4. Ecuaciones con fracciones y radicales

■ Para resolver la ecuación $\frac{x}{x^2-4}+1=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}$, se multiplican sus dos miembros por el máximo común divisor de los denominadores; es decir, por x^2-4:

$$\frac{x(x^2-4)}{x^2-4}+1(x^2-4)=\frac{x^2-4}{x+2}-\frac{x^2-4}{x-2}$$

Como $x^2-4=(x+2)\cdot(x-2)$, al simplificar se obtiene la ecuación:

$$x+x^2-4=x-2-(x+2) \Leftrightarrow x^2+x=0 \Leftrightarrow x(x+1)=0$$

Las soluciones de esta última ecuación, $x_1=0$ y $x_2=-1$, son las de la ecuación inicial, porque no anulan sus denominadores.

■ Para resolver la ecuación $\sqrt{x+1}+1=x$, se despeja la raíz pasando al otro miembro de la igualdad el resto de los términos, y después se elevan los dos miembros al cuadrado.

$$\sqrt{x+1}+1=x \Leftrightarrow (\sqrt{x+1})^2=(x-1)^2 \Leftrightarrow x^2-3x=0 \Leftrightarrow x(x-3)=0 \Leftrightarrow x=3 \text{ y } x=0$$

La solución es $x=3$ porque $x=0$ no lo es, ya que $\sqrt{1}+1\neq 0$

1 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{1-x}{x^2-1}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$

b) $\frac{x+1}{x-2}+\frac{2x+2}{x+1}=\frac{3x+1}{x-1}$

2 Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales:

a) $\frac{x}{\sqrt{x+9}}=\frac{\sqrt{x+9}}{x+1}$

b) $\sqrt{2x-1}=\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$

c) $\sqrt{x+5}+1=x$

3 Calcula la solución de estas ecuaciones racionales:

a) $1=\frac{2}{x-3}$

b) $\frac{1}{x-1}+\frac{x}{x+1}=\frac{5}{x^2-1}$

c) $\frac{x}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}=\frac{3}{x+2}$

4. Ecuaciones con fracciones y radicales

Solucionario

1 ***a)*** $\frac{1-x}{x^2-1}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$

Se multiplican los dos miembros por el máximo común divisor y se simplifica:

$\frac{(1-x)\cdot(x^2-1)}{x^2-1}=\frac{x^2-1}{x+1}+\frac{x^2-1}{x-1} \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$. Por tanto, la solución es $x=\frac{1}{3}$

b) $\frac{x+1}{x-2}+\frac{2x+2}{x+1}=\frac{3x+1}{x-1}$

Se multiplican los dos miembros por el máximo común divisor y se simplifica:

$$\frac{(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x^2-1)}{x-2}+\frac{(2x+1)\cdot(x-2)\cdot(x^2-1)}{x+1}=\frac{(3x+1)\cdot(x-2)\cdot(x^2-1)}{x-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1)\cdot(x^2+1)+(2x+2)\cdot(x-2)\cdot(x-1)=\frac{(3x+1)\cdot(x-2)\cdot(x^2-1)}{x-1} \Rightarrow x^2-4x-5=0$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son $x_1=5$ y $x_2=-1$.

2 ***a)*** $\frac{x}{\sqrt{x+9}}=\frac{\sqrt{x+9}}{x+1} \Leftrightarrow x(x+1)=(x+9) \Leftrightarrow x^2-9=0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3)=0$

Por tanto, las soluciones son $x_1=3$ y $x_2=-3$.

b) $\sqrt{2x-1}=\frac{x+1}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow (2x-1)\cdot(x-1)=(x-1)^2 \Leftrightarrow x^2-5x=0 \Leftrightarrow x(x-5)=0$

La solución es solo $x=5$, porque $x=0$ no lo es, ya que $\sqrt{-1}$ no existe.

c) $\sqrt{x+5}+1=x \Leftrightarrow \sqrt{x+5}=x-1 \Leftrightarrow x+5=(x-1)^2 \Leftrightarrow x^2-3x-4=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-4)=0$

La solución es solo $x=3$, porque $x=-1$ no lo es, ya que $\sqrt{-5}\neq -1$.

3 ***a)*** $1=\frac{2}{x-3} \Rightarrow x-3=2 \Rightarrow x=5$

b) $\frac{1}{x-1}+\frac{x}{x+1}=\frac{5}{x^2-1} \Rightarrow x+1+x^2-x=5 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$

c) $\frac{x}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}=\frac{3}{x+2} \Rightarrow x-2x-4=3x-6 \Rightarrow -4x=-2 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$