 2x - 3 \end{array} \right. \\
 \underline{-x^4 + 2x^3 - 3x^2} \\
 2x^3 - 7x^2 \\
 \underline{-2x^3 + 4x^2 - 6x} \\
 -3x^2 + 6x \\
 \underline{3x^2 - 6x + 9} \\
 0
 \end{array}$$

$$x^4 - 4x^2 + 12x - 9 = (x^2 - 2x + 3)(x^2 + 2x - 3)$$

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

$$\begin{array}{r} \text{c) } 4x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 9x + 5 \quad | \quad -2x^3 + x - 5 \\ \underline{-4x^4 \qquad \qquad + 2x^2 - 10x} \qquad \quad -2x - 1 \\ \qquad \qquad \qquad 2x^3 \qquad \qquad - \qquad x \\ \underline{\qquad \qquad -2x^3 \qquad \qquad + \qquad x - 5} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 0 \end{array}$$

$$4x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 9x + 5 = (-2x^3 + x - 5)(-2x - 1)$$

Factor común e identidades notables

8 ■■■ Expresa como cuadrado de un binomio.

a) $16x^2 + 1 - 8x$

b) $36x^2 + 25y^2 + 60xy$

c) $9x^4 + y^2 + 6x^2y$

d) $y^4 - 2y^2 + 1$

a) $(4x - 1)^2$

b) $(6x + 5y)^2$

c) $(3x^2 + y)^2$

d) $(y^2 - 1)^2$

9 ■■■ Expresa como producto de dos binomios.

a) $49x^2 - 16$

b) $9x^4 - y^2$

c) $81x^4 - 64x^2$

d) $25x^2 - 3$

e) $2x^2 - 100$

f) $5x^2 - 2$

a) $(7x + 4)(7x - 4)$

b) $(3x^2 + y)(3x^2 - y)$

c) $(9x^2 + 8x)(0x^2 - 8x)$

d) $(5x + \sqrt{3})(5x - \sqrt{3})$

e) $(\sqrt{2}x + 10)(\sqrt{2}x - 10)$

f) $(\sqrt{5}x + \sqrt{2})(\sqrt{5}x - \sqrt{2})$

10 ■■■ Sacar factor común e identificar los productos notables como en el ejemplo.

• $2x^4 + 12x^3 + 18x^2 = 2x^2(x^2 + 6x + 9) = 2x^2(x + 3)^2$

a) $20x^3 - 60x^2 + 45x$

b) $27x^3 - 3xy^2$

c) $3x^3 + 6x^2y + 3y^2x$

d) $4x^4 - 81x^2y^2$

a) $5x(4x^2 - 12x + 9) = 5x(2x - 3)^2$

b) $3x(9x^2 - y^2) = 3x(3x + y)(3x - y)$

c) $3x(x^2 + 2xy + y^2) = 3x(x + y)^2$

d) $x^2(4x^2 - 81y^2) = x^2(2x + 9y)(2x - 9y)$

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

Regla de Ruffini. Aplicaciones

11 ■■■ Aplica la regla de Ruffini para hallar el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a) $(5x^3 - 3x^2 + x - 2) : (x - 2)$

c) $(-x^3 + 4x) : (x - 3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} a) & 5 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & & 10 & 14 & 30 \\ \hline & 5 & 7 & 15 & 28 \end{array}$$

b) $(x^4 - 5x^3 + 7x + 3) : (x + 1)$

d) $(x^4 - 3x^3 + 5) : (x + 2)$

COCIENTE: $5x^2 + 7x + 15$

RESTO: 28

$$\begin{array}{r|rrrrr} b) & 1 & -5 & 0 & 7 & 3 \\ -1 & & -1 & 6 & -6 & -1 \\ \hline & 1 & -6 & 6 & 1 & 2 \end{array}$$

COCIENTE: $x^3 - 6x^2 + 6x + 1$

RESTO: 2

$$\begin{array}{r|rrrr} c) & -1 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & & -3 & -9 & -15 \\ \hline & -1 & -3 & -5 & -15 \end{array}$$

COCIENTE: $-x^2 - 3x - 5$

RESTO: -15

$$\begin{array}{r|rrrrr} d) & 1 & -3 & 0 & 0 & 5 \\ -2 & & -2 & 10 & -20 & 40 \\ \hline & 1 & -5 & 10 & -20 & 45 \end{array}$$

COCIENTE: $x^3 - 5x^2 + 10x - 20$

RESTO: 45

12 ■■■ Utiliza la regla de Ruffini para calcular $P(3)$, $P(-5)$ y $P(7)$ en los siguientes casos:

a) $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 3$

b) $P(x) = x^4 - 3x^2 + 7$

$$\begin{array}{r|rrrr} a) & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 3 & & 6 & 3 & 30 \\ \hline & 2 & 1 & 10 & 33 \end{array}$$

$P(3) = 33$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & 7 & 3 \\ -5 & & -10 & 75 & -410 \\ \hline & 2 & -15 & 82 & -407 \end{array}$$

$P(-5) = -407$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 7 & & 14 & 63 & 490 \\ \hline & 2 & 9 & 70 & 493 \end{array}$$

$P(7) = 493$

$$\begin{array}{r|rrrrr} b) & 1 & 0 & -3 & 0 & 7 \\ 3 & & 3 & 9 & 18 & 54 \\ \hline & 1 & 3 & 6 & 18 & 61 \end{array}$$

$P(3) = 61$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -3 & 0 & 7 \\ -5 & & -5 & 25 & -110 & 550 \\ \hline & 1 & -5 & 22 & -110 & 557 \end{array}$$

$P(-5) = 557$

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & -3 & 0 & 7 \\
 7 & & 7 & 49 & 322 & 2254 \\
 \hline
 & 1 & 7 & 46 & 322 & \underline{2261}
 \end{array}
 \quad P(7) = 2261$$

13 Averigua cuáles de los números 1, -1, 2, -2, 3, -3 son raíces de los polinomios siguientes:

a) $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

b) $Q(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$

 Recuerda que a es raíz de $P(x)$ si $P(a) = 0$.

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } \begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \underline{0} \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & -1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & -3 & -2 & \underline{8 \neq 0} \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 2 & 0 & -10 \\ \hline & 1 & 0 & -5 & \underline{-4 \neq 0} \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & -2 & 8 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & \underline{0} \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 3 & 3 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \underline{0} \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & -3 & 15 & -30 \\ \hline & 1 & -5 & 10 & \underline{-24 \neq 0} \end{array}
 \end{array}$$

Son raíces de $P(x)$: 1, -2 y 3.

$$\begin{array}{l}
 \text{b) } \begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & 1 & -3 \\ & & 1 & -2 & -1 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & \underline{-4 \neq 0} \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & 1 & -3 \\ & & -1 & 4 & -5 \\ \hline & 1 & -4 & 5 & \underline{-8 \neq 0} \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -3 & 1 & -3 \\ & & 3 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \underline{0} \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & -3 & 1 & -3 \\ & & -3 & 18 & -57 \\ \hline & 1 & -6 & 19 & \underline{-60 \neq 0} \end{array}
 \end{array}$$

3 es una raíz de $Q(x)$ (no probamos con 2 y -2 porque no son divisores de -3).

14 Comprueba si los polinomios siguientes son divisibles por $x - 3$ o $x + 1$.

a) $P_1(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$

b) $P_2(x) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30$

c) $P_3(x) = x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 13$

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } \begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -3 & 1 & -3 \\ & & 3 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \underline{0} \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & 1 & -3 \\ & & -1 & 4 & -5 \\ \hline & 1 & -4 & 5 & \underline{-8 \neq 0} \end{array}
 \end{array}$$

P_1 es divisible por $x - 3$.

$$\begin{array}{l}
 \text{b) } \begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 4 & -11 & -30 \\ & & -1 & -3 & 14 \\ \hline & 1 & 3 & -14 & \underline{-16 \neq 0} \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & 4 & -11 & -30 \\ & & 3 & 21 & 30 \\ \hline & 1 & 7 & 10 & \underline{0} \end{array}
 \end{array}$$

P_2 es divisible por $x - 3$.

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

$$c) \begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -7 & 5 & 0 & -13 \\ -1 & & -1 & 8 & -13 & 13 \\ \hline & 1 & -8 & 13 & -13 & 0 \end{array}$$

P_3 es divisible por $x + 1$. No puede ser divisible por $x - 3$ porque 13 no es múltiplo de 3.

PÁGINA 54

- 15** ■■■ El polinomio $x^4 - 2x^3 - 23x^2 - 2x - 24$ es divisible por $x - a$ para dos valores enteros de a . Búscalos y da el cociente en ambos casos.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -23 & -2 & -24 \\ -4 & & -4 & 24 & -4 & 24 \\ \hline & 1 & -6 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

Es divisible por $x + 4$.

COCIENTE: $x^3 - 6x^2 + x - 6$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -23 & -2 & -24 \\ 6 & & 6 & 24 & 6 & 24 \\ \hline & 1 & 4 & 1 & 4 & 0 \end{array}$$

Es divisible por $x - 6$.

COCIENTE: $x^3 + 4x^2 + x + 4$

- 16** ■■■ Prueba si el polinomio $-x^4 + 3x^2 - 16x + 6$ es divisible por $x - a$ para algún valor entero de a .

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -1 & 0 & 3 & -16 & 6 \\ -3 & & 3 & -9 & 18 & -6 \\ \hline & -1 & 3 & -6 & 2 & 0 \end{array}$$

Es divisible por $x + 3$.

- 17** ■■■ Si $P(x) = 3x^3 - 11x^2 - 81x + 245$, halla los valores $P(8,75)$, $P(10,25)$ y $P(-7)$ con ayuda de la calculadora.

Describe el proceso como en el ejemplo:

8,75

3 11 81 245

$P(8,75) = 703,828\dots$

10,25 3 11 81 245

$P(10,25) = 1489,73$

7 3 11 81 245

$P(-7) = -756$

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

Factorización de polinomios

18 ■■■ Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 + 4x - 5$

b) $x^2 + 8x + 15$

c) $7x^2 - 21x - 280$

d) $3x^2 + 9x - 210$

a) $x^2 + 4x - 5 = 0 \rightarrow x = -5, x = 1$

$$x^2 + 4x - 5 = (x + 5)(x - 1)$$

b) $x^2 + 8x + 15 = 0 \rightarrow x = -5, x = -3$

$$x^2 + 8x + 15 = (x + 5)(x + 3)$$

c) $7x^2 - 21x - 280 = 0 \rightarrow x = 8, x = -5$

$$7x^2 - 21x - 280 = 7(x - 8)(x + 5)$$

d) $3x^2 + 9x - 210 = 0 \rightarrow x = -10, x = 7$

$$3x^2 + 9x - 210 = 3(x + 10)(x - 7)$$

19 ■■■ Busca, en cada caso, una raíz entera y factoriza, después, el polinomio:

a) $2x^2 - 9x - 5$

b) $3x^2 - 2x - 5$

c) $4x^2 + 17x + 15$

d) $-x^2 + 17x - 72$

a) $2x^2 - 9x - 5 = (x - 5)(2x + 1)$

b) $3x^2 - 2x - 5 = (x + 1)(3x - 5)$

c) $4x^2 + 17x + 15 = (x + 3)(4x + 5)$

d) $-x^2 + 17x - 72 = -(x - 8)(x - 9)$

20 ■■■ Sacar factor común y utilizar las identidades notables para factorizar los siguientes polinomios:

a) $3x^3 - 12x$

b) $4x^3 - 24x^2 + 36x$

c) $45x^2 - 5x^4$

d) $x^4 + x^2 + 2x^3$

e) $x^6 - 16x^2$

f) $16x^4 - 9$

a) $3x^3 - 12x = 3x(x^2 - 4) = 3x(x + 2)(x - 2)$

b) $4x^3 - 24x^2 + 36x = 4x(x^2 - 6x + 9) = 4x(x - 3)^2$

c) $45x^2 - 5x^4 = 5x^2(9 - x^2) = 5x^2(3 + x)(3 - x)$

d) $x^4 + x^2 + 2x^3 = x^2(x^2 + 1 + 2x) = x^2(x + 1)^2$

e) $x^6 - 16x^2 = x^2(x^4 - 16) = x^2(x^2 + 4)(x^2 - 4) = x^2(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$

f) $16x^4 - 9 = (4x^2 + 3)(4x^2 - 3) = (4x^2 + 3)(2x + \sqrt{3})(2x - \sqrt{3})$

21 ■■■ Completa la descomposición en factores de los polinomios siguientes:

a) $(x^2 - 25)(x^2 - 6x + 9)$

b) $(x^2 - 7x)(x^2 - 13x + 40)$

a) $(x^2 - 25)(x^2 - 6x + 9) = (x + 5)(x - 5)(x - 3)^2$

b) $(x^2 - 7x)(x^2 - 13x + 40) = x(x - 7)(x - 8)(x - 5)$

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

22 ■■■ Descompón en factores y di cuáles son las raíces de los siguientes polinomios:

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

c) $x^3 - 9x^2 + 15x - 7$

	1	2	-1	-2
1		1	3	2
	1	3	2	0
-1		-1	-2	
	1	2	0	

b) $3x^3 - 15x^2 + 12x$

d) $x^4 - 13x^2 + 36$

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(x+1)(x+2)$$

Sus raíces son 1, -1 y -2.

$$3x^3 - 15x^2 + 12x = 3x(x-1)(x-4)$$

Sus raíces son 0, 1 y 4.

	3	-15	12
1		3	-12
	3	-12	0
4		12	
	3	0	

	1	-9	15	-7
1		1	-8	7
	1	-8	7	0
1		1	-7	
	1	-7	0	

$$x^3 - 9x^2 + 15x - 7 = (x-1)^2(x-7)$$

Sus raíces son 1 y 7.

d) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \rightarrow x = 2; x = -2; x = 3; x = -3$

$$x^4 - 13x^2 + 36 = (x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$$

Sus raíces son 2, -2, 3 y -3.

23 ■■■ Factoriza los siguientes polinomios y di cuáles son sus raíces:

a) $x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

b) $2x^3 - 7x^2 - 19x + 60$

c) $x^3 - x - 6$

d) $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$

	1	-2	-2	-3	$x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x^2 + x + 1)$
3		3	3	3	Raíz: 3
	1	1	1	0	

	2	-7	-19	60	$2x^3 - 7x^2 - 19x + 60 = (x+3)(x-4)(2x-5)$
-3		-6	39	-60	Raíces: -3, 4 y $\frac{5}{2}$
	2	-13	20	0	
4		8	-20		
	2	-5	0		

	1	0	-1	-6	$x^3 - x - 6 = (x-2)(x^2 + 2x + 3)$
2		2	4	6	Raíz: 2
	1	2	3	0	

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

d)	4	4	-3	-4	-1	$4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 =$
1		4	8	5	1	$= (x-1)(x+1)(4x^2 + 4x + 1) =$
	4	8	5	1	0	$= (x-1)(x+1)(2x+1)^2$
-1		-4	-4	-1		Raíces: 1, -1 y $-\frac{1}{2}$
	4	4	1		0	

Fracciones algebraicas

24 ■■■ Comprueba, en cada caso, si las fracciones dadas son equivalentes:

a) $\frac{x-4}{3x-12}$ y $\frac{1}{3}$

b) $\frac{x^2+x}{2x}$ y $\frac{x}{2}$

c) $\frac{x+y}{x^2-y^2}$ y $\frac{1}{x-y}$

d) $\frac{x}{x^2-x}$ y $\frac{2}{2x-2}$

a) Sí son equivalentes, porque $3(x-4) = 3x-12$.

b) No son equivalentes, ya que $2(x^2+x) \neq 2x^2$.

c) Sí son equivalentes, porque $(x+y)(x-y) = x^2-y^2$.

d) Sí son equivalentes, porque $(2x-2)x = 2x^2-2x$.

25 ■■■ Descompón en factores y simplifica.

a) $\frac{x^2-9}{(x+3)^2}$

b) $\frac{x+2}{x^2-4}$

c) $\frac{x^2+25-10x}{x^2-25}$

d) $\frac{x^2+xy}{x^2+2xy+y^2}$

e) $\frac{x-2}{x^2+x-6}$

f) $\frac{x^2y-3xy^2}{2xy^2}$

a) $\frac{x^2-9}{(x+3)^2} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x+3)} = \frac{x-3}{x+3}$

b) $\frac{x+2}{x^2-4} = \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x-2}$

c) $\frac{x^2+25-10x}{x^2-25} = \frac{(x-5)^2}{(x+5)(x-5)} = \frac{x-5}{x+5}$

d) $\frac{x^2+xy}{x^2+2xy+y^2} = \frac{x(x+y)}{(x+y)^2} = \frac{x}{x+y}$

e) $\frac{x-2}{x^2+x-6} = \frac{x-2}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{x+3}$

f) $\frac{x^2y-3xy^2}{2xy^2} = \frac{xy(x-3y)}{2xy^2} = \frac{x-3y}{2y}$

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

26 ■■■ Reduce a común denominador y opera.

a) $\frac{1}{2x} - \frac{1}{4x} + \frac{1}{x}$

b) $\frac{2}{x^2} - \frac{1}{3x} + \frac{1}{x}$

c) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$

d) $\frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2}$

a) $\frac{1}{2x} - \frac{1}{4x} + \frac{1}{x} = \frac{2-1+4}{4x} = \frac{5}{4x}$

b) $\frac{2}{x^2} - \frac{1}{3x} + \frac{1}{x} = \frac{6-x+3x}{3x^2} = \frac{2x+6}{3x^2}$

c) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{x-x+1}{x(x-1)} = \frac{1}{x^2-x}$

d) $\frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2} = \frac{2x+4+2x-4}{(x-2)(x+2)} = \frac{4x}{x^2-4}$

27 ■■■ Efectúa.

a) $\frac{x}{2} + \frac{3}{x} - 1$

b) $\frac{2}{x^2} - \frac{x+1}{3x}$

c) $\frac{x}{x-3} - \frac{3}{x}$

d) $\frac{x-3}{x+1} - \frac{x}{x+3}$

a) $\frac{x}{2} + \frac{3}{x} - 1 = \frac{x^2+6-2x}{2x}$

b) $\frac{2}{x^2} - \frac{x+1}{3x} = \frac{6-x(x+1)}{3x^2} = \frac{6-x^2-x}{3x^2}$

c) $\frac{x}{x-3} - \frac{3}{x} = \frac{x^2-3(x-3)}{x(x-3)} = \frac{x^2-3x+9}{x^2-3x}$

d) $\frac{x-3}{x+1} - \frac{x}{x+3} = \frac{(x-3)(x+3)-x(x+1)}{(x+1)(x+3)} = \frac{-9-x}{x^2+4x+3}$

28 ■■■ Opera.

a) $\frac{x}{3} \cdot \frac{2x+1}{x-1}$

b) $\frac{2}{x-1} \cdot \frac{x}{x+1}$

c) $\frac{1}{x-1} : \frac{x+1}{3x}$

d) $\frac{2x}{2x-3} : \frac{x+1}{2x+3}$

a) $\frac{x}{3} \cdot \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2x^2+x}{3x-3}$

b) $\frac{2}{x-1} \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{2x}{x^2-1}$

c) $\frac{1}{x-1} : \frac{x+1}{3x} = \frac{3x}{x^2-1}$

d) $\frac{2x}{2x-3} : \frac{x+1}{2x+3} = \frac{4x^2+6x}{2x^2-x-3}$

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

29 ■■■ Opera y simplifica si es posible.

a) $\left(\frac{1}{x} : \frac{1}{x+1}\right) \cdot \frac{x}{2}$ b) $\left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x+2}\right) : \frac{x-2}{x}$

a) $\left(\frac{1}{x} : \frac{1}{x+1}\right) \cdot \frac{x}{2} = \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x}{2} = \frac{(x+1)x}{2x} = \frac{x+1}{2}$

b) $\left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x+2}\right) : \frac{x-2}{x} = \left(\frac{2x+4-2x}{x(x+2)}\right) : \frac{x-2}{x} = \frac{4x}{x(x+2)(x-2)} = \frac{4}{x^2-4}$

30 ■■■ Descompón en factores el dividendo y el divisor, y, después, simplifica.

a) $\frac{x^2-2x}{x^2-5x+6}$ b) $\frac{x^2-3x-4}{x^3+x^2}$

c) $\frac{x^3-3x^2+2x}{3x^2-9x+6}$ d) $\frac{x^2-x-42}{x^2-8x+7}$

a) $\frac{x^2-2x}{x^2-5x+6} = \frac{x(x-2)}{(x-3)(x-2)} = \frac{x}{x-3}$

b) $\frac{x^2-3x-4}{x^3+x^2} = \frac{(x+1)(x-4)}{x^2(x+1)} = \frac{x-4}{x^2}$

c) $\frac{x^3-3x^2+2x}{3x^2-9x+6} = \frac{x(x^2-3x+2)}{3(x^2-3x+2)} = \frac{x}{3}$

d) $\frac{x^2-x-42}{x^2-8x+7} = \frac{(x+6)(x-7)}{(x-1)(x-7)} = \frac{x+6}{x-1}$

PÁGINA 55

PIENSA Y RESUELVE

31 ■■■ Sustituye, en cada caso, los puntos suspensivos por la expresión adecuada para que las fracciones sean equivalentes:

a) $\frac{x^2-x}{x^2-1} = \frac{\dots}{x+1}$

b) $\frac{x}{2x+1} = \frac{x^2}{\dots}$

c) $\frac{x}{x-3} = \frac{\dots}{x^2-9}$

d) $\frac{2}{x+2} = \frac{\dots}{x^2+4x+4}$

a) $\frac{x^2-x}{x^2-1} = \frac{x}{x+1}$

b) $\frac{x}{2x+1} = \frac{x^2}{x(2x+1)}$

c) $\frac{x}{x-3} = \frac{x(x+3)}{x^2-9}$

d) $\frac{2}{x+2} = \frac{2(x+2)}{x^2+4x+4}$

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

32 ■■■ Halla, en cada caso, el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de los polinomios siguientes:

a) x^2 ; $x^2 - x$; $x^2 - 1$

b) $x - 3$; $x^2 - 9$; $x^2 - 6x + 9$

c) $x + 2$; $3x + 6$; $x^2 + x - 2$

d) $2x$; $2x + 1$; $4x^2 - 1$

$$\left. \begin{array}{l} a) \ x^2 \\ \quad x^2 - x = x(x-1) \\ \quad x^2 - 1 = (x+1)(x-1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{máx.c.d. } [x^2, x^2 - x, x^2 - 1] = 1 \\ \text{mín.c.m. } [x^2, x^2 - x, x^2 - 1] = x^2(x-1)(x+1) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} b) \ x - 3 \\ \quad x^2 - 9 = (x+3)(x-3) \\ \quad x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{máx.c.d. } [x-3, x^2 - 9, x^2 - 6x + 9] = x-3 \\ \text{mín.c.m. } [x-3, x^2 - 9, x^2 - 6x + 9] = (x-3)^2(x+3) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} c) \ x + 2 \\ \quad 3x + 6 = 3(x+2) \\ \quad x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{máx.c.d. } [x+2, 3x+6, x^2+x-2] = x+2 \\ \text{mín.c.m. } [x+2, 3x+6, x^2+x-2] = 3(x+2)(x-1) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} d) \ 2x \\ \quad 2x + 1 \\ \quad 4x^2 - 1 = (2x+1)(2x-1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{máx.c.d. } [2x, 2x+1, 4x^2-1] = 1 \\ \text{mín.c.m. } [2x, 2x+1, 4x^2-1] = 2x(4x^2-1) \end{array}$$

33 ■■■ Resuelto en el libro de texto.

34 ■■■ Opera y simplifica.

a) $\left(\frac{3}{x} - \frac{x}{3}\right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\right)$

b) $\frac{x+1}{(x-1)^2} \cdot \frac{x^2-1}{x}$

c) $\left[\left(x + \frac{1}{x}\right) : \left(x - \frac{1}{x}\right)\right] \cdot (x-1)$

d) $\frac{2}{x} \cdot \left(\frac{1}{x} : \frac{1}{x-1}\right)$

a) $\left(\frac{3}{x} - \frac{x}{3}\right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\right) = \frac{9-x^2}{3x} : \frac{3+x}{3x} = \frac{9-x^2}{3x} = \frac{(3-x)(3+x)}{3+x} = 3-x$

b) $\frac{x+1}{(x-1)^2} \cdot \frac{x^2-1}{x} = \frac{(x+1)(x+1)(x-1)}{(x-1)^2 \cdot x} = \frac{(x+1)^2}{x(x-1)}$

c) $\left[\left(x + \frac{1}{x}\right) : \left(x - \frac{1}{x}\right)\right] \cdot (x-1) = \left(\frac{x^2+1}{x} : \frac{x^2-1}{x}\right) \cdot (x-1) =$
 $= \frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot (x-1) = \frac{x^2+1}{x+1}$

d) $\frac{2}{x} \cdot \left(\frac{1}{x} : \frac{1}{x-1}\right) = \frac{2}{x} \cdot \frac{x-1}{x} = \frac{2(x-1)}{x^2}$

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

35 ■■■ Efectúa.

$$\text{a) } \frac{x-2}{x^2} + \frac{x+2}{x^2-x} - \frac{1}{x^2-1}$$

$$\text{b) } \frac{2x}{x^2+x-2} - \frac{5}{x+2} - \frac{x-4}{3x+6}$$

$$\text{c) } \frac{x+2}{2x+1} - \frac{2}{4x^2-1} + \frac{x+1}{2x}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x-2}{x^2} + \frac{x+2}{x^2-x} - \frac{1}{x^2-1} &= \\ &= \frac{(x-2)(x-1)(x+1)}{x^2(x-1)(x+1)} + \frac{(x+2)(x+1)x}{x^2(x-1)(x+1)} - \frac{x^2}{x^2(x-1)(x+1)} = \\ &= \frac{(x-2)(x^2-1) + (x+2)(x^2+x) - x^2}{x^2(x^2-1)} = \\ &= \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2 + x^3 + 2x^2 + x^2 + 2x - x^2}{x^2(x^2-1)} = \\ &= \frac{2x^3 + x + 2}{x^2(x^2-1)} = \frac{2x^3 + x + 2}{x^4 - x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{2x}{x^2+x-2} - \frac{5}{x+2} - \frac{x-4}{3x+6} &= \\ &= \frac{6x}{3(x+2)(x-1)} - \frac{15(x-1)}{3(x+2)(x-1)} - \frac{(x-4)(x-1)}{3(x+2)(x-1)} = \\ &= \frac{6x - 15x + 15 - x^2 + 5x - 4}{3(x+2)(x-1)} = \frac{-x^2 - 4x + 11}{3(x+2)(x-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{x+2}{2x+1} - \frac{2}{4x^2-1} + \frac{x+1}{2x} &= \\ &= \frac{2x(x+2)(2x-1)}{2x(2x+1)(2x-1)} - \frac{4x}{2x(2x+1)(2x-1)} + \frac{(x+1)(2x+1)(2x-1)}{2x(2x+1)(2x-1)} = \\ &= \frac{(2x^2+4x)(2x-1) - 4x + (x+1)(4x^2-1)}{2x(4x^2-1)} = \\ &= \frac{4x^3 + 8x^2 - 2x^2 - 4x - 4x + 4x^3 + 4x^2 - x - 1}{2x(4x^2-1)} = \frac{8x^3 + 10x^2 - 9x - 1}{2x(4x^2-1)} \end{aligned}$$

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

36 ■■■ Opera y simplifica.

a) $\left(1 - \frac{x-1}{x}\right) \frac{x^2}{x+3} - 1$

b) $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\right) : \frac{3}{x^2}$

c) $4 - \frac{1}{2x-1} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$

a) $\left(1 - \frac{x-1}{x}\right) \frac{x^2}{x+3} - 1 = \left(\frac{x-x+1}{x}\right) \cdot \frac{x^2}{x+3} - 1 = \frac{x^2}{x(x+3)} - 1 =$
 $= \frac{x^2 - x(x+3)}{x(x+3)} = \frac{x^2 - x^2 - 3x}{x(x+3)} = \frac{-3x}{x(x+3)} = \frac{-3}{x+3}$

b) $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\right) : \frac{3}{x^2} = \frac{x+3-x}{x(x+3)} : \frac{3}{x^2} = \frac{3}{x(x+3)} : \frac{3}{x^2} = \frac{x^2}{x(x+3)} = \frac{x}{x+3}$

c) $4 - \frac{1}{2x-1} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 4 - \frac{1}{2x-1} \cdot \frac{2x-1}{x^2} = 4 - \frac{1}{x^2} = \frac{4x^2-1}{x^2}$

37 ■■■ Efectúa.

a) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-1}$

b) $\frac{x^2}{x^2-2x+1} + \frac{2x+3}{x-1} - 3$

c) $\frac{2x-3}{x^2-9} - \frac{x+1}{x-3} - \frac{x+2}{x+3}$

a) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-1} = \frac{(x+1)^2}{x^2-1} + \frac{3(x-1)}{x^2-1} - \frac{x-2}{x^2-1} =$
 $= \frac{x^2+2x+1+3x-3-x+2}{x^2-1} = \frac{x^2+4x}{x^2-1}$

b) $\frac{x^2}{x^2-2x+1} + \frac{2x+3}{x-1} - 3 = \frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{(2x+3)(x-1)}{(x-1)^2} - \frac{3(x-1)^2}{(x-1)^2} =$
 $= \frac{x^2+2x^2+3x-2x-3-3(x^2-2x+1)}{(x-1)^2} = \frac{7x-6}{(x-1)^2}$

c) $\frac{2x-3}{x^2-9} - \frac{x+1}{x-3} - \frac{x+2}{x+3} = \frac{2x-3}{x^2-9} - \frac{(x+1)(x+3)}{x^2-9} - \frac{(x+2)(x-3)}{x^2-9} =$
 $= \frac{2x-3-x^2-4x-3-x^2+x+6}{x^2-9} = \frac{-2x^2-x}{x^2-9}$

38 ■■■ Resuelto en el libro de texto.

39 ■■■ Calcula m para que el polinomio

$$P(x) = x^3 - mx^2 + 5x - 2$$

sea divisible por $x + 1$.

$P(x) = x^3 - mx^2 + 5x - 2$ será divisible por $x + 1$ si $P(-1) = 0$.

$$P(-1) = (-1)^3 - m(-1)^2 + 5(-1) - 2 = 0$$

$$-1 - m - 5 - 2 = 0 \rightarrow m = -8$$

40 ■■■ El resto de la siguiente división es igual a -8 :

$$(2x^4 + kx^3 - 7x + 6) : (x - 2)$$

¿Cuánto vale k ?

Llamamos $P(x) = 2x^4 + kx^3 - 7x + 6$.

El resto de la división $P(x) : (x - 2)$ es $P(2)$, luego:

$$P(2) = -8 \rightarrow 2 \cdot 2^4 + k \cdot 2^3 - 7 \cdot 2 + 6 = -8 \rightarrow$$

$$\rightarrow 32 + 8k - 14 + 6 = -8 \rightarrow 8k = -32 \rightarrow k = -4$$

41 ■■■ Halla el valor que debe tener m para que el polinomio

$$mx^3 - 3x^2 + 5x + 9m$$

sea divisible por $x + 2$.

Llamamos $P(x) = mx^3 - 3x^2 + 5x + 9m$. Dicho polinomio ha de ser divisible por $x + 2$, luego el resto ha de ser 0:

$$P(-2) = 0 \rightarrow m(-2)^3 - 3(-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 9m = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -8m - 12 - 10 + 9m = 0 \rightarrow m = 22$$

42 ■■■ Comprueba si existe alguna relación de divisibilidad entre los siguientes pares de polinomios:

a) $P(x) = x^4 - 4x^2$ y $Q(x) = x^2 - 2x$

b) $P(x) = x^2 - 10x + 25$ y $Q(x) = x^2 - 5x$

c) $P(x) = x^3 + x^2 - 12x$ y $Q(x) = x - 3$

a) $\left. \begin{array}{l} P(x) = x^2(x-2)(x+2) \\ Q(x) = x(x-2) \end{array} \right\} Q(x) \text{ es divisor de } P(x).$

b) $\left. \begin{array}{l} P(x) = (x-5)^2 \\ Q(x) = x(x-5) \end{array} \right\} \text{ No hay relación de divisibilidad.}$

c) $\left. \begin{array}{l} P(x) = x(x-3)(x+4) \\ Q(x) = x-3 \end{array} \right\} Q(x) \text{ es divisor de } P(x).$

PÁGINA 56

43 ■■■ Tenemos un polinomio $P(x) = (x - 1)^2(x + 3)$. Busca un polinomio de segundo grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

a) máx.c.d. $[P(x), Q(x)] = x - 1$

b) mín.c.m. $[P(x), Q(x)] = (x - 1)^2(x^2 - 9)$

$Q(x) = (x - 1)(x - 3)$

44 ■■■ Calcula el valor de k para que el polinomio

$$P(x) = x^3 - x^2 + x + k$$

sea múltiplo de $Q(x) = x^2 + 1$.

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 + x + k \\ -x^3 \quad -x \\ \hline -x^2 \quad + k \\ \quad x^2 \quad + 1 \\ \hline \quad \quad k + 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} | x^2 + 1 \\ x - 1 \end{array}$$

Ha de ser $k + 1 = 0 \rightarrow k = -1$

Traducción al lenguaje algebraico

45 ■■■ Traduce a lenguaje algebraico empleando una sola incógnita:

a) El cociente entre dos números pares consecutivos.

b) Un número menos su inverso.

c) El inverso de un número más el inverso del doble de ese número.

d) La suma de los inversos de dos números consecutivos.

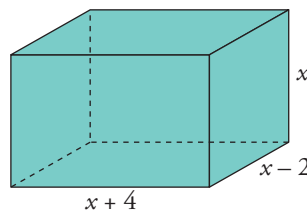
a) $\frac{2x}{2x + 2}$

b) $x - \frac{1}{x}$

c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x}$

d) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 1}$

46 ■■■ Expresa mediante polinomios el área y el volumen de este ortoedro.

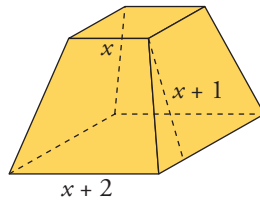


Área = $2[(x + 4)(x - 2) + x(x - 2) + x(x + 4)] = 6x^2 + 8x - 16$

Volumen = $(x + 4)(x - 2)x = x^3 + 2x^2 - 8x$

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

- 47 ■■■ Expresa, en función de x , el área total de este tronco de pirámide.



$$\text{Área lateral} = 4 \left[\frac{(x+2+x)}{2} \cdot (x+1) \right] = 4(x+1)^2$$

$$\text{Área de las bases} = x^2 + (x+2)^2$$

$$\text{Área total} = 4(x+1)^2 + x^2 + (x+2)^2 = 6x^2 + 12x + 8$$

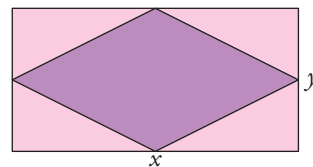
- 48 ■■■ Un grifo tarda x minutos en llenar un depósito. Otro grifo tarda 3 minutos menos en llenar el mismo depósito. Expresa en función de x la parte del depósito que llenan abriendo los dos durante un minuto.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-3}$$

- 49 ■■■ Se mezclan x kg de pintura de 5 €/kg con y kg de otra de 3 €/kg. ¿Cuál será el precio de 1 kg de la mezcla? Expresalo en función de x e y .

$$\frac{5x + 3y}{x + y}$$

- 50 ■■■ En un rectángulo de lados x e y inscribimos un rombo. Escribe el perímetro del rombo en función de los lados del rectángulo.



$$\text{El lado del rombo es } l = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2}$$

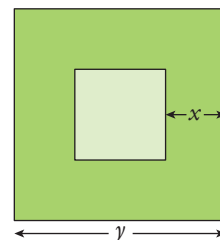
$$\text{Perímetro} = 4 \left(\frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2} \right) = 2 \sqrt{x^2 + y^2}$$

- 51 ■■■ Expresa algebraicamente el área de la parte coloreada utilizando x e y .

$$\text{Área cuadrado grande} = y^2$$

$$\text{Área cuadrado pequeño} = (y-2x)^2$$

$$\text{Área parte sombreada} = y^2 - (y-2x)^2 = 4xy - 4x^2$$

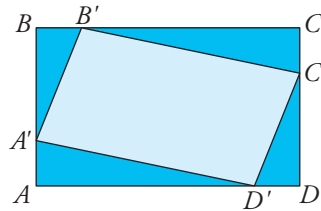


- 52** ■■■ Dos pueblos, A y B, distan 60 km. De A sale un coche hacia B con velocidad v . Al mismo tiempo sale otro de B en dirección a A con velocidad $v + 3$. Expresa en función de v el tiempo que tardan en encontrarse.

$$t = \frac{60}{2v + 3}$$

- 53** ■■■ En el rectángulo $ABCD$ de lados $AB = 3$ cm y $BC = 5$ cm, hemos inscrito el cuadrilátero $A'B'C'D'$ haciendo $AA' = BB' = CC' = DD' = x$.

Escribe el área de $A'B'C'D'$ en función de x .



Sabiendo que $\overline{AD'} = \overline{B'C} = 5 - x$ y $\overline{A'B} = \overline{C'D} = 3 - x$, se tendrá:

El área del triángulo $B'CC'$ es $\frac{x(5-x)}{2}$.

El área del triángulo $A'AD'$ es $\frac{x(5-x)}{2}$.

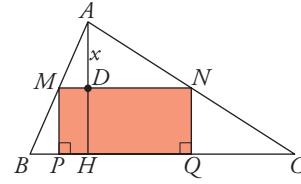
El área del triángulo $B'BA'$ es $\frac{x(3-x)}{2}$.

El área del triángulo $D'DC'$ es $\frac{x(3-x)}{2}$.

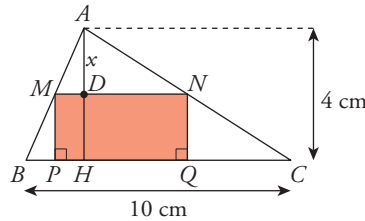
El área del rectángulo $ABCD$ es $3 \cdot 5 = 15$ cm².

$$\begin{aligned} A_{\text{PARALELOGRAMO}} &= 15 - \left[2 \cdot \frac{x(5-x)}{2} + 2 \cdot \frac{x(3-x)}{2} \right] = 15 - [x(5-x) + x(3-x)] = \\ &= 15 - (-2x^2 + 8x) = 2x^2 - 8x + 15 \end{aligned}$$

- 54** ■■■ En el triángulo de la figura conocemos $\overline{BC} = 10$ cm, $\overline{AH} = 4$ cm. Por un punto D de la altura, tal que $\overline{AD} = x$, se traza una paralela MN a BC . Desde M y N se trazan perpendiculares a BC .



- a) Expresa \overline{MN} en función de x . (Utiliza la semejanza de los triángulos AMN y ABC).
- b) Escribe el área del rectángulo $MNPQ$ mediante un polinomio en x .



- a) Por la semejanza de triángulos:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{MN}}{x} \rightarrow \overline{MN} = \frac{\overline{BC} \cdot x}{\overline{AH}} \rightarrow \overline{MN} = \frac{10 \cdot x}{4} \rightarrow \overline{MN} = \frac{5}{2}x$$

- b) $\overline{MP} = 4 - x$

$$A_{\text{RECTÁNGULO}} = \overline{MN} \cdot \overline{MP} = \frac{5}{2}x(4 - x) = 10x - \frac{5}{2}x^2$$

PÁGINA 57

REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

- 55** ■■■ Escribe en cada caso un polinomio de segundo grado que tenga por raíces:

- a) 7 y -7 b) 0 y 5 c) -2 y -3 d) 4 (doble)

Por ejemplo:

a) $(x - 7)(x + 7) = x^2 - 49$

b) $x(x - 5) = x^2 - 5x$

c) $(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$

d) $(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$

- 56** ■■■ Escribe, en cada caso, un polinomio que cumpla la condición dada:

- a) De segundo grado sin raíces.
 b) Que tenga por raíces -1, 0 y 3.
 c) De tercer grado con una sola raíz.

Por ejemplo:

a) $x^2 + 1$

b) $x(x + 1)(x - 3) = x^3 - 2x^2 - 3x$

c) $x(x^2 + 1) = x^3 + x$

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

57 ■■■ Las raíces de $P(x)$ son 0, 2 y -3 .

a) Escribe tres divisores de $P(x)$ de primer grado.

b) Escribe un divisor de $P(x)$ de segundo grado.

a) x ; $x - 2$; $x + 3$

b) Por ejemplo: $x(x - 2)$

58 ■■■ Inventa dos polinomios de segundo grado que cumplan la condición indicada en cada caso:

a) mín.c.m. $[P(x), Q(x)] = x^2(x - 3)(x + 2)$

b) máx.c.d. $[P(x), Q(x)] = 2x + 1$

a) Por ejemplo: $P(x) = x^2$; $Q(x) = (x - 3)(x + 2)$

b) Por ejemplo: $P(x) = x(2x + 1)$; $Q(x) = (2x + 1)(x - 2)$

59 ■■■ ¿Cuál es el mín.c.m. de los monomios $A = 2b$; $B = a^2b^2$; $C = 5a^2$?

Escribe otros tres monomios D , E , F tales que:

$$\text{mín.c.m. } (A, B, C, D, E, F) = 10a^2b^2$$

$$\left. \begin{array}{l} A = 2b \\ B = a^2b^2 \\ C = 5a^2 \end{array} \right\} \text{mín.c.m. } (A, B, C) = 10a^2b^2$$

Tomamos, por ejemplo:

$$D = 2b^2 \quad E = 5a \quad F = 10ab$$

$$\text{mín.c.m. } (A, B, C, D, E, F) = 10a^2b^2$$

60 ■■■ a) Si la división $P(x) : (x - 2)$ es exacta, ¿qué puedes afirmar del valor $P(2)$?

b) Si -5 es una raíz del polinomio $P(x)$, ¿qué puedes afirmar de la división $P(x) : (x + 5)$?

c) ¿En qué resultado te has basado para responder a las dos preguntas anteriores?

a) Si la división es exacta, el resto es 0, luego $P(2) = 0$.

b) La división $P(x) : (x + 5)$ es exacta, el resto es 0.

c) En el teorema del resto.

61 ■■■ Prueba que el polinomio $x^2 + (a + b)x + ab$ es divisible por $x + a$ y por $x + b$ para cualquier valor de a y b . ¿Cuál será su descomposición factorial?

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & a+b & ab \\ -a & & -a & -ab \\ \hline & 1 & b & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & a+b & ab \\ -b & & -b & -ab \\ \hline & 1 & a & 0 \end{array}$$

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

- 62** ■■■ En una división conocemos el dividendo, $D(x)$, el cociente, $C(x)$, y el resto, $R(x)$.

$$D(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1; \quad C(x) = x - 3; \quad R(x) = 7x - 7$$

Calcula el divisor.

$$D = d \cdot c + R \rightarrow \frac{\text{Dividendo} - \text{Resto}}{\text{Cociente}} = \text{divisor}$$

$$D - R = x^3 - 3x^2 + 5x - 1 - 7x + 7 = x^3 - 3x^2 - 2x + 6$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -2 & 6 \\ 3 & & 3 & 0 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

El divisor es $x^2 - 2$.

- 63** ■■■ ¿Cuál es la fracción inversa de $\frac{3-x}{2x+1}$? Justifícalo.

$$\text{Inversa} = \frac{2x+1}{3-x}$$

El producto de ambas debe ser igual a 1:

$$\frac{3-x}{2x+1} \cdot \frac{2x+1}{3-x} = 1$$

PROFUNDIZA

- 64** ■■■ Sacar factor común en las siguientes expresiones:

a) $3x(x-3) - (x+1)(x-3)$

b) $(x+5)(2x-1) + (x-5)(2x-1)$

c) $(3-y)(a+b) - (a-b)(3-y)$

☞ El factor común es un binomio.

a) $(x-3)[3x - (x+1)] = (x-3)(2x-1)$

b) $(2x-1)[(x+5) + (x-5)] = (2x-1)(2x)$

c) $(3-y)[(a+b) - (a-b)] = (3-y)(2b)$

- 65** ■■■ Descomponer en factores $x^3 - a^3$ y $x^3 + a^3$.

☞ Prueba si son divisibles por $x-a$ o por $x+a$.

$$\begin{array}{r|rrrr} a & 1 & 0 & 0 & -a^3 \\ & & a & a^2 & a^3 \\ \hline & 1 & a & a^2 & 0 \end{array}$$

$$x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -a & 1 & 0 & 0 & a^3 \\ & & -a & a^2 & -a^3 \\ \hline & 1 & -a & a^2 & 0 \end{array}$$

$$x^3 + a^3 = (x+a)(x^2 - ax + a^2)$$

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

66 ■■■ Factoriza las siguientes expresiones como en el ejemplo.

• $ax^2 - ay + bx^2 - by = a(x^2 - y) + b(x^2 - y) = (x^2 - y)(a + b)$

a) $ax - ay + bx - by$

b) $2x^2y + y + 2x^2 + 1$

c) $3x^2y + xy + 3xy^2 + y^2$

d) $2ab^3 - ab + 2b^2 - 1$

a) $a(x - y) + b(x - y) = (x - y)(a + b)$

b) $y(2x^2 + 1) + (2x^2 + 1) = (2x^2 + 1)(y + 1)$

c) $xy(3x + 1) + y^2(3x + 1) = (3x + 1)(xy + y) = (3x + 1)(x + 1)y$

d) $ab(2b^2 - 1) + (2b^2 - 1) = (2b^2 - 1)(ab + 1)$

67 ■■■ Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{2x^2y - xy^2}{10x - 5y}$

b) $\frac{3a^2b^2 - 6ab^3}{3a^3b - 6a^2b^2}$

c) $\frac{4a^2b^2 - 2a^2bx}{2abx + 2a^2b + 4b^2}$

a) $\frac{2x^2y - xy^2}{10x - 5y} = \frac{xy(2x - y)}{5(2x - y)} = \frac{xy}{5}$

b) $\frac{3a^2b^2 - 6ab^3}{3a^3b - 6a^2b^2} = \frac{3ab^2(a - 2b)}{3a^2b(a - 2b)} = \frac{b}{a}$

c) $\frac{4a^2b^2 - 2a^2bx}{2abx + 2a^2b + 4b^2} = \frac{2a^2b(2b - x)}{2b(ax + a^2 + 2b)} = \frac{a^2(2b - x)}{ax + a^2 + 2b}$

68 ■■■ Efectúa y simplifica.

a) $\frac{2x + y}{x^2 - xy} \left(\frac{3x}{2x + y} - 1 \right)$

b) $\frac{a^2 - ab}{ab + b^2} : \frac{ab - b^2}{a^2 + ab}$

c) $\frac{1}{ab} + \frac{a}{b} - \frac{1 + (a + b)^2}{ab} + \frac{b}{a}$

a) $\frac{2x + y}{x^2 - xy} \left(\frac{3x}{2x + y} - 1 \right) = \frac{2x + y}{x^2 - xy} \left(\frac{3x - 2x - y}{2x + y} \right) = \frac{(2x + y)(x - y)}{x(x - y)(2x + y)} = \frac{1}{x}$

b) $\frac{a^2 - ab}{ab + b^2} : \frac{ab - b^2}{a^2 + ab} = \frac{(a^2 - ab)(a^2 + ab)}{(ab + b^2)(ab - b^2)} = \frac{a^4 - a^2b^2}{a^2b^2 - b^4} = \frac{a^2(a^2 - b^2)}{b^2(a^2 - b^2)} = \frac{a^2}{b^2}$

c) $\frac{1}{ab} + \frac{a}{b} - \frac{1 + (a + b)^2}{ab} + \frac{b}{a} = \frac{1 + a^2 - 1 - (a + b)^2 + b^2}{ab} =$
 $= \frac{a^2 + b^2 - a^2 - b^2 - 2ab}{ab} = \frac{-2ab}{ab} = -2$

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

69 ■■■ Opera y simplifica.

$$\text{a) } \frac{2a}{a-3b} - \frac{3b}{a+3b} - \frac{a^2 + 3ab + 18b^2}{a^2 - 9b^2}$$

$$\text{b) } \frac{bx-b}{x+1} + \frac{3bx}{x-1} + \frac{3bx^2 + bx + 2b}{1-x^2}$$

$$\text{c) } \left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} \right) \frac{x^2 - y^2}{2xy}$$

$$\text{d) } \left(1 - \frac{x-y}{x+y} \right) : \left(\frac{x-y}{x+y} - \frac{x+y}{x-y} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{2a}{a-3b} - \frac{3b}{a+3b} - \frac{a^2 + 3ab + 18b^2}{a^2 - 9b^2} &= \\ &= \frac{2a(a+3b) - 3b(a-3b) - (a^2 + 3ab + 18b^2)}{a^2 - 9b^2} = \\ &= \frac{2a^2 + 6ab - 3ab + 9b^2 - a^2 - 3ab - 18b^2}{a^2 - 9b^2} = \frac{a^2 - 9b^2}{a^2 - 9b^2} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{bx-b}{x+1} + \frac{3bx}{x-1} + \frac{3bx^2 + bx + 2b}{1-x^2} &= \\ &= \frac{b(x-1)(x-1) + 3bx(x+1) - (3bx^2 + bx + 2b)}{x^2 - 1} = \\ &= \frac{b(x^2 - 2x + 1) + 3bx^2 + 3bx - 3bx^2 - bx - 2b}{x^2 - 1} = \\ &= \frac{bx^2 - 2bx + b + 2bx - 2b}{x^2 - 1} = \frac{bx^2 - b}{x^2 - 1} = \frac{b(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} \right) \frac{x^2 - y^2}{2xy} &= \left[\frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{x^2 - y^2} \right] \cdot \frac{x^2 - y^2}{2xy} = \\ &= \frac{x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2}{x^2 - y^2} \cdot \frac{x^2 - y^2}{2xy} = \frac{4xy}{2xy} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \left(1 - \frac{x-y}{x+y} \right) : \left(\frac{x-y}{x+y} - \frac{x+y}{x-y} \right) &= \left(\frac{x+y-x+y}{x+y} \right) : \left[\frac{(x-y)^2 - (x+y)^2}{(x+y)(x-y)} \right] = \\ &= \frac{2y}{x+y} : \left[\frac{x^2 - 2xy + y^2 - x^2 - 2xy - y^2}{(x+y)(x-y)} \right] = \frac{2y}{x+y} : \frac{-4xy}{(x+y)(x-y)} = \\ &= \frac{2y(x+y)(x-y)}{-4xy(x+y)} = -\frac{x-y}{2x} = \frac{y-x}{2x} \end{aligned}$$