

## Tema 4. Ecuaciones e Inecuaciones.

1. Ecuaciones con una incógnita.
  - 1.1. Ecuaciones de primer grado
  - 1.2. Ecuaciones de segundo grado
  - 1.3. Ecuaciones bicuadráticas
  - 1.4. Ecuaciones polinómicas
  - 1.5. Ecuaciones con radicales.
  - 1.6. Ecuaciones de fracciones polinómicas.
2. Ecuaciones lineales con dos incógnitas
3. Sistema de ecuaciones
  - 3.1. Dos ecuaciones lineales
    - 3.1.1. Soluciones. Interpretación gráfica
    - 3.1.2. Resolución de 2 ecuaciones lineales.
  - 3.2. Sistemas no lineales de dos incógnitas
4. Inecuaciones lineales
  - 4.1. Inecuaciones lineales con una incógnita
  - 4.2. Inecuaciones lineales con dos incógnitas
  - 4.3. Inecuaciones de segundo grado con una incógnita
  - 4.4. Inecuaciones polinómicas y fracciones algebraicas
    - 4.4.1. Inecuaciones polinómicas
    - 4.4.2. Inecuaciones de fracciones algebraicas.
5. Sistemas de inecuaciones lineales
  - 5.1. Una incógnita
  - 5.2. Dos incógnitas

## 1. Ecuaciones con una incógnita.

En mucha de las situaciones de la vida diaria se plantean problemas que se pueden resolver a partir de ecuaciones. Por ejemplo, si queremos saber el lado de un jardín cuadrado de  $100\text{m}^2$ :

$$x=\text{lado} \rightarrow \text{área}=x^2=100\text{m}^2 \rightarrow x=\sqrt{100\text{m}^2} = 10\text{m}$$

### 1.1 Ecuaciones de primer grado

Son las más sencillas de resolver, a partir de las operaciones de simplificación obtendremos una expresión de la forma

$a \cdot x + b = 0$  donde  $a$  y  $b$  son números reales. Cuya solución es única  $x = -b/a$

*Ejemplo:*

$$\frac{3(x+1)}{2} - x = \frac{x-4}{3} \rightarrow \frac{9(x+1)}{6} - \frac{6x}{6} = \frac{2 \cdot (x-4)}{6} \rightarrow 9x+9-6x=2x-8 \rightarrow x=-17$$

$$\text{Comprobación: } \frac{3(-17+1)}{2} - (-17) = \frac{-17-4}{3} \rightarrow -24+17 = -7$$

#### Ejercicio 1. Resolver:

a)  $\frac{x-3}{2} + 7 = x - \frac{5-x}{3} \rightarrow$  solución  $x=43/5$

b)  $\frac{-3(5-x)}{10} - \frac{3x}{2} = 7 - \frac{5x}{3} \rightarrow$  solución  $x=255/14$

### 1.2 Ecuaciones de segundo grado

Después de operar la expresión simplificada de ecuaciones de segundo grado es de la forma:

$$a \cdot x^2 + bx + c = 0. \rightarrow \text{solución: } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2 \cdot a}$$

Podemos ver que según el signo del discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$  podemos tener 1, 2 o ninguna solución:

a)  $\Delta > 0$  dos soluciones  $x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$ ,  $x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$

b)  $\Delta = 0$  una solución  $x = \frac{-b}{2 \cdot a}$  (raíz doble)

c)  $\Delta < 0$  ninguna solución real (números complejos)

Resolución de ecuaciones incompletas (b o c nulas). Se pueden resolver por el método general, pero también se puede resolver de manera más sencilla. Veamos los dos casos:

$$1) \quad ax^2+c=0 \rightarrow x^2=-\frac{c}{a} \rightarrow x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}} \begin{cases} \text{si } \frac{c}{a} > 0 \text{ no solución} \\ \text{si } \frac{c}{a} < 0 \text{ 2 soluciones} \end{cases}$$

$$2) \quad ax^2+bx=0 \rightarrow x(ax+b)=0 \rightarrow x=0, x=-b/a. \text{ Siempre dos soluciones}$$

**Ejercicio 2. Resolver:**

$$a) \quad x^2-6\sqrt{2}x+18=0 \rightarrow x = \frac{6\sqrt{2} \pm \sqrt{72-72}}{2} = 3\sqrt{2}$$

$$b) \quad 2x^2-7x+3=0 \rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \left\langle \begin{matrix} 6 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle$$

$$c) \quad \frac{x+7}{x+3} + \frac{x^2-3x+6}{x^2+2x-3} = 1 \rightarrow (x+7) \cdot (x^2+2x-3) + (x^2-3x+6) = (x+3) \cdot (x^2+2x-3) \rightarrow$$

$$5x^2+5x-6=0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+120}}{10} = \frac{-5 \pm \sqrt{145}}{10} = \left\langle \begin{matrix} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{145}}{10} \\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{145}}{10} \end{matrix} \right\rangle$$

$$d) \quad \frac{x+1}{x+5} + \frac{1-x}{x-4} = \frac{5}{2} \rightarrow 2(x+1)(x-4) + 2(1-x)(x+5) = 5(x+5)(x-4) \rightarrow 5x^2+19x-102=0$$

$$x = \frac{-19 \pm \sqrt{361+2040}}{10} = \frac{-19 \pm 49}{10} = \left\langle \begin{matrix} 3 \\ -34 \\ 5 \end{matrix} \right\rangle$$

$$e) \quad (x-\sqrt{3})^2-1+x=x \rightarrow x^2-2\sqrt{3}x+3-1=0 \rightarrow x = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{12-8}}{2} = \left\langle \begin{matrix} \sqrt{3}+1 \\ \sqrt{3}-1 \end{matrix} \right\rangle$$

$$f) \quad 1+(x-2)^2=1 \rightarrow (x-2)^2=0 \rightarrow x=2$$

$$g) \quad 9x^2-25=0 \rightarrow x^2=25/9 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{25}{9}} = \pm \frac{5}{3}$$

$$h) \quad x^2-2x=0 \rightarrow x(x-2)=0 \rightarrow x=0, x=2$$

**1.3 Ecuaciones bicuadradas**

Ecuaciones polinómicas de 4º grado sin términos impar, es decir de la forma:

$$ax^4+bx^2+c=0. \text{ con } a,b,c \in \mathbf{R}$$

Procedimiento para resolver las ecuaciones bicuadráticas:

1. Cambio variable:  $x^2=t$ , luego  $x^4=t^2 \rightarrow at^2+bt+c=0$
2. Resolver la ecuación de segundo grado en t.
3. Soluciones son las raíces cuadradas de las soluciones en t (deshacer cambio variable).  $x = \pm \sqrt{t}$ .

El número de posibles soluciones son:

- a) 0 soluciones, o no soluciones en t o son negativas.
- b) 2 soluciones distintas
- c) 2 soluciones dobles
- d) 4 soluciones distintas

**Ejemplo:**  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Paso1:  $x^2 = t \rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0$

Paso2:  $t = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$

Paso3 :  $x = 2, -2, 1, -1$

**Ejercicio 3 : resolver las siguientes inecuaciones**

- a)  $x^4 - x^2 - 6 = 0 \rightarrow$  solución :  $x = \pm \sqrt{3}$
- b)  $x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \rightarrow$  solución  $x = \pm \sqrt{2}, \pm 1$
- c)  $-x^4 - 4x^2 - 45 = 0 \rightarrow$  No soluciones reales

**1.4 Ecuaciones polinómicas**

Las ecuaciones polinómicas son expresiones de la forma  $p(x)=0$  con  $p(x)$  un polinomio. Consiste en obtener los valores de  $x$  que anulan el polinomio, es decir las raíces. Las formas de proceder a calcular las soluciones son las mismas que las de obtener las raíces, vistas en el tema anterior (Ruffini, factor común, ecuaciones de 2º grado...)

**Ejemplos:**

$x^3 + x^2 = 0 \rightarrow x^2(x+1) = 0 \rightarrow x=0$  (doble) y  $x=-1$

$x^5 - 3x^4 - 8x^3 + 12x^2 + 16x = 0 \rightarrow x \cdot (x-4) \cdot (x+2) \cdot (x-2) \cdot (x+1) = 0 \rightarrow x=0, x=-2, x=2, x=-1, x=4$

**Ejercicio 4. Resolver:**

- a)  $(x+\pi) \cdot (x-1/2) \cdot (3x-7) = 0 \rightarrow$  soluciones  $x = -\pi, x=1/2, x=7/3$
- b)  $x^2 \cdot (x-\sqrt{2}) \cdot (5x+1) = 0 \rightarrow$  soluciones  $x=0$  (doble),  $x=\sqrt{2}, x=-1/5$
- c)  $4x^5 + 20x^4 - 53x^3 + 23x^2 + 13x - 7 = 0 \rightarrow$  soluciones  $x=1$  (doble),  $x=-7, x=1/2, x=-1/2$

**1.5 Ecuaciones con radicales.**

En este apartado veremos ecuaciones con raíces o con radicales. El objetivo a la hora de resolver estas ecuaciones es eliminar la raíz. Dos casos:

- a) Si tenemos una única raíz tendremos que aislarla a un lado de la igualdad, tomando cuadrados ambos de la igualdad desaparecerá la raíz.
- b) Si tenemos dos raíces y ningún otro factor dejamos una a cada lado de la igualdad y elevamos al cuadrado

Una vez obtenidas las soluciones tendremos que comprobar que estas lo son realmente, ya que al elevar al cuadrado se introducen soluciones inexistentes.

**Nota:** la razón de que al elevar al cuadrado haya soluciones no válidas es que el signo al cuadrado se pierde, así  $1 \neq -1$  pero  $(1)^2 = (-1)^2$

**Ejemplo:**

$$\sqrt{3x+4} - 4 = -2x \rightarrow \sqrt{3x+4} = 4 - 2x \xrightarrow{\text{elev cuadrado}} 3x+4 = (4-2x)^2 \rightarrow$$

$$3x+4 = 16 + 4x^2 - 16x \rightarrow 4x^2 - 19x + 12 = 0 \quad x = \begin{cases} 4 \\ 3/4 \end{cases}$$

**Comprobación:**

$$x=4 \rightarrow \sqrt{16} - 4 \neq -8 \quad (\text{no solución})$$

$$x = 3/4 \rightarrow \sqrt{\frac{25}{4}} - 4 = \frac{5}{2} - 4 = -\frac{3}{2} = -2 \cdot \frac{3}{4} \quad (\text{solución})$$

$$\sqrt{x^2+3x-1} - \sqrt{x^2+5} = 0 \rightarrow \sqrt{x^2+3x-1} = \sqrt{x^2+5} \xrightarrow{\text{elv cuadrado}} x^2+3x-1 = x^2+5$$

$$3x = 6 \rightarrow x = 2$$

**Comprobación:**

$$x=2 \rightarrow \sqrt{2^2+3 \cdot 2-1} - \sqrt{2^2+5} = \sqrt{9} - \sqrt{9} = 0 \quad \text{solución.}$$

**Ejercicio 5. Resolver:**

$$\text{a) } 4x + 2\sqrt{x+4} = 4 \rightarrow 2\sqrt{x+4} = 4 - 4x \rightarrow (2\sqrt{x+4})^2 = (4-4x)^2 \rightarrow$$

$$4(x+4) = 16x^2 - 32x + 16 \rightarrow 16x^2 - 36x = 0 \rightarrow 4x(4x-9) = 0 \quad x = \begin{cases} 0 \\ 9/4 \end{cases}$$

**Comprobación:**

$$x=0 \rightarrow 0 + 2 \cdot \sqrt{0+4} = 4 \quad \text{Solución}$$

$$x = 9/4 \rightarrow 4 \cdot \frac{9}{4} + 2 \cdot \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = 9 + 2 \cdot \frac{5}{2} \neq 4 \quad \text{No solución}$$

$$\text{b) } x^2 + \sqrt{4x^2-3} = 0 \rightarrow x^2 = -\sqrt{4x^2-3} \xrightarrow{\text{elev}} x^4 = 4x^2 - 3 \rightarrow x^4 - 4x^2 + 3 = 0$$

$$x^2 = t, x^4 = t^2 \rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \rightarrow t = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases} \quad x = \begin{cases} \pm \sqrt{3} \\ \pm 1 \end{cases}$$

**Comprobación:**

$$x=1 \rightarrow 1^2 + \sqrt{4 \cdot 1^2 - 3} = 2 \neq 0 \quad \text{No solución}$$

$$x=-1 \rightarrow (-1)^2 + \sqrt{4 \cdot (-1)^2 - 3} = 2 \neq 0 \quad \text{No solución}$$

$$x=\sqrt{3} \rightarrow (\sqrt{3})^2 + \sqrt{4 \cdot (\sqrt{3})^2 - 3} = 6 \neq 0 \quad \text{No solución}$$

$$x=-\sqrt{3} \rightarrow (-\sqrt{3})^2 + \sqrt{4 \cdot (-\sqrt{3})^2 - 3} = 6 \neq 0 \quad \text{No solución}$$

$$c) x - \sqrt{x} = 2 \rightarrow x - 2 = \sqrt{x} \xrightarrow{elv} (x - 2)^2 = x \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

Comprobación:

$$x=1 \rightarrow 1 - \sqrt{1} = 0 \neq 2 \text{ No solución}$$

$$x=4 \rightarrow 4 - \sqrt{4} = 2 \text{ Solución}$$

### 1.6 Ecuaciones de fracciones polinómicas.

Son ecuaciones de suma y resta de fracciones polinómica. La forma de resolver estas ecuaciones se realiza siguiendo los siguientes pasos:

Paso 1: Se expresan todas las fracciones con común denominador a ambos lados de la igualdad

Paso 2: se igualan los denominadores y se resuelve dicha ecuación.

Paso 3: se comprueban las soluciones. En caso de que alguna de las soluciones anule algún denominador esta no será válida.

$$\text{Ejemplo: } \frac{2x-2}{x-2} + \frac{x}{x+1} - \frac{x-2}{x+2} = \frac{5}{6}$$

Paso 1:

$$\frac{6(2x-2)(x+1)(x+2)}{6(x-2)(x+1)(x+2)} + \frac{6x(x-2)(x+2)}{6(x-2)(x+1)(x+2)} - \frac{6(x-2)(x+1)(x-2)}{6(x-2)(x+1)(x+2)} = \frac{5(x-2)(x+1)(x+2)}{6(x-2)(x+1)(x+2)}$$

Paso 2

$$12 \cdot x^3 + 42 \cdot x^2 - 36 \cdot x - 48 = 5 \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 - 20 \cdot x - 20 \rightarrow 7 \cdot x^3 + 37 \cdot x^2 - 16 \cdot x - 28 = 0$$

$$\text{Soluciones: } x=1, x = \frac{-22 \pm 12\sqrt{2}}{7}$$

Paso 3: Las 3 soluciones son validas porque para estos valores de x no se anula ningún denominador.

### Ejercicio 6. Resolver:

$$a) \frac{2}{x} - \frac{2-x}{x+3} = 1 \rightarrow \text{Solución } x=2$$

$$b) \frac{x}{x+1} + \frac{2}{x+2} = 3 \rightarrow \text{No tiene soluciones.}$$

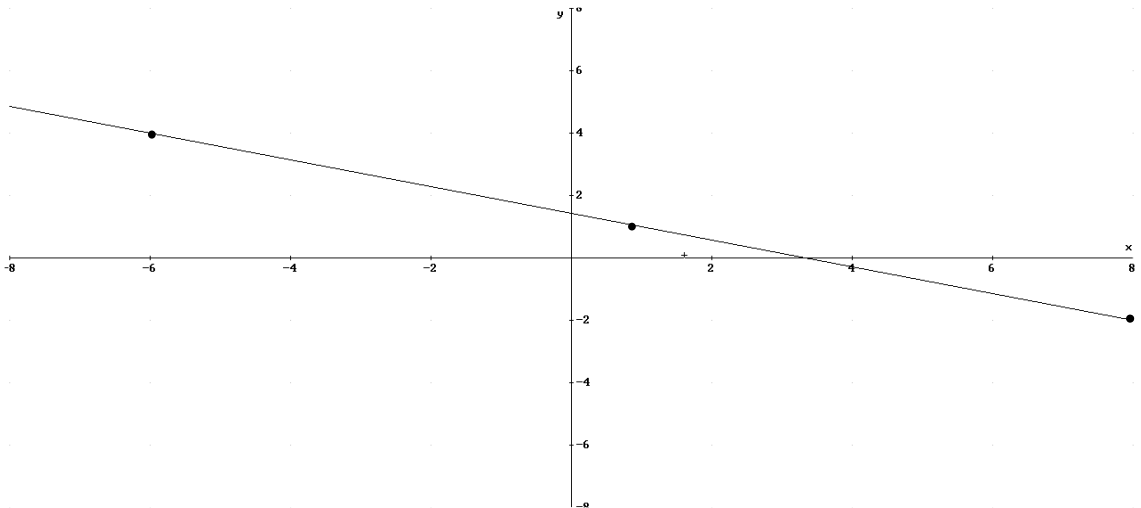
## 2. Ecuaciones lineales con dos incógnitas

Las ecuaciones lineales con dos incógnitas son de la forma  $ax+by=c$ , se caracterizan por tener infinitas soluciones para las dos variables (x,y) situadas sobre una recta.

**Ejemplo:**  $3x+7y=10$ , despejamos una variable (cualquiera de las dos)  $x = \frac{10-7y}{3}$ , damos valores a la variable no despejada y obtendremos valores de la despejada. Como es una recta si lo hacemos correctamente con dos valores sería suficiente, ya que por dos puntos pasa una única recta.

x	y
1	1
-6	4
8	-2

Representamos las soluciones:



**Ejercicio 7. Representa las soluciones de las siguientes ecuaciones**

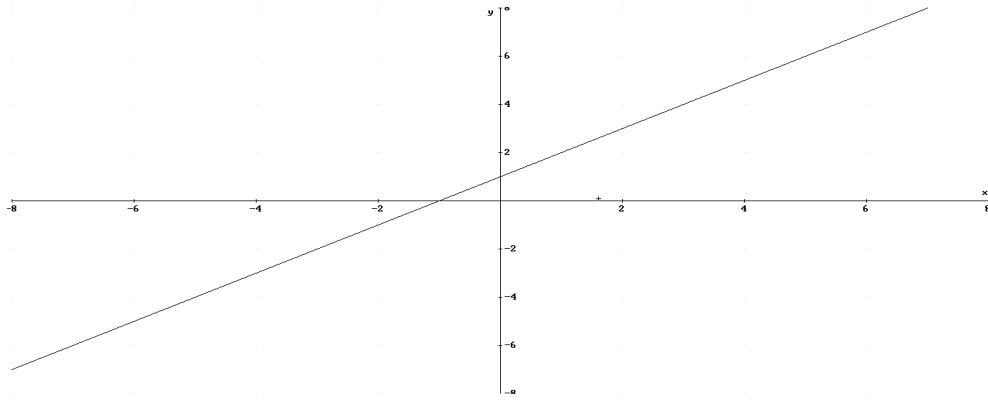
a)  $-x+y=1$

b)  $\sqrt{3x+5y}=\sqrt{3}$

c)  $-7x+3y=-5$

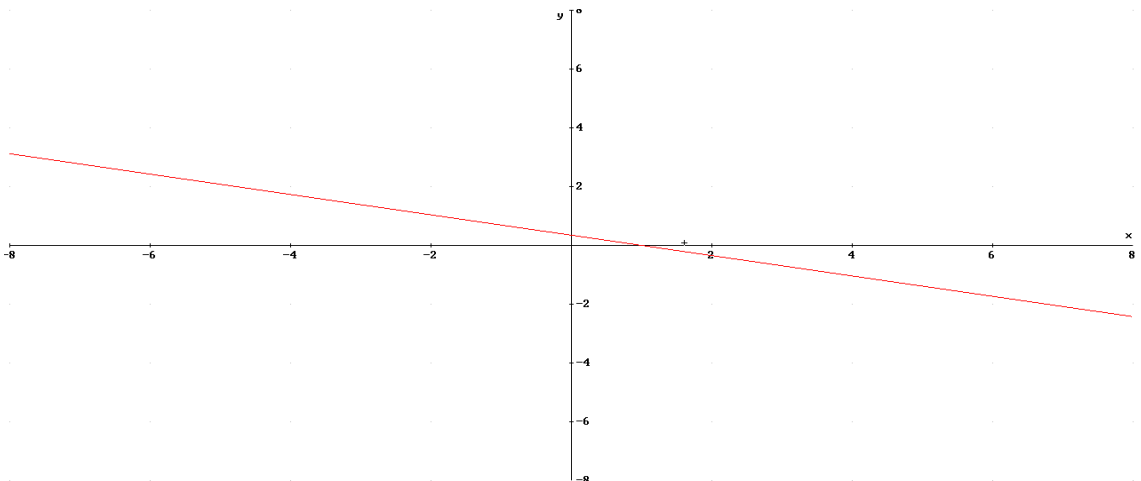
a)  $-x+y=1 \rightarrow y=1+x$

x	y
1	2
0	1
-1	0



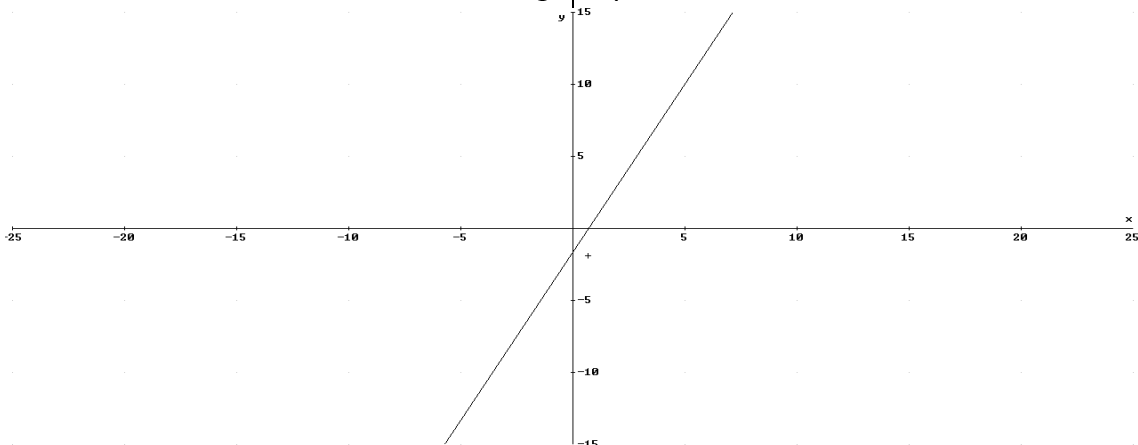
b)  $\sqrt{3}x+5y=\sqrt{3} \rightarrow y = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}x}{5}$

X	y
1	0
2	$-\sqrt{3}/5 \approx -0,35$



c)  $-7x+3y=-5 \rightarrow y = \frac{-5+7x}{3}$

x	y
2	3
-1	-4





### 3. Sistemas de ecuaciones

#### 3.1. Dos ecuaciones lineales

Los sistemas con dos ecuaciones lineales son de la forma:

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad ax + by = c \\ (2) \quad a'x + b'y = c' \end{array} \right\}$$

Las soluciones al sistema serán las soluciones comunes a la ecuación lineal con dos incógnitas de la ecuación primera ( $S_1$ ) y las soluciones de la segunda ecuación ( $S_2$ ). De esta forma si llamamos  $S$  a las soluciones del sistema, estas serán igual a

$$S = S_1 \cap S_2$$

#### 3.1.1. Soluciones. Interpretación gráfica de las soluciones.

Según el número de soluciones se puede distinguir entre los siguientes tipos de sistemas:

##### 1. Sistema compatible indeterminado, infinitas soluciones

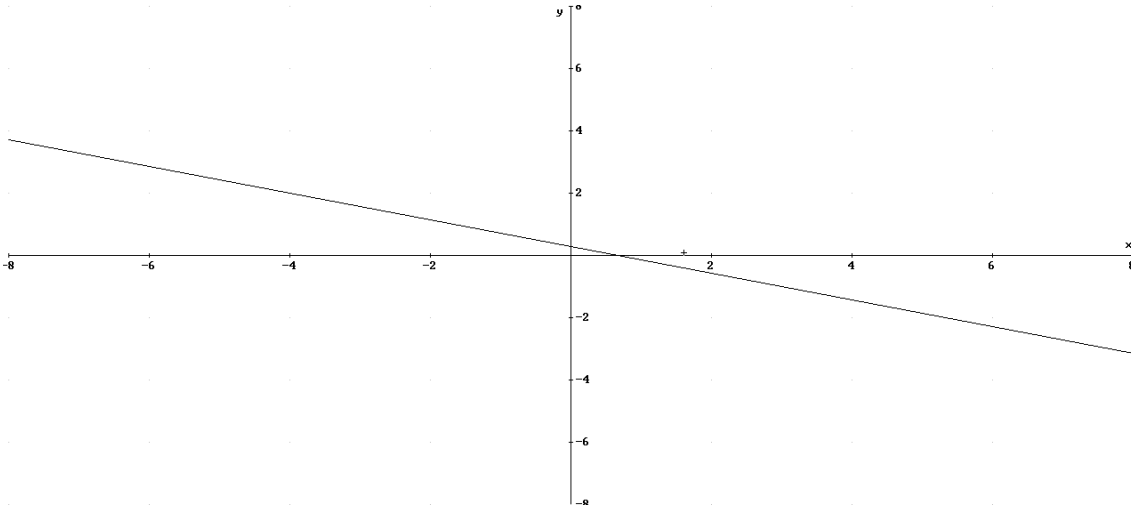
Ocurre cuando la ecuación (1) es equivalente a la (2), se cumple entonces:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

$$\text{Ejemplo: } \left. \begin{array}{l} (1) \quad 3x + 7y = 2 \\ (2) \quad -6x - 14y = -4 \end{array} \right\} (2) \equiv (1) \rightarrow \frac{3}{-6} = \frac{7}{-14} = \frac{2}{-4}$$

Si representamos las dos ecuaciones se trata de dos rectas iguales, por tanto las soluciones son todos los puntos situados en la recta que viene determinada por la ecuación (1) o (2).

*Ejemplo:* en el ejemplo anterior las soluciones son:



## 2. Sistema incompatible, no tiene soluciones

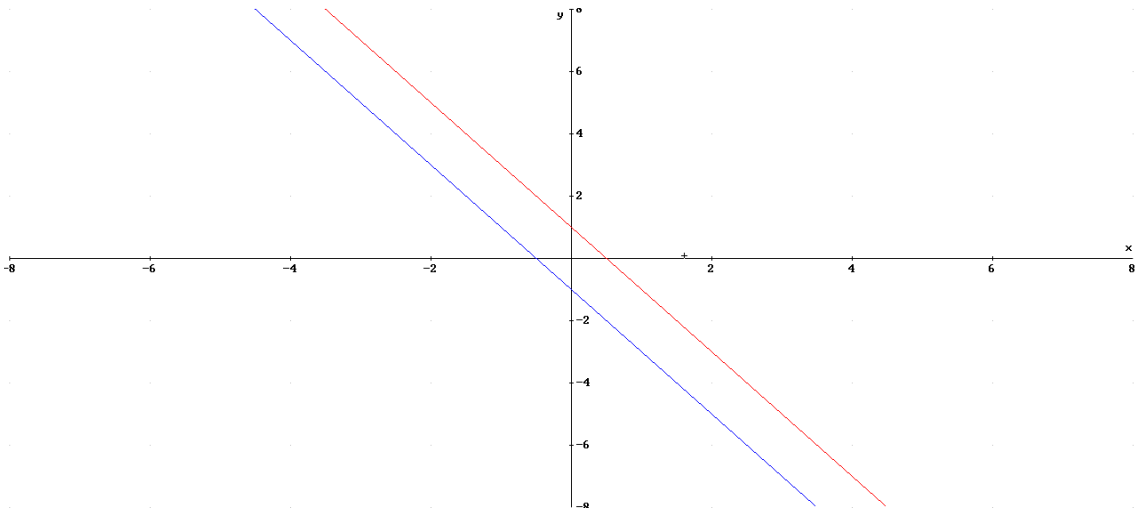
Ocurre cuando las dos ecuaciones son incompatibles, es decir tienen ninguna solución en común. Ocurre cuando la relación entre sus coeficientes son los siguientes:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

No tiene soluciones, al tratarse de dos rectas paralelas. Veamos un ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} (1) 2x + y = 1 \\ (2) 4x + 2y = -2 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{-2}$$

Interpretación gráfica:



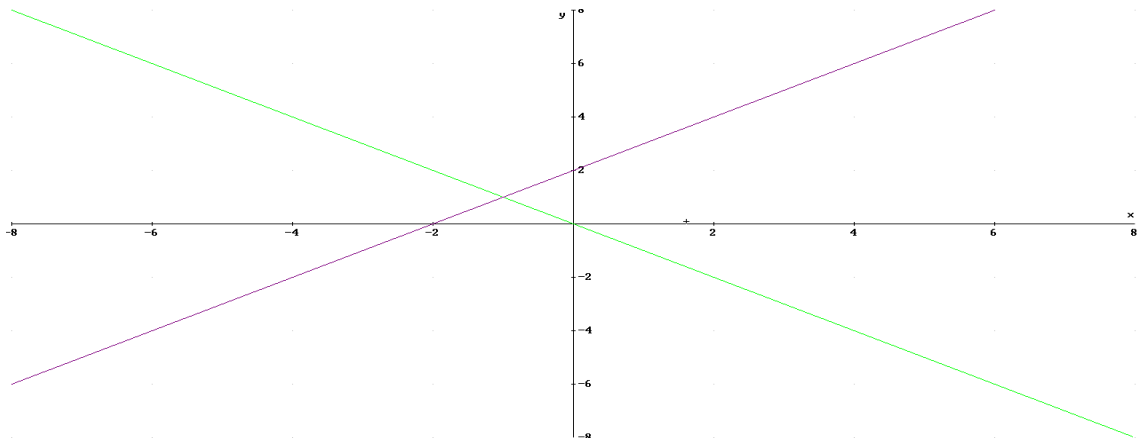
## 3. Compatible determinado, una única solución.

Ocurre cuando tienen una única solución. Gráficamente ocurre cuando las dos rectas se cortan en un único punto que será la solución a las dos ecuaciones. Ocurre si la relación entre los coeficientes:

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$$

Ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} (1) x + y = 0 \\ (2) -x + y = 2 \end{array} \right\} \frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1} \rightarrow \text{comp det}$$



### 3.1.2. Resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales

Resolver un sistema es hallar sus soluciones, según el tipo de sistema tendremos:

1. **Compatibles indeterminados:** la solución es la de una de las dos ecuaciones, que resolvemos como hemos visto en el apartado anterior representando una recta.
2. **Incompatibles:** no tienen solución, por lo que no tendremos que resolverlas
3. **Compatibles determinados:** tiene una única solución que resolvemos por uno de los tres métodos vistos en el curso anterior. Veamos un ejemplo y resolvámoslo por los tres métodos:

$$\left. \begin{array}{l} (1) x + y = 1 \\ (2) x - y = 0 \end{array} \right\}$$

a) *Sustitución:* igualamos una incógnita en una ecuación y la introducimos en la otra ecuación, obteniendo una ecuación de primer grado con una incógnita:

$$y=1-x \rightarrow x-(1-x)=0; 2x=1; x=1/2; y=1-1/2=1/2 \rightarrow \text{solución; } x=1/2, y=1/2$$

b) *Igualación:* consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones para luego igualarlas entre si y obtener una ecuación con una incógnita:

$$y=1-x; y=x \rightarrow 1-x=x; 2x=1 \rightarrow \text{solución } x=1/2; y=1/2$$

c) *Reducción:* consiste en sumando o restando las ecuaciones multiplicadas por factores se anula alguna incógnita, la x o la y. Así obtenemos una ecuación de primer grado con una incógnita:

$$(1)+(2) \rightarrow 2x=1, x=1/2, y=1-1/2=1/2 \rightarrow \text{solución } x=1/2; y=1/2$$

**Ejercicio 8. Resuelve, clasifica y interpreta gráficamente las soluciones de los siguientes sistemas:**

a) 
$$\begin{cases} (1) 3x - 2y = 1 \\ (2) 6x - 4y = 2 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} (1) 4x - y = 5 \\ (2) -8x + 2y = 3 \end{cases}$$

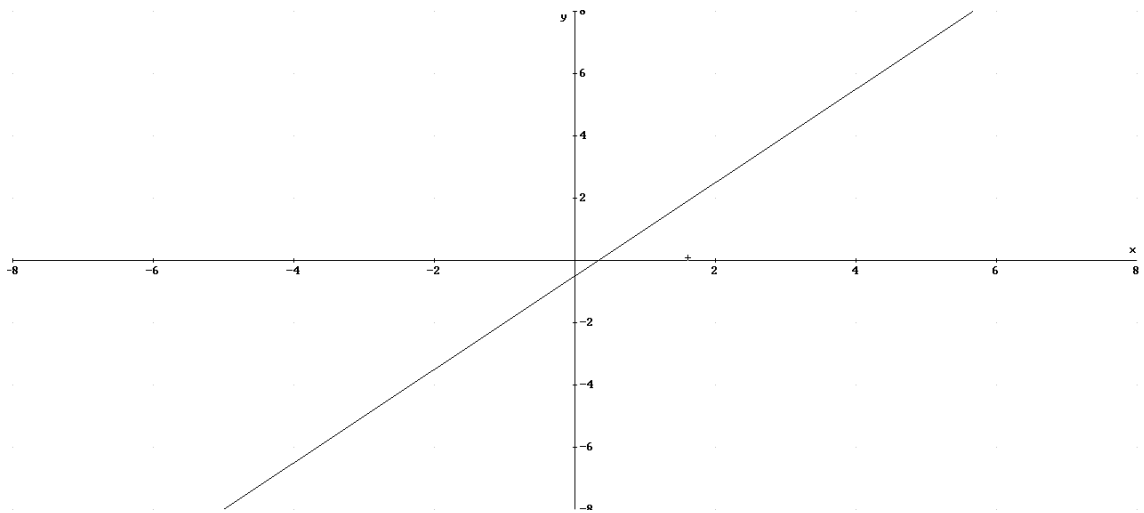
c) 
$$\begin{cases} (1) x - 3y = 2 \\ (2) 2x + y = 4 \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} (1) -18x + 6 = 6y \\ (2) y + 3x + 5 = 6 \end{cases}$$

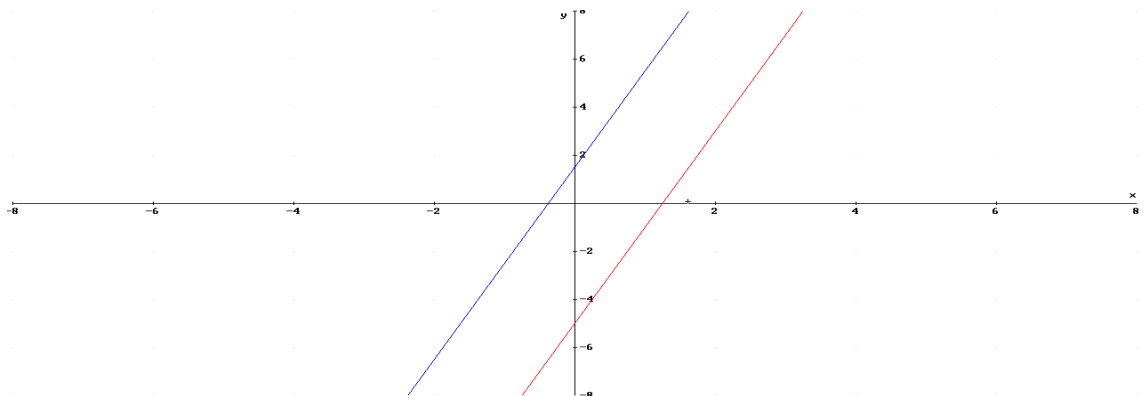
e) 
$$\begin{cases} (1) \frac{x}{3} - 2y = \frac{3}{4} \\ (2) 5x + y = 0 \end{cases}$$

**Soluciones:**

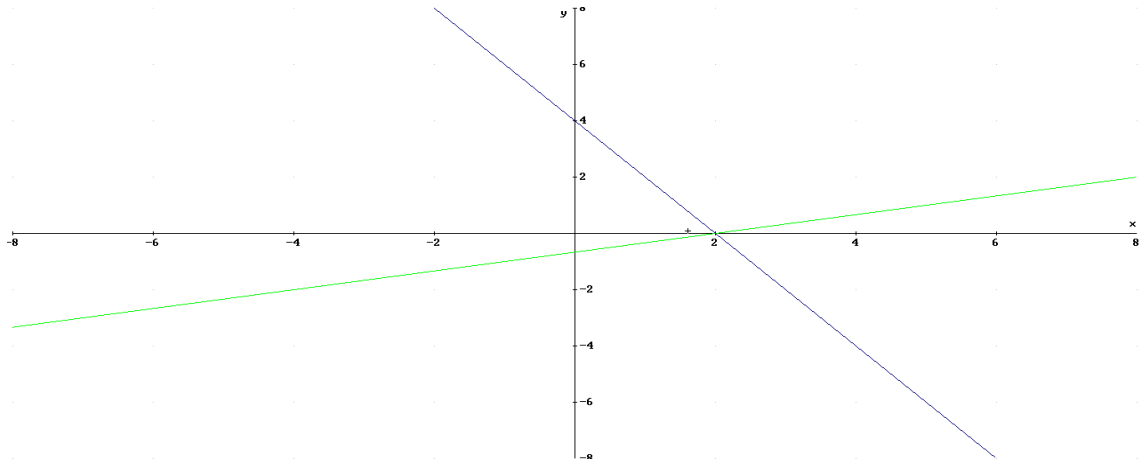
a)  $\frac{3}{6} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$  Compatible indeterminado  $\rightarrow x = \frac{1+2y}{3}$



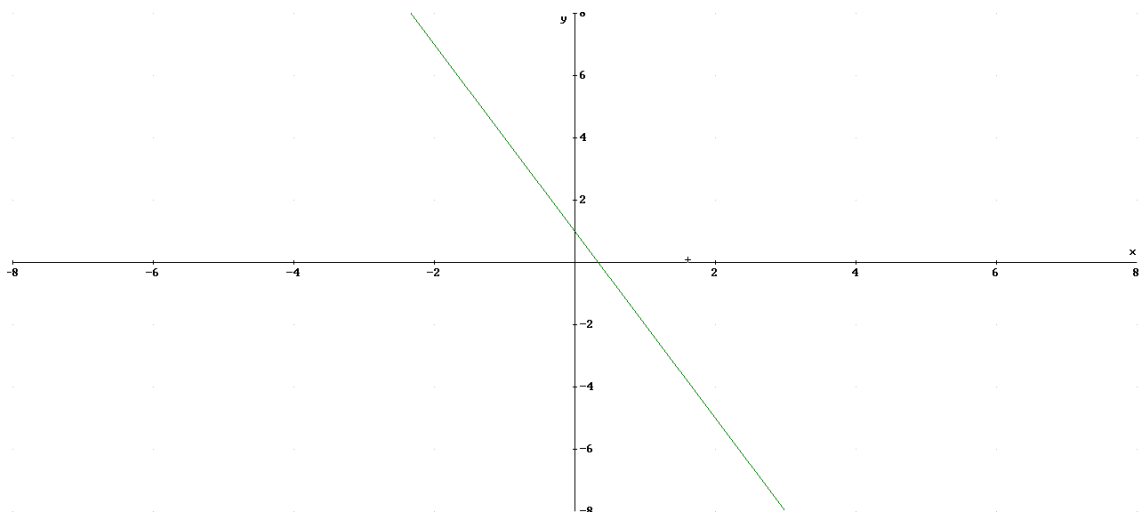
b)  $\frac{4}{-8} = \frac{-1}{2} \neq \frac{5}{3}$ . Incompatible, no solución



c)  $\frac{1}{2} \neq \frac{-3}{1}$ . Compatible determinado, una solución.  $x=2, y=0$

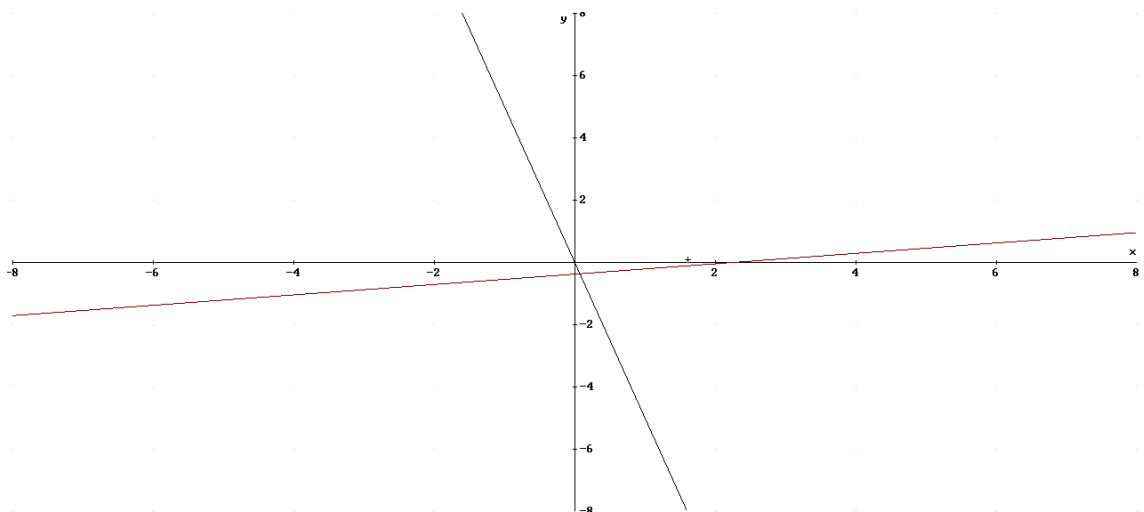


d)  $\frac{-18}{3} = \frac{-6}{1} = \frac{-6}{1} \rightarrow$  Compatible indeterminado. Infinitas soluciones.



e)  $\left. \begin{array}{l} (1) \frac{x}{3} - 2y = \frac{3}{4} \\ (2) 5x + y = 0 \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} (1) 4x - 24y = 9 \\ (2) 5x + y = 0 \end{array} \right\} \frac{4}{5} \neq \frac{-24}{1} \rightarrow$  compatible determinado, una

solución  $\rightarrow$  Solución  $x=9/124, y=-45/124$



### 3.2. Sistemas no lineales con dos incógnitas

Estos sistemas son aquellos donde una o varias ecuaciones no son lineales, es decir aparecen términos cuadráticos, cúbico, etc. En este tema trataremos sólo cuando tenemos exponentes cuadráticos. Generalmente se resuelve por sustitución. Veamos tres ejemplos:

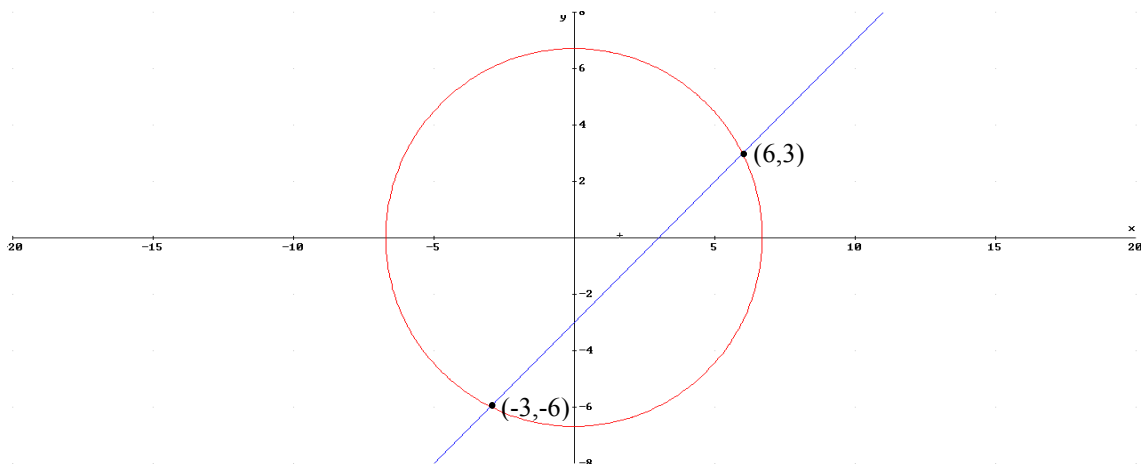
*Ejemplo 1:*

$$\left. \begin{array}{l} (1) x - y = 3 \\ (2) x^2 + y^2 = 45 \end{array} \right\} \rightarrow x=3+y, \text{ sustituyendo en (2) } (3+y)^2+y^2=45; 2y^2+6y-36=0$$

$$y = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 288}}{4} = \frac{-6 \pm 18}{4} = \begin{cases} -6 \rightarrow x = 3 - 6 = -3 \\ 3 \rightarrow x = 3 + 3 = 6 \end{cases}$$

**Dos soluciones (x=-3, y=-6); (x=6, y=3)**

Para interpretar gráficamente la solución tendremos que saber que la ecuación de una circunferencia con centro en el origen y radio R es de la forma  $x^2+y^2=R^2$ . De esta forma la ecuación  $x^2+y^2=45$ , es una ecuación de una circunferencia de radio  $R=\sqrt{45}$



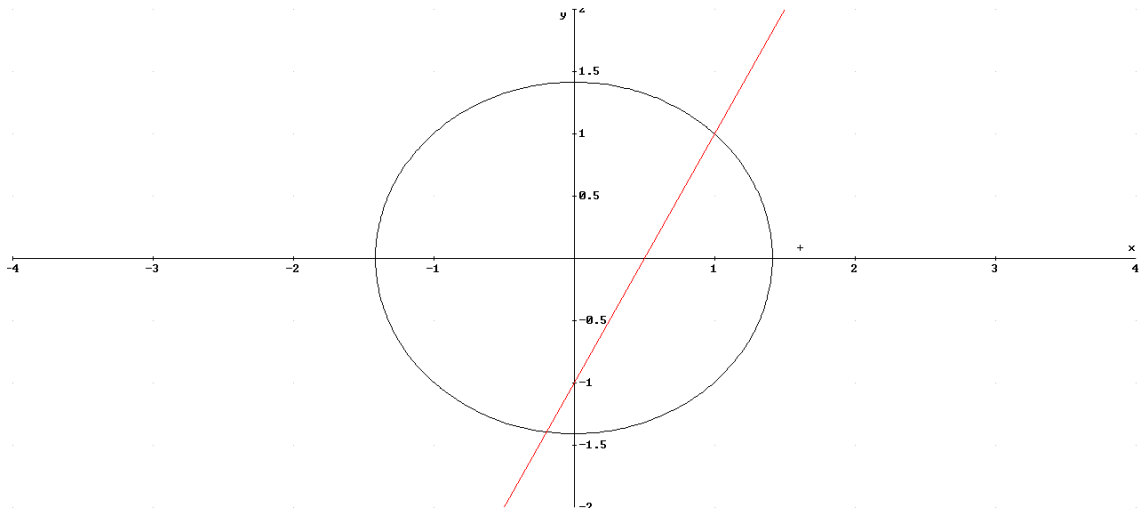
*Ejemplo 2:*

$$\left. \begin{array}{l} (1) y - x = -1 + x \\ (2) x^2 + y^2 = 2 \end{array} \right\} \rightarrow y=-1+2x \rightarrow x^2+(2x-1)^2=2; x^2+4x^2-4x+1-2=0$$

$$5x^2-4x-1=0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{10} = \frac{4 \pm 6}{10} = \begin{cases} 1 \rightarrow y = -1 + 2 = 1 \\ -1/5 \rightarrow y = -1 - 2/5 = -7/5 \end{cases}$$

Soluciones (x=1, y=1); (x=-1/5, y=-7/5)

Interpretación gráfica (circunferencia de radio  $\sqrt{2}$  y recta)



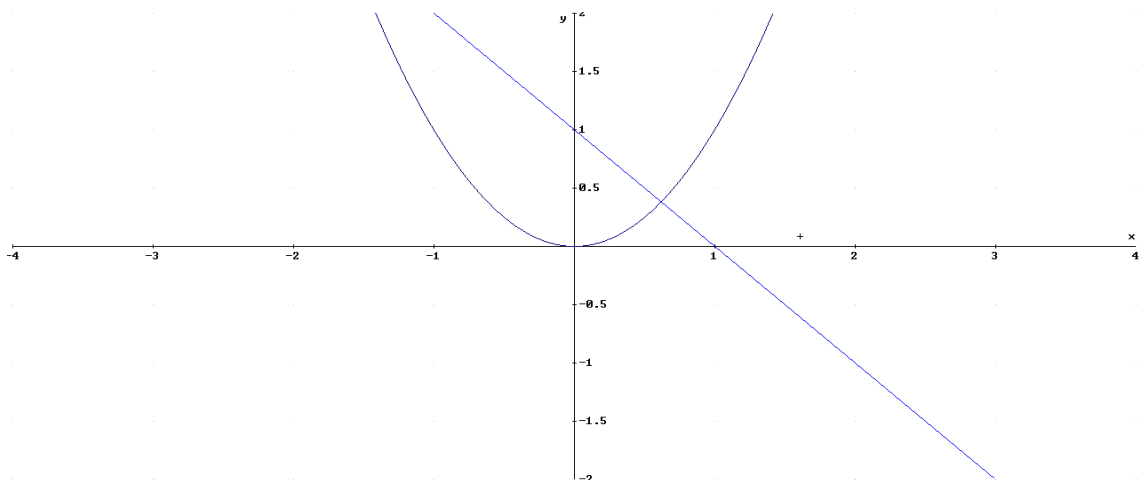
Ejemplo 3:

$$\left. \begin{array}{l} (1) y = x^2 \\ (2) y + x = 1 \end{array} \right\} \rightarrow y = 1 - x \rightarrow 1 - x = x^2 \rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \rightarrow$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \rightarrow y = 1 - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \\ \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \rightarrow x = 1 - \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Soluciones } \left(x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, y = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) \quad \left(x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, y = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

Interpretación gráfica ( $y=x^2$  es una parábola,  $y+x=1$  una recta)



## 4. Inecuaciones lineales

Las inecuaciones son expresiones semejantes a las ecuaciones pero en vez de aparecer el signo = aparecen los signos  $\leq, <, \geq, >$ . Veamos diferentes tipos de inecuaciones

### 4.1. Inecuaciones lineales con una incógnita

Son expresiones de la forma (después de simplificar) de la forma:

$$ax+b < c, ax+b > c, ax+b \leq c \text{ ó } ax+b \geq c \text{ siendo } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0$$

Para resolver la inecuación hay que tener en cuenta las siguientes reglas:

- a) Si un número está a un lado de la desigualdad y deseamos pasarla al otro lado pasará restando y al revés (igual que en las ecuaciones)

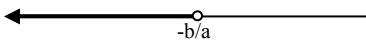
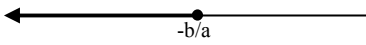
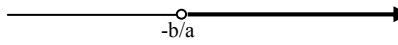
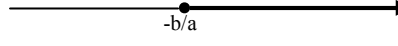
$$\text{Ejemplo: } 5x-2 < 6 \rightarrow 5x < 6+2 \rightarrow 5x < 8$$

- b) Si multiplicamos o dividimos la desigualdad por un número negativo entonces el signo  $<$  o  $\leq$  cambia a  $>$  o  $\geq$ , y al revés. De esta forma si queremos despejar de  $x$  un número que le multiplica pasa dividiendo cambiando el sentido de la desigualdad si es un número negativo. Lo mismo pasa si está dividiendo

$$\text{Ejemplos: } -3x < 2 \rightarrow x > -2/3$$

$$-x/5 \geq 2 \rightarrow x \leq -10$$

Despejando la  $x$  de la inecuación anterior tendremos las siguientes posibles expresiones:

$x < -b/a$	Solución= $(-\infty, -b/a)$	
$x \leq -b/a$	Solución= $(-\infty, -b/a]$	
$x > -b/a$	Solución= $(-b/a, \infty)$	
$x \geq -b/a$	Solución= $[-b/a, \infty)$	

$$\text{Ejemplo: } 3-5x < 8 \rightarrow -5x < 8-3 \rightarrow -5x < 5 \rightarrow x > -1 \quad x \in (-1, \infty)$$

### Ejercicio 9. Resolver las siguientes inecuaciones:

a)  $2(x-2)+3x < 5x+6$

b)  $3x+7-5(2x-3) \geq (x-1)/2 - 1$

c)  $3 \cdot (x-1)/2 - x > (x-3)/2$

#### Solución

a)  $2x-4+3x < 5x+6 \rightarrow 0x < 10 \rightarrow 0 < 10$ , que es cierto independientemente del valor de  $x$ , luego la solución es  $x \in \mathbb{R}$

b)  $3x+7-10x+15 \geq (x-1)/2-1, -7x+22 \geq (x-1)/2-1 \xrightarrow{\text{mult por 2}} -14x+44 \geq x-1-2 \rightarrow$   
 $-15x \geq -47 \rightarrow x \leq \frac{47}{15}, x \in (-\infty, \frac{47}{15}]$



c)  $\frac{3x-3}{2} - x > \frac{x-3}{2} \xrightarrow{\text{mul por 2}} 3x-3-2x > x-3 \rightarrow 0x > 0 \rightarrow 0 > 0$  No es cierto independientemente del valor de x, luego no hay soluciones  $S=\emptyset$

#### 4.2. Inecuaciones lineales con dos incógnitas

Una inecuación lineal con dos incógnitas es una expresión de la forma:

$$ax+by < c; ax+by > c; ax+by \leq c; ax+by \geq c$$

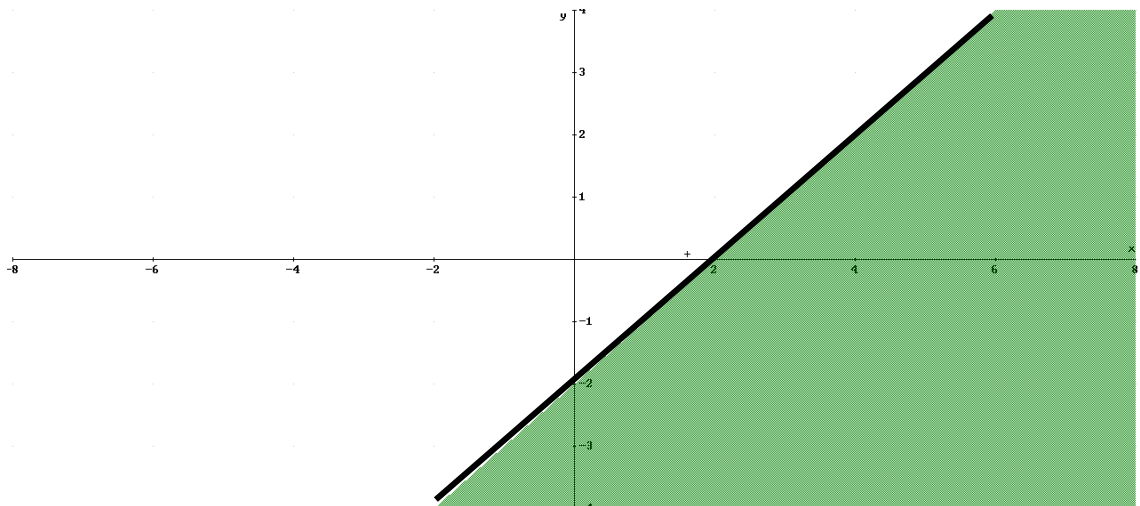
Por lo general existen infinitos valores de parejas (x,y) que cumplen las soluciones a la inecuación lineal. Veremos las soluciones representadas en los ejes de coordenadas.

Pasos a seguir para obtener las soluciones:

1. Representamos la recta determinada por  $ax+by=c$ . quedando dividido el plano en dos semiplanos (uno de ellos será la solución)
2. Tomamos un punto arbitrario con un valor de x e y. Si para estos valores de x y de y la inecuación es cierta, el semiplano que contiene el punto es la solución, sino es así es el otro semiplano
3. Si tenemos  $\geq$  ó  $\leq$  la recta será solución (que es la solución a la igualdad  $ax+by=c$ ) si tenemos  $<$  ó  $>$  entonces la recta no será solución

*Ejemplo:*

$x-y \geq 2$ . representamos la recta  $y=x+2$ . Tomamos el punto (0,0)  $\rightarrow 0-0 \geq 2$  que no cumple la inecuación, luego la solución es el semiplano que no contiene el origen. La recta es solución ya que el símbolo es  $\geq$



**Ejercicio 10. Resolver:**

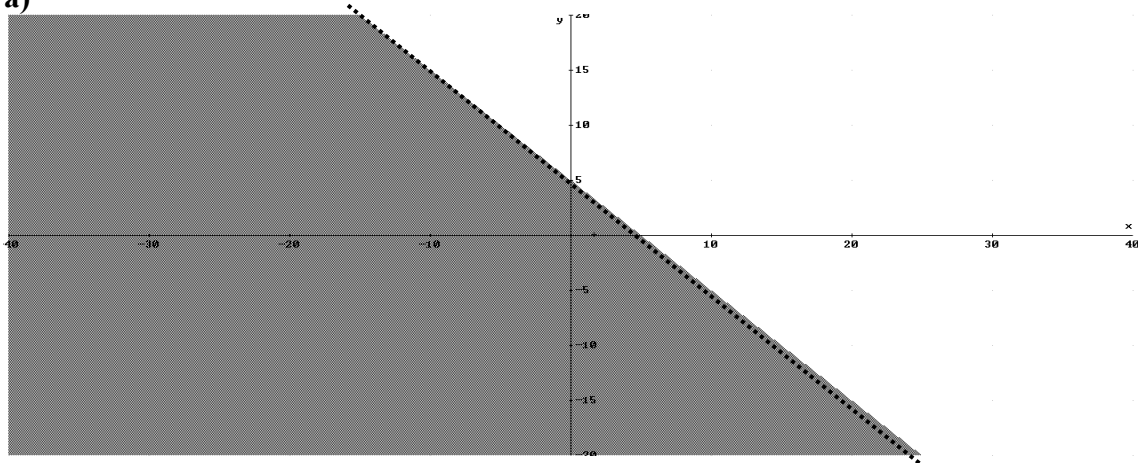
a)  $x+y < 5$

b)  $x-y \leq 1$

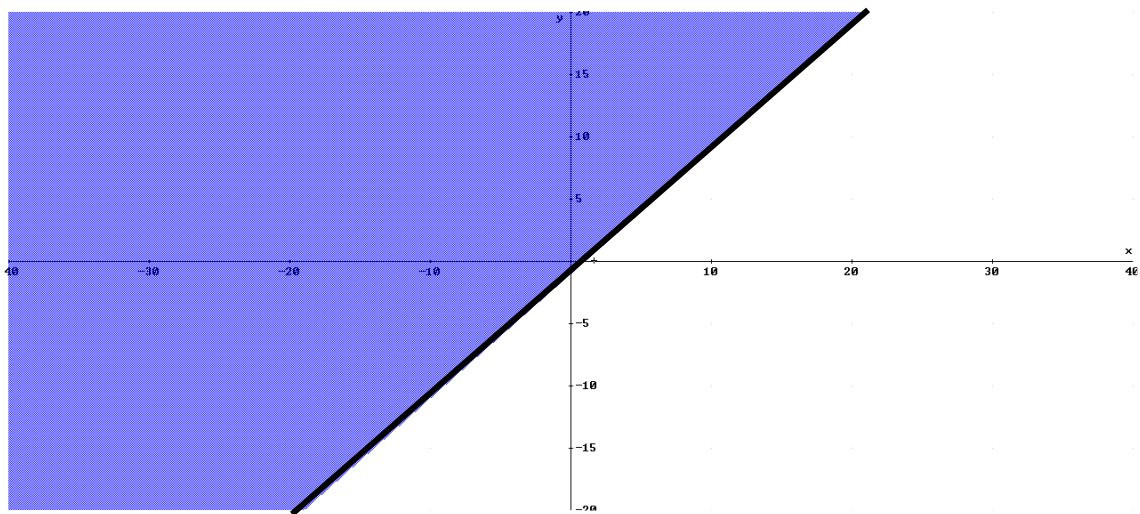
c)  $2x-1/3 \geq x-y$

**Solución**

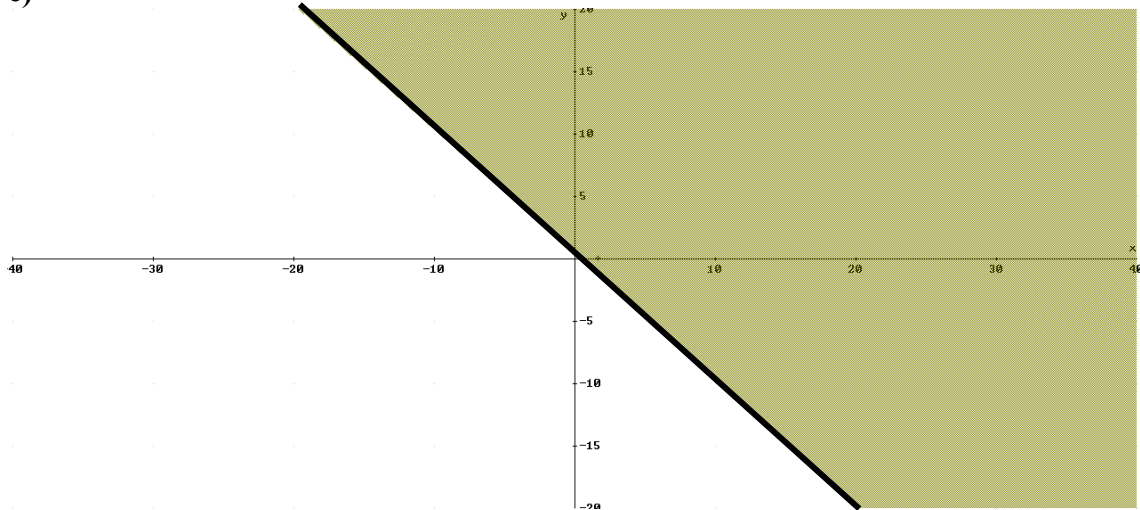
a)



b)



c)



### 4.3. Inecuaciones de segundo grado con una incógnita

Son expresiones que después de operar son de la forma:

$$ax^2+bx+c<0, ax^2+bx+c>0; ax^2+bx+c\leq 0; ax^2+bx+c\geq 0$$

Los pasos para la resolución de las inecuaciones son los siguientes:

1. Cálculo de las soluciones a la igualdad (raíces de  $ax^2+bx+c$ ) que son  $x_1$  y  $x_2$ 
  - a. Si son soluciones reales, factorizamos el polinomio  $a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)<0$ 
    - i. Dividimos la recta real en 3 intervalos(2 si es raíz doble)  $(-\infty,x_1); (x_1,x_2); (x_2,\infty)$ . Estudiamos el signo en cada intervalo
    - ii. Las soluciones son los intervalos que cumplen la desigualdad.
  - b. Si no son reales entonces  $ax^2+bx+c$  no cambia de signo, por lo que o es siempre positivo si  $c>0$  o negativo si  $c<0$ . Así las soluciones serán o todo  $\mathbb{R}$  o el vacío.

Ejemplos:

a)  $x^2+x-6\leq 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$$

$$x^2+x-6\leq 0 \rightarrow (x+3)(x-2)\leq 0$$

	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,2)$	2	$(2,\infty)$
Signo(x+3)	-	0	+	+	+
Signo(x-2)	-	-	-	0	+
Signo( $x^2+x-6$ )	+	0	-	0	+

Solución  $x \in [-3,2]$

b)  $x^2+1<0$

$x^2=-1 \rightarrow$  no solución real.

$x^2+1$  siempre es positivo, por ejemplo en  $x=0$ :  $0^2+1=1>0$

No soluciones  $S=\emptyset$

c)  $x^2+1>0 \rightarrow x \in \mathbb{R}$

**Ejercicio 11. Resolver:**

a)  $x^2-6x+9>0$

b)  $-3x^2-5x+2 \leq 0$

c)  $(x-3)^2 \geq 4$

d)  $(2x-1)/5 > 3x^2/2$

**Soluciones:**

a)  $(x-3)^2 > 0$

	$(-\infty, 3)$	3	$(3, \infty)$
Signo(x-3)	-	0	+
Signo(x-3)	-	0	+
Signo( $x^2-6x+9$ )	+	0	+

Solución  $\rightarrow x \in \mathbb{R} - \{3\}$

b)  $-3x^2-5x+2 \leq 0 \rightarrow -3(x-1/3)(x+2) \leq 0$

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 1/3)$	1/3	$(1/3, \infty)$
Signo(x+2)	-	0	+	+	+
Signo(x-1/3)	-	-	-	0	+
-3	-	-	-	-	-
Signo( $x^2+x-6$ )	-	0	+	0	-

Solución  $\rightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [1/3, \infty)$

c)  $(x-3)^2 \geq 4 \rightarrow x^2-6x+5 \geq 0 \rightarrow (x-5) \cdot (x-1) \geq 0$

$(-\infty, 1)$	1	$(1, 5)$	5	$(5, \infty)$
----------------	---	----------	---	---------------

Signo(x-1)	-	0	+	+	+
Signo(x-5)	-	-	-	0	+
Signo(x <sup>2</sup> -6x+5)	+	0	-	0	+

Solución  $\rightarrow x \in (-\infty, 1] \cup [5, \infty)$

#### 4.4. Inecuaciones polinómicas y fracciones algebraicas

##### 4.4.1. Polinomios

En este apartado estudiaremos las inecuaciones del tipo:

$P(x) < 0$ ,  $P(x) > 0$ ,  $P(x) \leq 0$ ,  $P(x) \geq 0$ .

Resolución:

1. Factorizamos, obteniendo las raíces  $x_1, x_2, \dots, x_n$
2. Estudiamos el signo en los intervalos  $(-\infty, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_n, \infty)$
3. De los intervalos tomamos aquellos que solucionen la inecuación.

Ejemplo :  $x^4 + x^3 + 3x^2 - 11x - 14 \leq 0$ ; Factoriz  $\rightarrow (x+1)(x-2)(x^2+2x+7) \leq 0$ . Raíces  $x=-1, x=2$

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 2)$	2	$(2, \infty)$
Signo(x+1)	-	0	+	+	+
Signo(x-2)	-	-	-	0	+
Signo(x <sup>2</sup> +2x+7)	+	+	+	+	+
Signo(x <sup>4</sup> +x <sup>3</sup> +3x <sup>2</sup> -11x-14)	+	0	-	0	+

Solución  $x \in [-1, 2]$

#### Ejercicio 12. Resuelve

1)  $-x^3 - 2x^2 + x + 2 > 0$

2)  $-3x^3 - 24x^2 - 21x \leq 0$

Solución:

1)  $-x^3 - 2x^2 + x + 2 = -(x+2) \cdot (x+1) \cdot (x-1) > 0$ . Raíces  $x=-2, -1, 1$

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, \infty)$
Signo(x+2)	-	0	+	+	+	+	+
Signo(x+1)	-	-	-	0	+	+	+
Signo(x-1)	-	-	-	-	-	0	+
-1	-	-	-	-	-	-	-

Signo( $-x^3-2x^2+x+2$ )	+	0	-	0	+	0	-
--------------------------	---	---	---	---	---	---	---

Solución  $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 1)$

2)  $-3x^3-24x^2-21x = -3 \cdot x \cdot (x+7) \cdot (x+1) \leq 0$ . Raíces  $x = -7, -1, 0$

	$(-\infty, -7)$	-7	$(-7, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, \infty)$
Signo( $x+7$ )	-	0	+	+	+	+	+
Signo( $x+1$ )	-	-	-	0	+	+	+
Signo( $x$ )	-	-	-	-	-	0	+
-3	-	-	-	-	-	-	-
Signo( $-x^3-2x^2+x+2$ )	+	0	-	0	+	0	-

Solución  $x \in [-7, -1] \cup [0, \infty)$

3)  $x^3-2x^2 \leq x \rightarrow x^3-2x^2-x \leq 0 \rightarrow x(x-1)^2 \leq 0$

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
Signo( $x$ )	-	0	+	+	+
Signo( $x-1$ )	-	-	-	0	+
Signo( $x-1$ )	-	-	-	0	+
Signo( $x^3-2x^2-x$ )	-	0	+	0	+

Solución  $x \in (-\infty, 0] \cup \{1\}$

#### 4.4.2. Inecuaciones de fracciones algebraicas

Las inecuaciones de fracciones algebraicas son expresiones de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0; \frac{P(x)}{Q(x)} > 0; \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0; \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0, \text{ siendo } P(x) \text{ y } Q(x) \text{ polinomios.}$$

La forma de resolver estas inecuaciones es semejante a la de los polinomios. Los pasos son los siguientes:

1. Factorización de  $P(x)$  y de  $Q(x)$ . Y simplificación de la fracción si coincide algún factor.
2. Estudiamos el signo en los intervalos comprendidos entre las raíces de  $P(x)$  y  $Q(x)$  que no han sido simplificadas

3. A partir de estudiar el signo de cada factor podemos determinar cuando la fracción algebraica es mayor, menor o igual que cero

Nota: cuidado con las raíces del polinomio  $Q(x)$ , ya que en estos valores  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  no se anula, sino que no existe (dividir por cero)

**Ejemplo:**  $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 6} \leq 0 \rightarrow \frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x+3)} \leq 0 \rightarrow$  raíces son -3, -2, -1 y 1

	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, -2)$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, \infty)$
Sig(x+3)	-	0	+	+	+	+	+	+	+
Sig(x+2)	-	-	-	0	+	+	+	+	+
Sig(x+1)	-	-	-	-	-	0	+	+	+
Sig(x-1)	-	-	-	-	-	-	-	0	+
Sig( $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 6}$ )	+	No existe	-	No existe	+	0	-	0	+

Solución:  $x \in (-3, -2) \cup [-1, 1]$

**Ejercicio 13. Resolver las siguientes inecuaciones**

a)  $\frac{-x^2 + 6x - 8}{x^2 - 4} \geq 0 \rightarrow \frac{-(x-4)(x-2)}{(x+2)(x-2)} \geq 0 \rightarrow$  raíces -2 y 4

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 4)$	4	$(4, \infty)$
Signo(x+2)	-	0	+	+	+
Signo(x-4)	-	-	-	0	+
Signo(-1)	-	-	-	-	-
Signo( $\frac{-x^2 + 6x - 8}{x^2 - 4}$ )	-	No existe	+	0	-

Solución  $x \in (-2, 4]$

b)  $\frac{2x^2 + 6x + 10}{x^2 - x} \leq 0 \rightarrow \frac{2x^2 + 6x + 10}{x(x-1)} \leq 0 \rightarrow$  raíces 0 y 1.

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
Signo(x)	-	0	+	+	+
Signo(x-1)	-	-	-	0	+
Signo( $2x^2+6x+10$ )	+	+	+	+	+
Signo( $\frac{2x^2 + 6x + 10}{x^2 - x}$ )	+	No existe	-	No existe	+

Solución  $x \in (0, 1)$

## 5. Sistemas lineales de inecuaciones

### 5.1. Una incógnita

Los sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita son sistemas de la forma:

$$\left. \begin{array}{l} (1) ax + b \leq 0 \\ (2) a'x + b' > 0 \end{array} \right\} \text{ o con cualquier signo otro símbolo de desigualdad}$$

La forma de resolver el sistema es el siguiente:

1. Obtenemos las soluciones de (1) y de (2),  $S_1$  y  $S_2$  respectivamente
2. Las soluciones del sistema tienen que ser de (1) y (2) luego es la intersección de sus soluciones  $S = S_1 \cap S_2$

**Ejemplo:**  $\left. \begin{array}{l} (1) x + 3 > 0 \\ (2) 3x - 6 \geq 0 \end{array} \right\}$

$S_1 \rightarrow x > -3 \quad S_1 = (-3, \infty)$

$S_2 \rightarrow 3x \geq 6; x \geq 2 \quad S_2 = [2, \infty)$

Solución  $S = S_1 \cap S_2 = [2, \infty)$



**Ejercicio 14:**

1. 
$$\left. \begin{array}{l} (1) 5 - 3x \geq 4x + 13 \\ (2) 2x + 7 < 5x + 11 \end{array} \right\}$$

$S_1 \rightarrow -8 \geq 7x ; x \leq (-8/7) \quad S_1 = (-\infty, -8/7]$

$S_2 \rightarrow -3x < 4 ; x > -4/3 \quad S_2 = (-4/3, \infty)$

$S = S_1 \cap S_2 = (-4/3, -8/7]$

2. 
$$\left. \begin{array}{l} (1) 5(x - 3) \leq -2 + x \\ (2) 3x > 2x + 1 \\ (3) x < 3 \end{array} \right\}$$

$S_1 \rightarrow 4x \leq 13 ; S_1 = (-\infty, 13/4]$

$S_2 \rightarrow x > 1 ; S_2 = (1, \infty)$

$S_3 \rightarrow x < 3 ; S_3 = (-\infty, 3)$

$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = (1, 3)$

**5.2. Dos incógnitas**

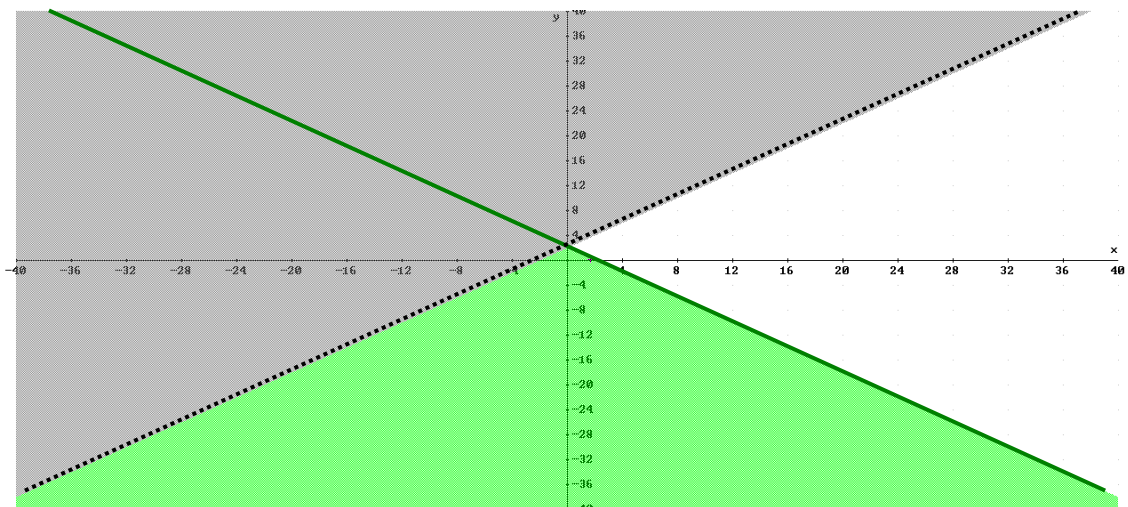
Son sistemas formados por dos o más inecuaciones con dos incógnitas (como los vistos en el apartado 4.2).

$$\left. \begin{array}{l} (1) ax + by \leq c \\ (2) a'x + b'y > c' \end{array} \right\} \text{ o con cualquier signo otro símbolo de desigualdad}$$

Resolución de los sistemas:

1. Se representan en el plano cartesiano las soluciones de (1) y (2)
2. Las soluciones del sistema son la intersección de las soluciones a las dos inecuaciones

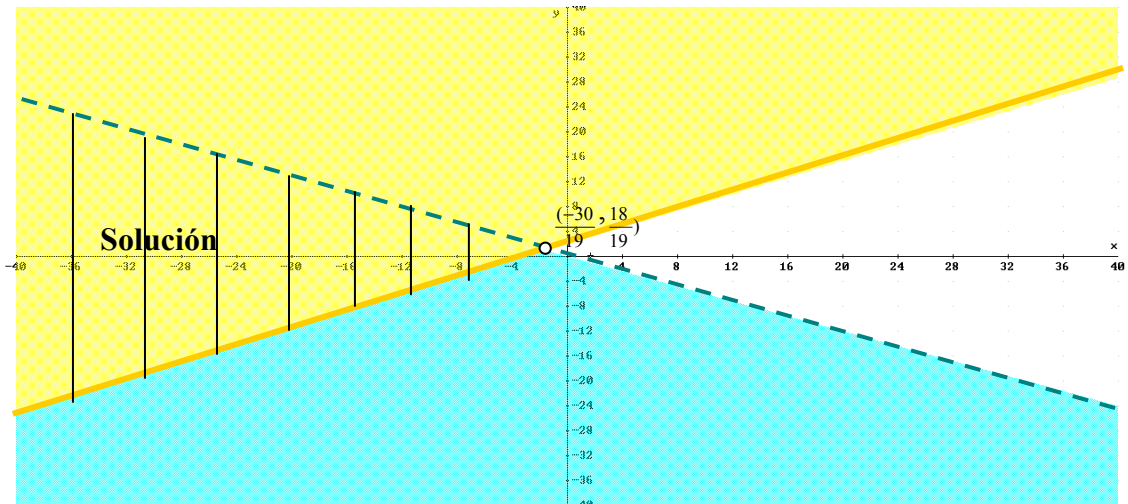
**Ejemplo:** 
$$\left. \begin{array}{l} (1) x + y \leq 2 \\ (2) -2x + 2y > 4 \end{array} \right\}$$



Punto de corte, es la solución al sistema  $\left. \begin{array}{l} (1) \quad x + y = 2 \\ (2) \quad -2x + 2y = 4 \end{array} \right\}$ . Resolviéndolo obtenemos  $x=0, y=2$

**Ejercicio 15. Resolver**

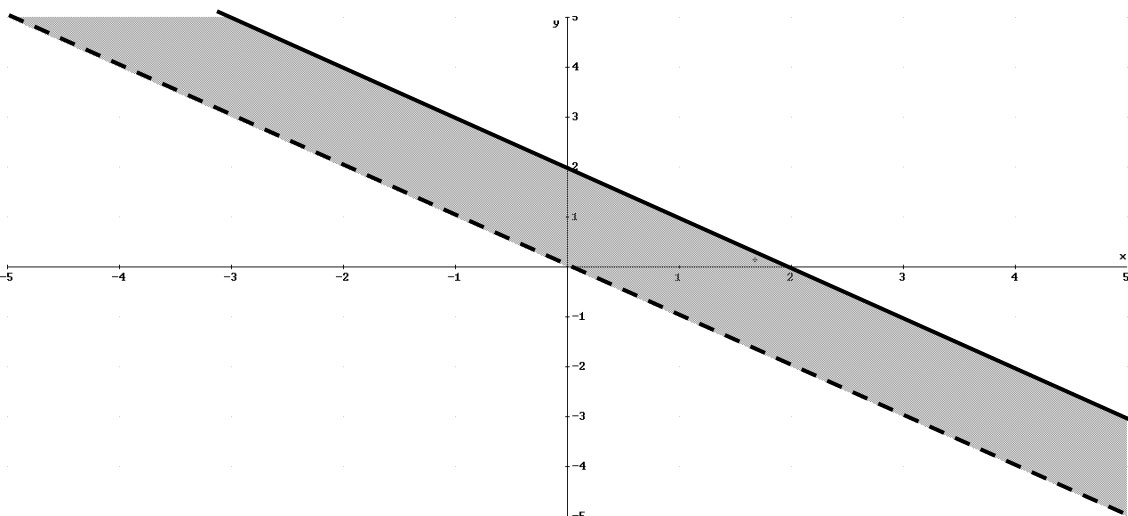
1)  $\left. \begin{array}{l} (1) \quad 3x + 5y < 0 \\ (2) \quad -2x + 3y \geq 6 \end{array} \right\}$



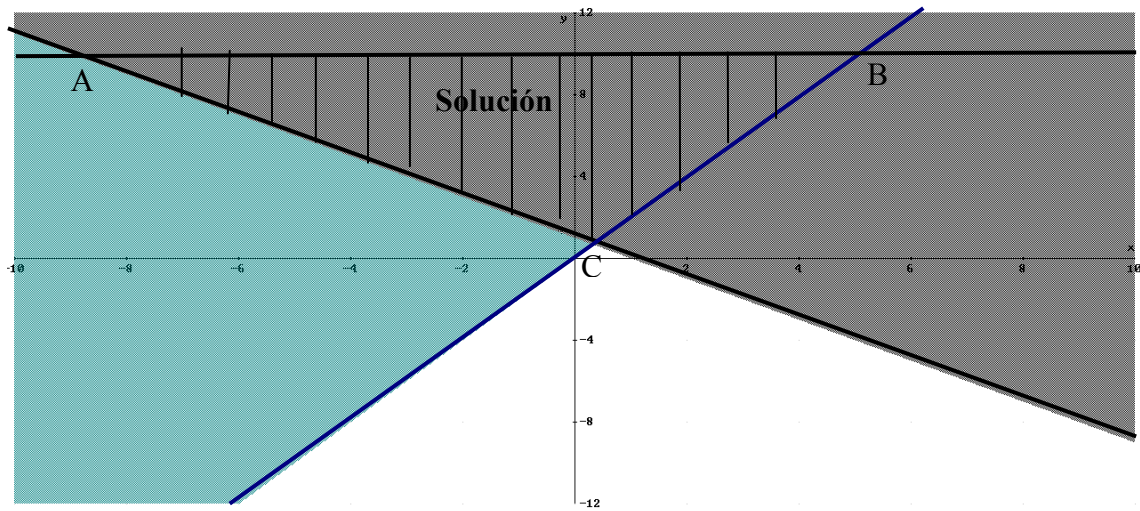
Puntos de corte es la solución del sistema  $\left. \begin{array}{l} (1) \quad 3x + 5y = 0 \\ (2) \quad -2x + 3y = 6 \end{array} \right\}$ . Resolviéndolo obtenemos  $x = \frac{-30}{19}, y = \frac{18}{19}$

2)  $\left. \begin{array}{l} (1) \quad x + y > 0 \\ (2) \quad -3x - 3y \geq -6 \end{array} \right\}$

Son rectas paralelas y la solución es el espacio comprendido entre ambas rectas. Veamos el dibujo



$$\left. \begin{array}{l} (1) 2x - y \leq 0 \\ 3) (2) x + y \geq 1 \\ (3) y \leq 10 \end{array} \right\}$$



Calculemos A, B y C.

Cálculo de A: punto de corte de  $\left. \begin{array}{l} y = 10 \\ x + y = 1 \end{array} \right\} \rightarrow (-9, 10)$

Cálculo de B: punto de corte de  $\left. \begin{array}{l} y = 10 \\ 2x - y = 0 \end{array} \right\} \rightarrow (5, 10)$

Cálculo de C: punto de corte de  $\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ 2x - y = 0 \end{array} \right\} \rightarrow (1/3, 2/3)$

## Problemas finales.

**Ejercicio 16.** En una tienda venden un equipo de música y un ordenador. Mi hermana compro ambos el mes pasado y pago 2500 € por los dos. Ahora la tienda rebaja un 10% el equipo de música y un 15% el ordenador, siendo el precio total de ambos de 2157.5 €. ¿Cuál era el precio del equipo de música y del ordenador antes de las rebajas?

$x$  = precio equipo de música

$y$  = precio del ordenador

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 2500 \\ 0.9x + 0.85y = 2157,5 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Resolviendo el sistema } x=650\text{€}, y=1850\text{€}$$

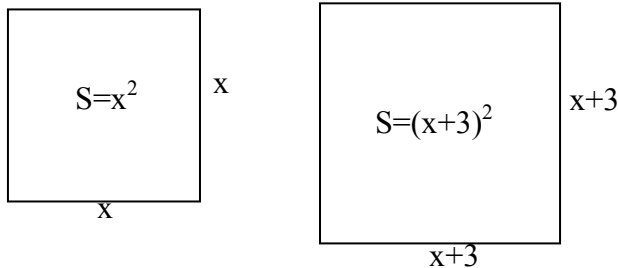
**Ejercicio 17.** En un examen tipo test hay 20 preguntas. Por cada pregunta acertada puntuamos 2 puntos y por cada pregunta fallada puntuamos -0.5 puntos; el aprobado esta en 20 puntos. Si respondemos a todas las preguntas ¿Cuántas preguntas hay que acertar para aprobar?

$x$  = preguntas acertadas

$(20-x)$  = preguntas erróneas

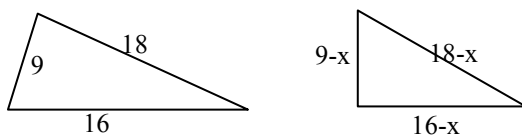
$$\left. \begin{array}{l} 2x - 0,5 \cdot (20 - x) \geq 20 \\ x \leq 20 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 12 \\ x \leq 20 \end{array} \right\} \rightarrow x \in \{12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

**Ejercicio 18.** Sea un cuadrado que cumple que al aumentar en 3m el lado su área aumenta en 75m<sup>2</sup>. Calcular el lado del cuadrado original.



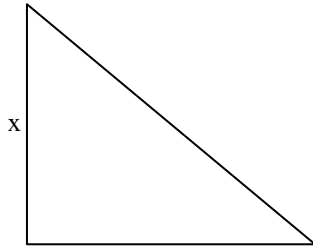
$$x^2 + 75 = (x+3)^2 \rightarrow x^2 + 75 = x^2 + 6x + 9 \rightarrow 6x = 66 \rightarrow x = 11\text{m}$$

**Ejercicio 19.** Puede un triángulo de lados de 9cm, 16cm y 18cm. Comprueba que no es rectángulo. Puede convertirse en un triángulo rectángulo al quitarle la misma cantidad a sus tres lados. ¿Cuánto valen sus nuevos lados?



$$\begin{aligned} &\text{Teorema de Pitágoras para el triángulo rectángulos} \rightarrow (18-x)^2 = (16-x)^2 + (9-x)^2 \rightarrow \\ &x^2 - 14x + 13 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} 13 & \text{no solución } 9 - 13 < 0 \\ 1 & \text{lados} = 8\text{cm}, 17\text{cm}, 15\text{cm} \end{cases} \end{aligned}$$

**Ejercicio 20. Calcular las dimensiones de un triángulo rectángulo isósceles de perímetro 24 cm.**



$$\text{hip} = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2}x$$

$$\text{perímetro} = 2x + \sqrt{2}x = 24 \text{ cm}$$

→

$$x = \frac{24}{2 + \sqrt{2}} = \frac{24(2 - \sqrt{2})}{2} = (24 - 12\sqrt{2}) \text{ cm}$$

**Ejercicio 21. Calcular el tiempo que se tarda en llenar un cubo por dos grifos si se sabe que el segundo tarda el doble en llenarlo que el primero, y que cuando están los dos llenándolo tarda 3 minutos.**

$t$  = tiempo llenar un cubo 1<sup>er</sup> grifo.

$2t$  = tiempo llenar un cubo 2<sup>o</sup> grifo.

Capacidad cubo =  $c$

Velocidad 1<sup>er</sup> grifo =  $c/t$

Velocidad 2<sup>o</sup> grifo =  $c/2t$

Velocidad dos grifos =  $c/t + c/2t = 3c/2t$

Capacidad del cubo  $c = v_{\text{dos grifos}} \cdot 3 \text{ min} \rightarrow c = \frac{3c}{2t} \cdot 3 \rightarrow 1 = \frac{9}{2t} \rightarrow t = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ min}$

Tiempo llenar un cubo 1<sup>er</sup> grifo → 4,5 min

Tiempo llenar un cubo 2<sup>o</sup> grifo → 9 min

**Ejercicio 22. Calcular la velocidad media de un coche que en la ida de un viaje entre las ciudades A y B va a una velocidad media de 60 km/h y a la vuelta de 40 km/h.**

Coche de A → B  $v = 60 \text{ km/h} \rightarrow t_{A \rightarrow B} = d/v = d/60$

Coche de B → A  $v = 40 \text{ km/h} \rightarrow t_{B \rightarrow A} = d/v = d/40$

$$t_{\text{total}} = (d/60 + d/40) \rightarrow v_{\text{media}} = \frac{2d}{\frac{d}{60} + \frac{d}{40}} = \frac{2}{\frac{100}{240}} = 48 \text{ km/h}$$