

EJERCICIOS DE FRACCIONES ALGEBRAICAS:

Ejercicio nº 1.-

Simplifica la siguiente fracción algebraica:

$$\frac{2x^3 + 10x^2 + 16x + 8}{4x^3 + 8x^2 - 4x - 8}$$

Ejercicio nº 2.-

Calcula y simplifica:

a) $\frac{x^4 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 2x + 1} \cdot \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 2x}$

b) $\frac{2x + 4}{x + 4} - \frac{2x - 14}{x - 5}$

Ejercicio nº 3.-

Descompón en factores el dividendo y el divisor, y luego simplifica:

$$\frac{3x^3 - 3x}{x^5 - x}$$

Ejercicio nº 4.-

Efectúa y simplifica:

a) $\left(\frac{1}{x} + x\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)$

b) $1 + \frac{1}{2x-1} - \frac{2x}{4x^2-1}$

Ejercicio nº 5.-

Calcula y simplifica:

a) $\frac{1}{x^2 - x} + \frac{2x - 1}{x - 1} - \frac{3x - 1}{x}$

b) $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 2x - 15} : \frac{2x - 10}{x^2 - 25}$

Ejercicio nº 6.-

Descompón en factores el dividendo y el divisor y después simplifica:

$$\frac{x^3 + 7x^2 + 12x}{x^3 + 3x^2 - 16x - 48}$$

Ejercicio nº 7.-

Opera y simplifica:

a) $\left(x - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{x^2}\right)$

b) $\frac{x+1}{x-2} + \frac{2+x}{x^2-4x+x}$

Ejercicio nº 8.-

Descompón en factores el numerador y el denominador, y luego simplifica.

$$\frac{x^3 - 49x}{x^4 - 7x^3}$$

Ejercicio nº 9.-

Opera y simplifica:

a) $\frac{2x}{x+1} : \left(\frac{2x}{x+1} - 1\right)$

b) $\frac{x-2}{2x} - \frac{1-3x}{3x^2} + \frac{2x^2+3}{6x^4}$

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS DE FRACCIONES ALGEBRAICAS:

Ejercicio nº 1.-

Solución:

Descomponemos factorialmente el numerador y el denominador:

- Numerador → Sacamos factor común 2 y aplicamos la regla de Ruffini :

$$2x^3 + 10x^2 + 16x + 8 = 2(x^3 + 5x^2 + 8x + 4)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & 8 & 4 \\ -2 & & -2 & -6 & -4 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

Volvemos a aplicar la regla de Ruffini y queda así :

$$2x^3 + 10x^2 + 16x + 8 = 2(x+2)^2(x+1)$$

- Denominador → Sacamos factor común 4 y aplicamos la regla de Ruffini :

$$4x^3 + 8x^2 - 4x - 8 = 4(x^3 + 2x^2 - x - 2)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & & -2 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

Ahora aplicamos identidades notables y queda así:

$$4x^3 + 8x^2 - 4x - 8 = 4(x+2)(x+1)(x-1)$$

- Simplificación:

$$\frac{2x^3 + 10x^2 + 16x + 8}{4x^3 + 8x^2 - 4x - 8} = \frac{2(x+2)^2(x+1)}{4(x+2)(x+1)(x-1)} = \frac{(x+2)}{2(x-1)} = \frac{x+2}{2x-2}$$

Ejercicio nº 2.-

Solución:

a) Efectuamos el producto:

$$\frac{x^4 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 2x + 1} \cdot \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 2x} = \frac{(x^4 - 3x^2 + 2x) \cdot (x^2 - 6x + 9)}{(x^2 - 2x + 1) \cdot (x^2 + 2x)}$$

Factorizamos para simplificar:

- $x^4 - 3x^2 + 2x = x(x^3 - 3x + 2)$

Aplicamos Ruffini para calcular las raíces de la ecuación $x^3 - 3x + 2 = 0$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

Volvemos a aplicar la regla de Ruffini y queda así :

$$x^4 - 3x^2 + 2x = x(x-1)^2(x+2)$$

- $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$
- $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$
- $x^2 + 2x = x(x+2)$

Por tanto:

$$\frac{(x^4 - 3x^2 + 2x) \cdot (x^2 - 6x + 9)}{(x^2 - 2x + 1) \cdot (x^2 + 2x)} = \frac{x(x-1)^2(x+2) \cdot (x-3)^2}{(x-1)^2 \cdot x(x+2)} = (x-3)^2$$

b) m.c.m. $[(x+4), (x-5)] = (x+4)(x-5)$

$$\begin{aligned} \frac{2x+4}{x+4} - \frac{2x+14}{x-5} &= \frac{(2x+4)(x-5)}{(x+4)(x-5)} - \frac{(2x-14)(x+4)}{(x+4)(x-5)} = \\ &= \frac{2x^2 - 10x + 4x - 20}{(x+4)(x-5)} - \frac{2x^2 + 8x - 14x - 56}{(x+4) \cdot (x-5)} = \frac{2x^2 - 6x - 20 - 2x^2 + 6x + 56}{(x+4) \cdot (x-5)} = \\ &= \frac{36}{(x+4)(x-5)} = \frac{36}{x^2 - x - 20} \end{aligned}$$

Ejercicio nº 3.-

Solución:

$$\frac{3x^3 - 3x}{x^5 - x} = \frac{3x(x^2 - 1)}{x(x^4 - 1)} = \frac{3x(x^2 - 1)}{x(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \frac{3}{x^2 + 1}$$

En el primer paso sacamos factor común y en el segundo paso aplicamos el producto notable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ a la expresión $x^4 - 1$.

Ejercicio nº 4.-

Solución:

a) Efectuamos cada paréntesis y luego multiplicamos:

$$\left(\frac{1}{x} + x\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{1+x^2}{x} \cdot \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{1+x^2}{x} \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{1+x^2}{x+1}$$

b) Observamos que $4x^2 - 1 = (2x - 1)(2x + 1)$.

$$\text{Así, el m.c.m. } [1, (2x-1), (4x^2-1)] = (2x-1)(2x+1).$$

Luego:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2x-1} - \frac{2x}{4x^2-1} &= \frac{(2x-1)(2x+1)}{(2x-1)(2x+1)} + \frac{2x+1}{(2x-1)(2x+1)} - \frac{2x}{(2x-1)(2x+1)} = \\ &= \frac{4x^2 - 1 + 2x + 1 - 2x}{4x^2 - 1} = \frac{4x^2}{4x^2 - 1} \end{aligned}$$

Ejercicio nº 5.-

Solución:

a) m.c.m. $[(x^2 - x), (x - 1), x] = x(x - 1)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2-x} + \frac{2x-1}{x-1} - \frac{3x-1}{x} &= \frac{1}{x(x-1)} + \frac{x(2x-1)}{x(x-1)} - \frac{(3x-1)(x-1)}{x(x-1)} = \\ &= \frac{1}{x(x-1)} + \frac{2x^2-x}{x(x-1)} - \frac{3x^2-3x-x+1}{x(x-1)} = \frac{1+2x^2-x-3x^2+3x+x-1}{x(x-1)} = \\ &= \frac{-x^2+3x}{x(x-1)} = \frac{x(-x+3)}{x(x-1)} = \frac{-x+3}{x-1} \end{aligned}$$

b) Efectuamos el cociente:

$$\frac{x^2-6x+9}{x^2+2x-15} : \frac{2x-10}{x^2-25} = \frac{(x^2-6x+9)(x^2-25)}{(x^2+2x-15)(2x-10)}$$

Factorizamos para simplificar:

- $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5) \rightarrow$ Producto notable

$$2x - 10 = 2(x - 5)$$

- $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$ por ser producto notable
- $x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$, sale aplicando Ruffini

Así:

$$\frac{(x^2 - 6x + 9)(x^2 - 25)}{(x^2 + 2x - 15)(2x - 10)} = \frac{(x - 3)^2 (x - 5)(x + 5)}{(x + 5)(x - 3)2(x - 5)} = \frac{x - 3}{2}$$

Ejercicio nº 6.-

Solución:

- Numerador → Sacamos factor común y descomponemos en factores el polinomio de grado 2 que nos queda:

$$x^3 + 7x^2 + 12x = x(x^2 + 7x + 12)$$

Aplicamos Ruffini y queda así:

$$x^3 + 7x^2 + 12x = x(x + 4)(x + 3)$$

- Denominador → Descomponemos aplicando Ruffini:

	1	3	-16	-48
4		4	28	48
	1	7	12	0

$x^2 + 7x + 12$ es una expresión de 2º grado, que coincide con la del numerador. Así, finalmente, el denominador descompuesto en factores será: $x^3 + 3x^2 - 16x - 48 = (x - 4)(x + 4)(x + 3)$

- Simplificación de la fracción algebraica:

$$\frac{x^3 + 7x^2 + 12x}{x^3 + 3x^2 - 16x - 48} = \frac{x(x + 4)(x + 3)}{(x - 4)(x + 4)(x + 3)} = \frac{x}{x - 4}$$

Ejercicio nº 7.-

Solución:

- a) Observamos que tenemos el producto notable $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$.

Así:

$$\left(x - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{x^2}\right) = x^2 - \frac{1}{x^4} = \frac{x^6 - 1}{x^4}$$

- b) Calculamos el m.c.m. $[(x-2), (x^2 - 4x + 4)]$ que es $(x-2)^2$.
 $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

Luego:

$$\frac{x+1}{x-2} + \frac{2+x}{(x-2)^2} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)^2} + \frac{2+x}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 2x + x - 2 + 2 + x}{(x-2)^2} = \frac{x^2}{(x-2)^2}$$

Ejercicio nº 8.-

Solución:

$$\frac{x^3 - 49x}{x^4 - 7x^3} = \frac{x(x^2 - 49)}{x^3(x-7)} = \frac{x(x-7)(x+7)}{x^3(x-7)} = \frac{x+7}{x^2}$$

En el primer paso sacamos factor común; en el segundo paso aplicamos la identidad notable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ a la expresión $x^2 - 49$

Ejercicio nº 9.-

Solución:

- a) El paréntesis da prioridad a la resta:

$$\frac{2x}{x+1} - 1 = \frac{2x}{x+1} - \frac{x+1}{x+1} = \frac{x-1}{x+1}$$

Efectuamos el cociente:

$$\frac{2x}{x+1} : \frac{x-1}{x+1} = \frac{2x(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x}{x-1}$$

- b) m.c.m. $(2x, 3x^2, 6x^4) = 6x^4$

Así:

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{2x} - \frac{1-3x}{3x^2} + \frac{2x^2+3}{6x^4} &= \frac{3x^3(x-2)}{6x^4} - \frac{2x^2(1-3x)}{6x^4} + \frac{2x^2+3}{6x^4} = \\ &= \frac{3x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 6x^3 + 2x^2 + 3}{6x^4} = \frac{3x^4 + 3}{6x^4} = \frac{3(x^4 + 1)}{6x^4} = \frac{x^4 + 1}{2x^4} \end{aligned}$$

