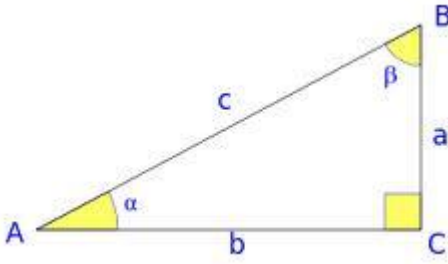


## TEMA 8: TRIGONOMETRÍA

### RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO

Dado el siguiente triángulo rectángulo:



$$\text{seno de } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\text{coseno de } \alpha = \frac{\text{cateto próximo}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\text{tan gente de } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto próximo}}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{a}{b}$$

Estas relaciones se llaman **razones trigonométricas** del ángulo  $\alpha$ .

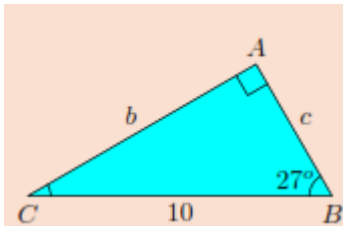
Los valores de seno y coseno siempre estarán entre -1 y 1 y en cambio la tangente puede tomar cualquier valor

Ejercicios:

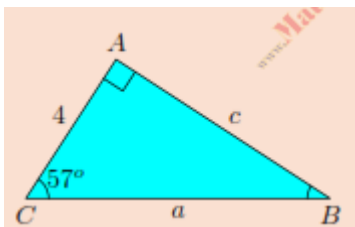
1. Escribe las razones trigonométricas del ángulo  $\beta$

2. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos.

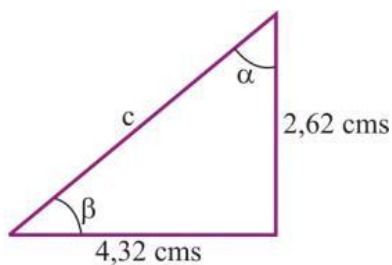
a)



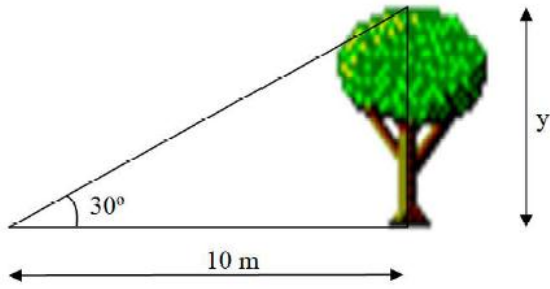
b)



c)



3. Calcula la altura de un árbol que a una distancia de 10 m se ve bajo un ángulo de  $30^\circ$ .



### RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

Los valores de las tres razones trigonométricas estudiadas ( $\text{sen}$ ,  $\text{cos}$  y  $\text{tan}$ ) no son independientes, sino que están relacionadas de tal manera que conociendo el valor de una de ellas, se puede calcular el valor de las otras dos. Las relaciones que las ligan son las llamadas **relaciones trigonométricas fundamentales**, y son:

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

$$\frac{\text{sen} \alpha}{\text{cos} \alpha} = \text{tg} \alpha$$

#### Ejercicios

4. Sabiendo que  $\text{cos} \alpha = 0,63$ , calcular  $\text{sen} \alpha$  y  $\text{tg} \alpha$

5. Sabiendo que  $\text{sen} \alpha = \frac{3}{2}$  calcula  $\text{cos} \alpha$  y  $\text{tg} \alpha$

6. Sabiendo que  $\text{tg} \alpha = \frac{1}{2}$  calcula  $\text{sen} \alpha$  y  $\text{cos} \alpha$

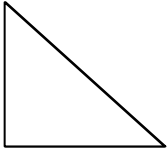
7. Simplifica la siguiente expresión:

$$\frac{\operatorname{sen}^3 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} =$$

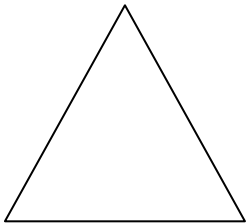
### RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE $30^\circ$ , $45^\circ$ Y $60^\circ$

Dado que estos ángulos son muy comunes en trigonometría vamos a calcular sus razones trigonométricas.

Razones trigonométricas de  $45^\circ$



Razones trigonométricas de  $30^\circ$  y de  $60^\circ$



### RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Ejercicios

1. Un dirigible que está volando a 800 m de altura, distingue un pueblo con un ángulo de depresión de  $12^\circ$ . ¿A qué distancia del pueblo se halla?
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
2. Hallar el radio de una circunferencia sabiendo que una cuerda de 24.6 m tiene como arco correspondiente uno de  $70^\circ$

3. Rosa está haciendo volar su cometa. Ha soltado 36 m de hilo y mide el ángulo que forma la cuerda con la horizontal:  $62^\circ$ . Calcula la altura a la que se encuentra la cometa sabiendo que la mano que sostiene la cuerda está a 83 cm del suelo.

4. ¿Cuánto mide la apotema de un pentágono regular de lado 10 cm?

5. Desde un satélite artificial se ve la tierra bajo un ángulo de  $140^\circ$ . Calcular:

- a) La distancia a la que se encuentra la tierra.
- b) La superficie terrestre visible desde el satélite.

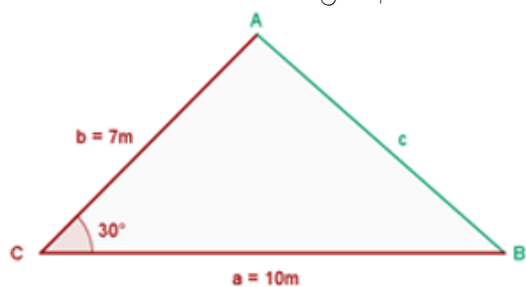
Radio de la tierra = 6366 km.

6. ¿A qué altura sobre la superficie de la tierra hemos de subir para ver un lugar situado a 10 000 km de distancia.

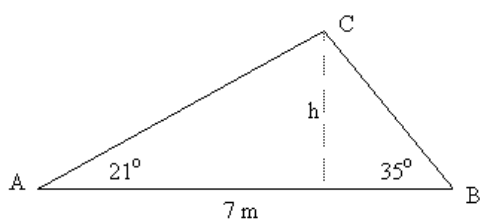
### RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

veamos los dos casos de resolución de este tipo de triángulos.

**Caso 1:** Calcular el área y el perímetro de este triángulo



**Caso 2:** Calcular el área y el perímetro de este triángulo



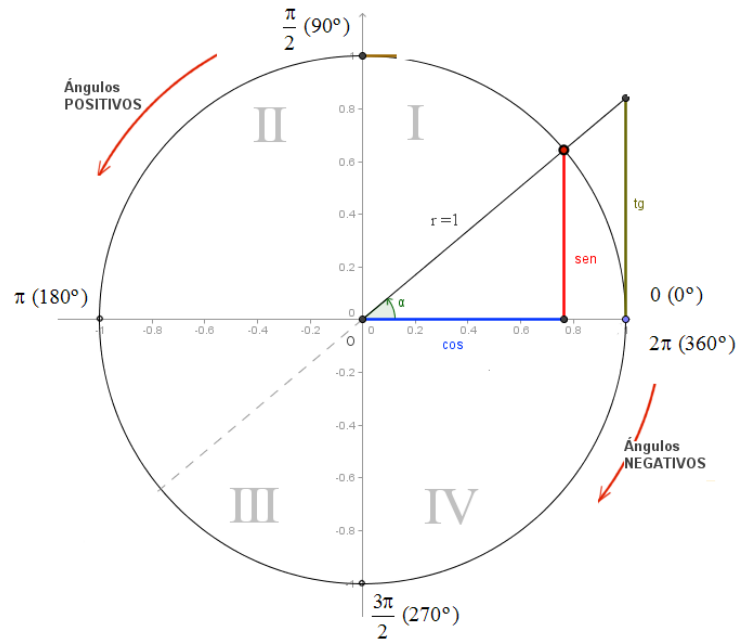
Ejercicios:

7. Dos observadores situados a 70 metros de distancia ven un globo situado entre ellos y en el mismo plano vertical bajo ángulos de elevación de  $25^\circ$  y  $70^\circ$ . Halla la altura del globo y las distancias que los separan de cada uno de los dos observadores.

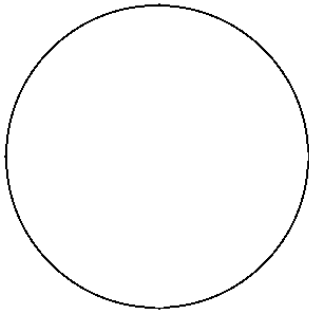
8. Calcula la altura de un árbol, sabiendo que desde un punto del terreno se observa su copa bajo un ángulo de  $30^\circ$  y si nos acercamos 10 m, bajo un ángulo de  $60^\circ$ .

## LA CIRCUNFERENCIA GONIOMÉTRICA

La circunferencia goniométrica es una circunferencia de radio 1. Dicha circunferencia se utiliza con el fin de poder estudiar fácilmente las razones trigonométricas, mediante la representación de triángulos rectángulos auxiliares.

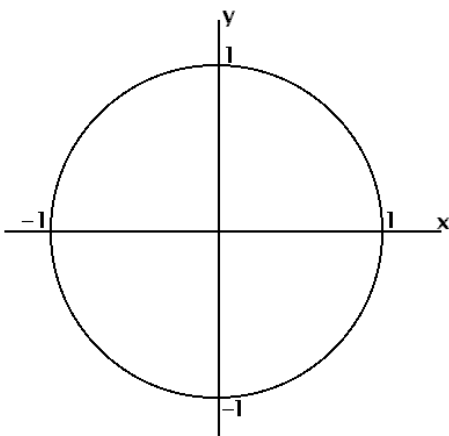


Un **radian** es un ángulo cuyo arco mide lo mismo que su radio



Vamos a ver las relaciones que existen entre las razones trigonométricas de un ángulo del primer cuadrante con otros ángulos de otros cuadrantes.

$\alpha$  y  $90-\alpha$

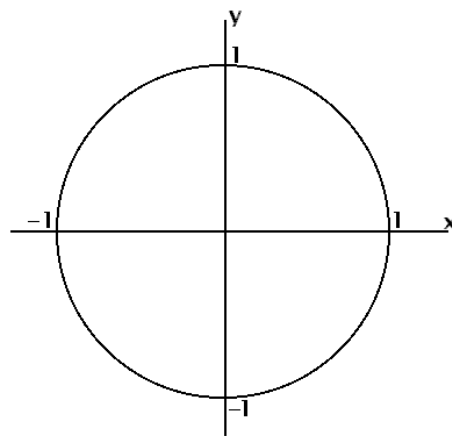


$$\text{sen}(90-\alpha) =$$

$$\text{cos}(90-\alpha) =$$

$$\text{tg}(90-\alpha) =$$

$\alpha$  y  $90+\alpha$

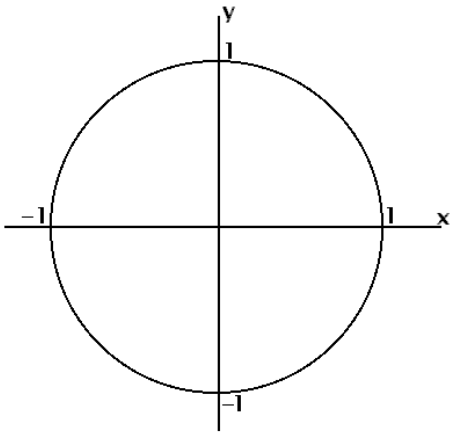


$$\text{sen}(90+\alpha) =$$

$$\text{cos}(90+\alpha) =$$

$$\text{tg}(90+\alpha) =$$

$\alpha$  y  $180-\alpha$

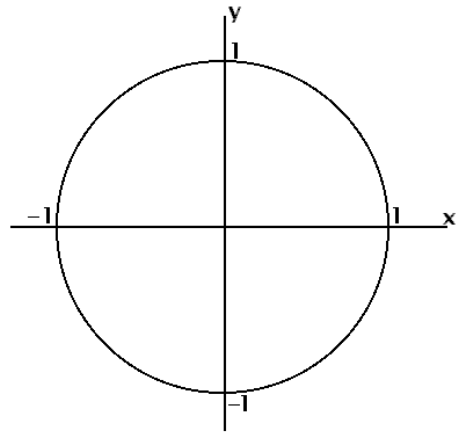


$$\text{sen } (180-\alpha) =$$

$$\text{cos } (180-\alpha) =$$

$$\text{tg } (180-\alpha) =$$

$\alpha$  y  $180+\alpha$

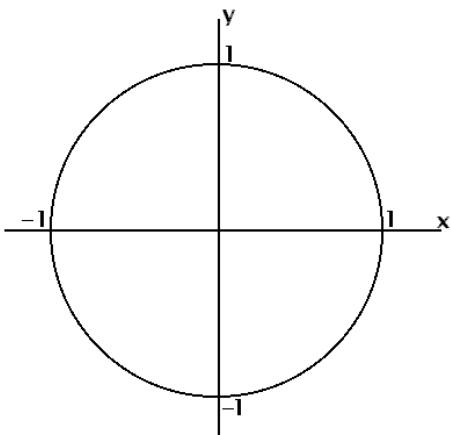


$$\text{sen } (180+\alpha) =$$

$$\text{cos } (180+\alpha) =$$

$$\text{tg } (180+\alpha) =$$

$\alpha$  y  $270-\alpha$

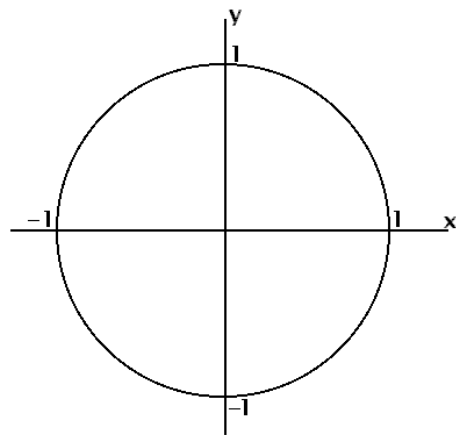


$$\text{sen } (270-\alpha) =$$

$$\text{cos } (270-\alpha) =$$

$$\text{tg } (270-\alpha) =$$

$\alpha$  y  $270+\alpha$



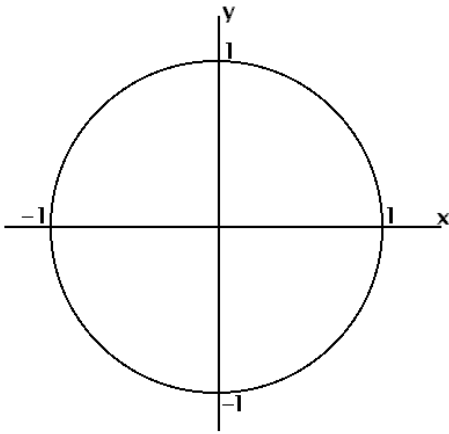
$$\text{sen } (270+\alpha) =$$

$$\text{cos } (270+\alpha) =$$

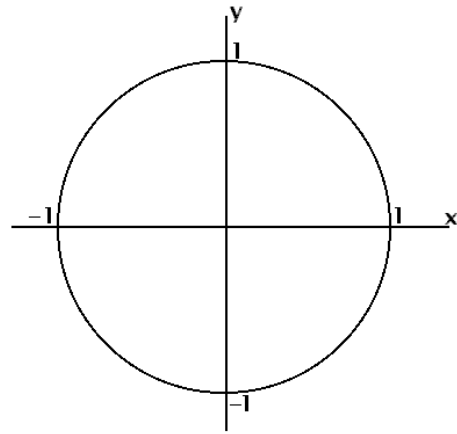
$$\text{tg } (270+\alpha) =$$



$\alpha$  y  $360-\alpha$



$\alpha$  y  $360+\alpha$



$$\text{sen } (360-\alpha) =$$

$$\text{cos } (360-\alpha) =$$

$$\text{tg } (360-\alpha) =$$

$$\text{sen } (360+\alpha) =$$

$$\text{cos } (360+\alpha) =$$

$$\text{tg } (360+\alpha) =$$

Ejercicios.

9. Sin ayuda de la calculadora, indica los valores de las siguientes razones trigonométricas:

a)  $\text{sen } 150^\circ$    b)  $\text{cos } (-330^\circ)$    c)  $\text{tan } 315^\circ$    d)  $\text{cos } 135^\circ$

10. Sin ayuda de la calculadora, indica los valores de las siguientes razones trigonométricas:

a)  $\text{sen } 1305^\circ$

b)  $\text{cos } 1920^\circ$

### ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Una ecuación trigonométrica es aquella ecuación en la que aparecen una o más funciones trigonométricas.

En las ecuaciones trigonométricas la incógnita es el ángulo común de las funciones trigonométricas.

Veamos unos ejemplos:

a)  $\text{sen } x = 1/2$

b)  $\text{cos } x = 0,4$

c)  $\text{tg } x = 3$

d)  $\text{sen } (2x-3) = 0,8$

e)  $3\text{cos } x = 2$

f)  $\text{sen}^2 x + \text{sen } x = 0$

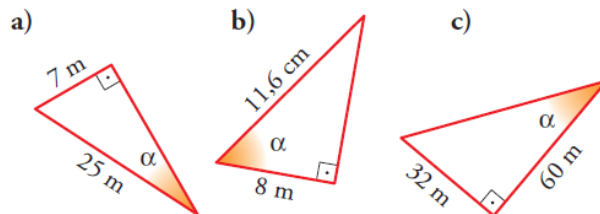
$$g) 3\text{sen}^2 x - 5 \text{sen} x + 2 = 0$$

$$h) \cos^2 x - 3 \text{sen}^2 x = 0$$

$$i) 2 \cos x = 3 \text{tg} x$$

### EJERCICIOS

1. Halla los ángulos  $\alpha$  de cada uno de los siguientes triángulos rectángulos.



Sol: a)  $\alpha = 27,82$  b)  $\alpha = 46,38$  c)  $\alpha = 28,03$

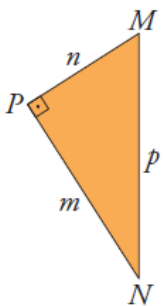
2. Observa el triángulo rectángulo  $MPN$ , y en las siguientes igualdades, sustituye los puntos suspensivos por *sen*, *cos* o *tg*.

$$a) \dots \hat{M} = \frac{m}{p}$$

$$b) \dots \hat{N} = \frac{m}{p}$$

$$c) \dots \hat{M} = \frac{m}{n}$$

$$d) \dots \hat{N} = \frac{n}{p}$$



3. ¿Existe algún ángulo  $a$  tal que  $\text{sen} a = 3/5$  y  $\text{tg} a = 1/4$ ? Razla respuesta.

4. Halla las razones trigonométricas de los ángulos agudos de los siguientes triángulos rectángulos ( $A \hat{=} 90^\circ$ ):

a)  $b = 56 \text{ cm}$ ;  $a = 62,3$     b)  $b = 33,6 \text{ cm}$ ;  $c = 4,5 \text{ cm}$     c)  $c = 16 \text{ cm}$ ;  $a = 36 \text{ cm}$

Sol: a)  $B = 61,16$   $C = 28,84$     b)  $B = 82,31$   $C = 7,69$     c)  $B = 63,64$   $C = 26,36$ .

5. Halla la medida de los lados y ángulos desconocidos en los siguientes triángulos rectángulos ( $A^\wedge = 90^\circ$ ):

- a)  $b = 7 \text{ cm}$   $c = 18 \text{ cm}$     b)  $a = 25 \text{ cm}$   $b = 7 \text{ cm}$     c)  $b = 18 \text{ cm}$   $B^\wedge = 40^\circ$     d)  $c = 12,7 \text{ cm}$   $B^\wedge = 65^\circ$   
 e)  $a = 35 \text{ cm}$   $C^\wedge = 36^\circ$

Sol: a)  $a \approx 19,31 \text{ cm}$ ;  $B \approx 21^\circ 15' 2''$ ;  $c = 68^\circ 44' 58''$     b)  $c = 24 \text{ cm}$ ;  $B \approx 16^\circ 15' 37''$ ;  $C = 73^\circ 44' 23''$   
 c)  $C = 50^\circ$ ;  $a \approx 28 \text{ cm}$ ;  $c \approx 21,45 \text{ cm}$     d)  $C = 25^\circ$ ;  $b \approx 27,23 \text{ cm}$ ;  $a \approx 30,05 \text{ cm}$   
 e)  $B = 54^\circ$ ;  $c \approx 20,57 \text{ cm}$ ;  $b \approx 28,32 \text{ cm}$ .

6. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos ( $C = 90^\circ$ ) hallando la medida de todos los elementos desconocidos:

- a)  $a = 5 \text{ cm}$ ,  $b = 12 \text{ cm}$ . Halla  $c$ ,  $A$ ,  $B$ .    b)  $a = 43 \text{ m}$ ,  $A = 37^\circ$ . Halla  $b$ ,  $c$ ,  $B$ .  
 c)  $a = 7 \text{ m}$ ,  $B = 58^\circ$ . Halla  $b$ ,  $c$ ,  $A$ .    d)  $c = 5,8 \text{ km}$ ,  $A = 71^\circ$ . Halla  $a$ ,  $b$ ,  $B$ .  
 e)  $c = 5 \text{ cm}$ ,  $B = 43^\circ$ . Halla  $a$ ,  $b$ ,  $A$ .

Sol: a)  $c = 13 \text{ cm}$ ;  $A = 22^\circ 37' 11,5''$  y  $B = 67^\circ 22' 48,5''$   
 b)  $B = 53^\circ$ ;  $c = 71,45 \text{ m}$  y  $b = 57,06 \text{ m}$   
 c)  $A = 32^\circ$ ;  $c = 13,2 \text{ m}$  y  $b = 11,2 \text{ m}$   
 d)  $B = 19^\circ$ ;  $a = 5,48 \text{ km}$  y  $1,89 \text{ km}$   
 e)  $A = 47^\circ$ ;  $a = 3,66 \text{ cm}$  y  $b = 3,41 \text{ cm}$ .

7. Cuando los rayos del sol forman  $40^\circ$  con el suelo, la sombra de un árbol mide  $18 \text{ m}$ . ¿Cuál es su altura?

Sol:  $15,1 \text{ m}$  mide el árbol.

8. Una escalera de  $3 \text{ m}$  está apoyada en una pared. ¿Qué ángulo forma la escalera con el suelo si su base está a  $1,2 \text{ m}$  de la pared? Sol:  $a = 66^\circ 25' 19''$

9. Al recorrer  $3 \text{ km}$  por una carretera, hemos ascendido  $280 \text{ m}$ . ¿Qué ángulo forma la carretera con la horizontal?

Sol:  $5^\circ 21' 19,44''$ .

10. Si queremos que una cinta transportadora de  $25 \text{ metros}$  eleve la carga hasta una altura de  $15 \text{ metros}$ , ¿qué ángulo se deberá inclinar la cinta? Sol:  $36^\circ 52' 11,6''$

11. Una persona de  $1,78 \text{ m}$  de estatura proyecta una sombra de  $66 \text{ cm}$ , y en ese momento un árbol da una sombra de  $2,3 \text{ m}$ .

a) ¿Qué ángulo forman los rayos del Sol con la horizontal?    b) ¿Cuál es la altura del árbol?

Sol: a)  $69^\circ 39' 21,2''$  b)  $6,203 \text{ m}$ .

Calcula los lados iguales y el área de un triángulo isósceles cuyo lado desigual mide  $24 \text{ cm}$  y el ángulo opuesto a la base mide  $40^\circ$ . Sol: lados iguales  $\approx 35,1 \text{ cm}$  y área  $396 \text{ cm}^2$ .

12. El lado de un rombo mide  $8 \text{ cm}$  y el ángulo menor es de  $38^\circ$ . ¿Cuánto miden las diagonales del rombo?

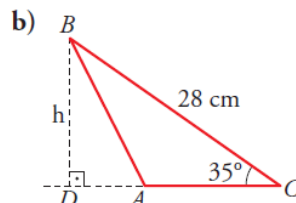
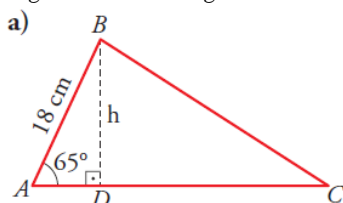
Sol:  $5,2 \text{ cm}$  y  $15,2 \text{ cm}$ .

13. De un triángulo isósceles conocemos su lado desigual,  $18 \text{ m}$ , y su altura,  $10 \text{ m}$ . ¿Cuánto miden sus ángulos?

Sol:  $a = 48^\circ 46''$  y  $\beta = 83^\circ 58' 28''$

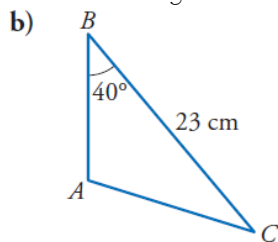
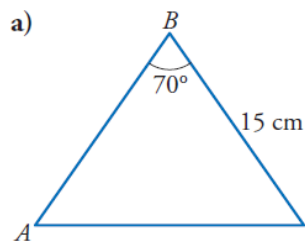
14. Para determinar la altura de un poste nos hemos alejado  $7 \text{ m}$  de su base y hemos medido el ángulo que forma la visual al punto más alto con la horizontal, obteniendo un valor de  $40^\circ$ . ¿Cuánto mide el poste? Sol:  $5,87 \text{ m}$ .

15. Calcula la altura,  $h$ , de los siguientes triángulos:



Sol: a)  $h \approx 16,3 \text{ cm}$  b)  $h \approx 16,1 \text{ cm}$ .

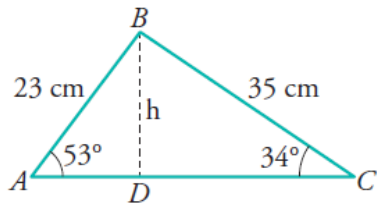
16. Calcula la altura sobre el lado  $AB$  en los siguientes triángulos:



Sol: a)  $h \approx 14,1 \text{ cm}$  b)  $h \approx 14,8 \text{ cm}$ .

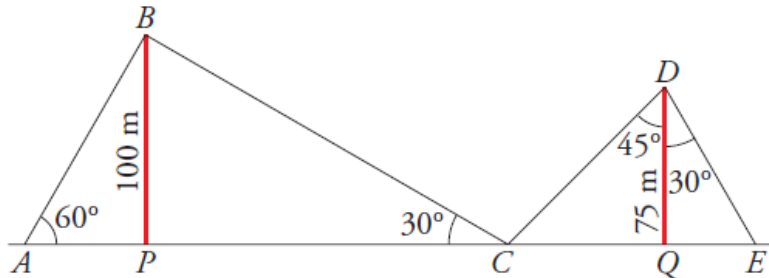
17. Halla:

- a) La longitud  $AC$ . b) El área del triángulo  $ABC$ .



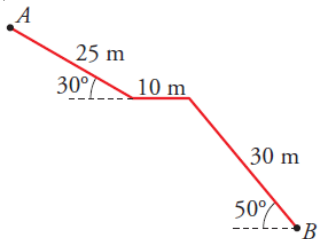
Sol: a) 42,84 cm b)  $A_{ABC} \approx 393,49 \text{ cm}^2$

18. Dos antenas de radio están sujetas al suelo por cables tal como indica la figura. Calcula la longitud de cada uno de los tramos de cable y la distancia  $AE$ .



Sol:  $AP \approx 57,74 \text{ m}$ ;  $PC = 75 \text{ m}$ ;  $CQ = 75 \text{ m}$ ;  $QE \approx 43,3 \text{ m}$  y  $AE = 349,25 \text{ m}$

19. Una escalera para acceder a un túnel tiene la forma y las dimensiones de la figura. Calcula la profundidad del punto B.



Sol: 35,48 m.

20. Una señal de peligro en una carretera nos advierte que la pendiente es del 12%. ¿Qué ángulo forma ese tramo de carretera con la horizontal? ¿Cuántos metros hemos descendido después de recorrer 7 km por esa carretera?

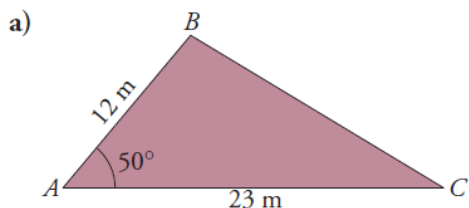
Sol:  $\alpha = 6^\circ 53' 32''$  y 840 m.

21. En una ruta de montaña, una señal indica una altitud de 785 m. Tres kilómetros más adelante, la altitud es de 1265 m. Halla la pendiente media de esa ruta y el ángulo que forma con la horizontal.

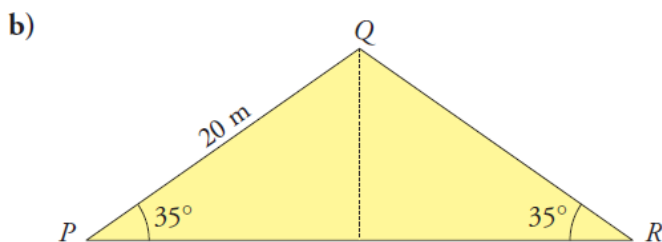
Sol:  $\text{tg } \alpha = 0,162816,2\%$ .

22. Los brazos de un compás, que miden 12 cm, forman un ángulo de  $50^\circ$ . ¿Cuál es el radio de la circunferencia que puede trazarse con esa abertura? Sol: Radio de la circunferencia  $\approx 10,14 \text{ cm}$ .

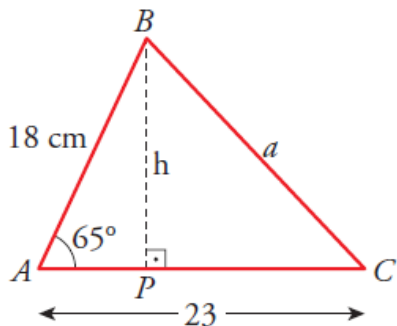
23. Calcula el área de cada uno de estos triángulos:



Sol: a)  $105,685 \text{ m}^2$  b)  $\approx 188 \text{ m}^2$

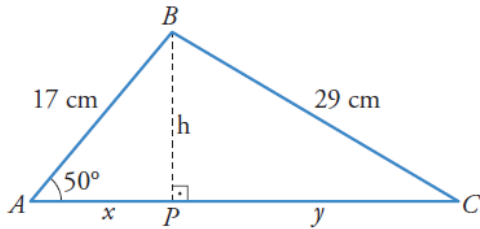


24. En el triángulo  $ABC$  calcula  $h$  y  $a$ .



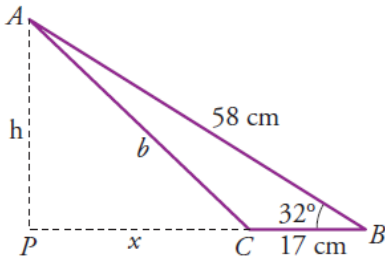
Sol:  $h \approx 16,31 \text{ cm}$  y  $a \approx 22,42 \text{ cm}$ .

25. En el triángulo  $ABC$  halla  $x$ ,  $h$  e  $y$ .



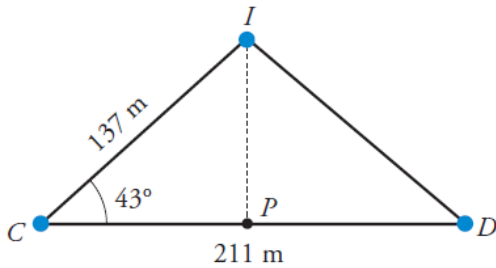
Sol:  $x \approx 10,93$  cm;  $h \approx 13,02$  cm;  $y \approx 25,91$  cm.

26. Calcula  $h$ ,  $x$  y  $b$ .



Sol:  $h \approx 30,74$  cm;  $x \approx 32,19$  cm;  $b \approx 44,51$  cm.

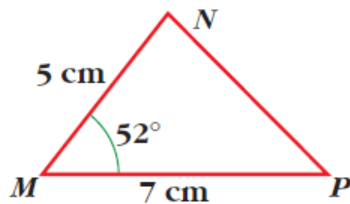
27. Conocemos la distancia de nuestra casa a la iglesia, 137 m; la distancia de nuestra casa al depósito de agua, 211 m, y el ángulo,  $43^\circ$ , bajo el cual se ve desde nuestra casa el segmento cuyos extremos son la iglesia y el depósito. ¿Cuál es la distancia que hay de la iglesia al depósito de agua?



Sol: Distancia  $\approx 144,93$  m.

28. Considera este triángulo:

- Calcula la proyección de  $MN$  sobre  $MP$ .
- Halla la altura correspondiente a la base  $MP$ .
- Calcula el área del triángulo.

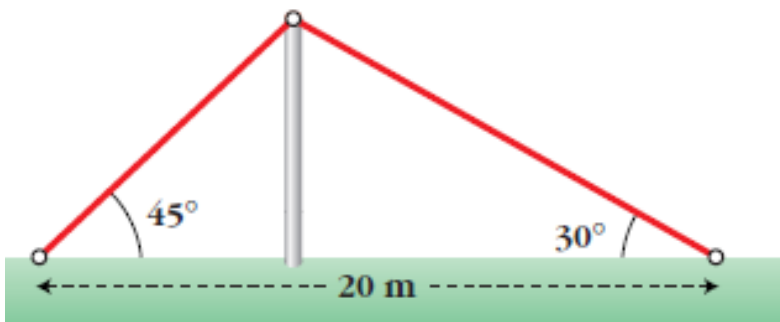


Sol: a) 3,08 cm b) 3,94 cm c) 13,79  $\text{cm}^2$

29. Desde la torre de control de un aeropuerto se establece comunicación con un avión que va a aterrizar. En ese momento, el avión se encuentra a una altura de 1 200 metros y el ángulo de observación desde la torre (ángulo que forma la visual hacia el avión con la horizontal) es de  $30^\circ$ . ¿A qué distancia está el avión del pie de la torre si esta mide 40 m de altura?

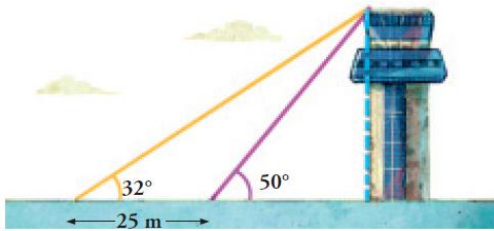
Sol: La distancia del avión al pie de la torre es de 2 340,3 m.

30. Hemos colocado un cable sobre un mástil que lo sujeta como muestra la figura. ¿Cuánto miden el mástil y el cable?



Sol: 7,32 m (mástil) y 24,99 m (cable).

31. Desde el lugar donde me encuentro, la visual de la torre forma un ángulo de  $32^\circ$  con la horizontal.



Sol: 32,84 m.

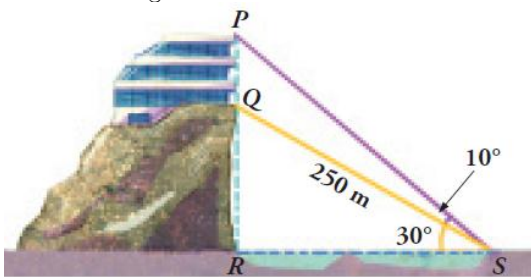
32. Calcula la altura de la luz de un faro sobre un acantilado cuya base es inaccesible, si desde un barco se toman las siguientes medidas:

- El ángulo que forma la visual hacia la luz con la línea de horizonte es de  $25^\circ$ .
- Nos alejamos 200 metros y el ángulo que forma ahora dicha visual es de  $10^\circ$ .

Sol: 56,7 m.

33. Una estatua de 2,5 m está colocada sobre un pedestal. Desde un punto del suelo se ve el pedestal bajo un ángulo de  $15^\circ$  y la estatua bajo un ángulo de  $40^\circ$ . Calcula la altura del pedestal. Sol: 0,58 m.

34. Para calcular la altura del edificio,  $PQ$ , hemos medido los ángulos que indica la figura. Sabemos que hay un funicular para ir de  $S$  a  $Q$ , cuya longitud es de 250 m. Halla  $PQ$ .

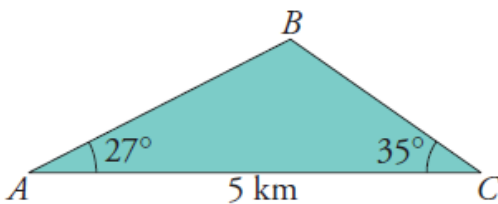


Sol: La altura del edificio es de 56,66 m.

35. Las tangentes a una circunferencia de centro  $O$ , trazadas desde un punto exterior,  $P$ , forman un ángulo de  $50^\circ$ . Halla la distancia  $PO$  sabiendo que el radio de la circunferencia es 12,4 cm. Sol:  $PO \approx 29,34$  cm.

36. Dos edificios distan entre sí 150 metros. Desde un punto del suelo que está entre los dos edificios, vemos que las visuales a los puntos más altos de estos forman con la horizontal ángulos de  $35^\circ$  y  $20^\circ$ . ¿Cuál es la altura de los edificios, si sabemos que los dos miden lo mismo? Sol: La altura de los dos edificios es de 35,92 m.

37. En dos comisarías de policía,  $A$  y  $C$ , se escucha la alarma de un banco  $B$ . Con los datos de la figura, calcula la distancia del banco a cada una de las comisarías.

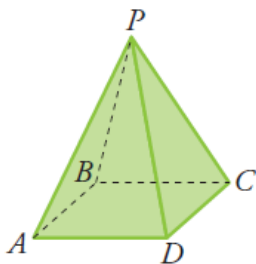


Sol: 3,24 km y 2,57 km.

38. Halla el área de un octógono regular de 12 cm de lado. Sol: 695,52 cm<sup>2</sup>

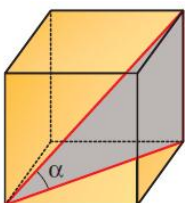
39. En un trapecio isósceles de bases  $AB$  y  $DC$ , conocemos los lados  $AB = 5$  m y  $BC = 3\sqrt{2}$  m, y los ángulos que forma la base mayor con los lados oblicuos, que son de  $45^\circ$ . Halla su área. Sol: 24 m<sup>2</sup>.

40. El lado de la base de una pirámide cuadrangular regular mide 6 m y el ángulo  $APD$   $\hat{=} 60^\circ$ . Halla su volumen.



Sol:  $36\sqrt{2}$  m<sup>3</sup>.

41. Halla el ángulo que forma la diagonal de un cubo de arista 6 cm con la diagonal de la base.



Sol:  $\alpha = 35^\circ 15' 52''$

42. Desde un faro  $F$  se observa un barco  $A$  bajo un ángulo de  $43^\circ$  con respecto a la línea de la costa; y un barco  $B$ , bajo un ángulo de  $21^\circ$ . El barco  $A$  está a 5 km de la costa, y el  $B$ , a 3 km. Calcula la distancia entre los barcos.

Sol: La distancia entre  $A$  y  $B$  es de 3,16 km.

43. Si  $\operatorname{sen} \alpha = 0,28$ , calcula  $\operatorname{cos} \alpha$  y  $\operatorname{tg} \alpha$  utilizando las relaciones fundamentales ( $\alpha < 90^\circ$ ).

Sol:  $\operatorname{cos} \alpha = 0,96$ ;  $\operatorname{tg} \alpha \approx 0,292$ .

44. Halla el valor exacto (con radicales) de  $\operatorname{sen} \alpha$  y  $\operatorname{tg} \alpha$  sabiendo que  $\operatorname{cos} \alpha = 2/3$  ( $\alpha < 90^\circ$ ).

Sol:  $\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{5}/2$   $\operatorname{tg} \alpha = 3\sqrt{5}/4$

45. Si  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ , calcula  $\operatorname{sen} \alpha$  y  $\operatorname{cos} \alpha$  ( $\alpha < 90^\circ$ ). Sol:  $\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{5}/5$ ;  $\operatorname{cos} \alpha = 2\sqrt{5}/5$

46. Calcula el valor exacto (utilizando radicales) de las razones trigonométricas que faltan en la tabla siguiente ( $\alpha < 90^\circ$ ):

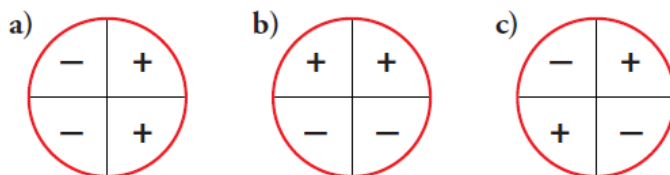
$\operatorname{sen} \alpha$	$2/3$		
$\operatorname{cos} \alpha$		$\sqrt{2}/3$	
$\operatorname{tg} \alpha$			2

Sol: a)  $2/3, \sqrt{5}/3, 2\sqrt{5}/5$  b)  $\sqrt{7}/3, \sqrt{2}/3, \sqrt{7}/\sqrt{2}$  c)  $2\sqrt{5}/5, \sqrt{5}/5, 2$ .

47. Sitúa en la circunferencia goniométrica los siguientes ángulos e indica el signo de sus razones trigonométricas.

a)  $128^\circ$  b)  $198^\circ$  c)  $87^\circ$  d)  $98^\circ$  e)  $285^\circ$  f)  $305^\circ$

48. En cada uno de estos círculos está indicado el signo de las razones trigonométricas de  $\alpha$ , según el cuadrante en el que esté  $\alpha$ . ¿Cuál corresponde a  $\operatorname{sen} \alpha$ . ¿Cuál a  $\operatorname{cos} \alpha$ ? ¿Y cuál a  $\operatorname{tg} \alpha$ ?



49. Indica, en cada caso, en qué cuadrante está el ángulo  $\alpha$ :

a)  $\operatorname{sen} \alpha > 0, \operatorname{cos} \alpha < 0$  b)  $\operatorname{tg} \alpha > 0, \operatorname{cos} \alpha > 0$  c)  $\operatorname{sen} \alpha < 0, \operatorname{cos} \alpha > 0$  d)  $\operatorname{sen} \alpha < 0, \operatorname{cos} \alpha < 0$

50. Dibuja de forma aproximada, sobre la circunferencia goniométrica, ángulos que cumplan las siguientes condiciones

a)  $\operatorname{sen} \alpha = -1/2, \operatorname{tg} \alpha > 0$  b)  $\operatorname{cos} \alpha = 3/4, \alpha > 90^\circ$  c)  $\operatorname{tg} \beta = -1, \operatorname{cos} \beta < 0$  d)  $\operatorname{tg} \alpha = 2, \operatorname{cos} \alpha < 0$

51. Sobre la circunferencia goniométrica busca la relación que existe entre las razones trigonométricas de:

a)  $90 - \alpha$  y  $\alpha$  b)  $90 + \alpha$  y  $\alpha$  c)  $180 - \alpha$  y  $\alpha$  d)  $180 + \alpha$  y  $\alpha$  e)  $270 - \alpha$  y  $\alpha$  f)  $270 + \alpha$  y  $\alpha$  g)  $360 - \alpha$  y  $\alpha$  ( $\alpha < 90^\circ$ )

52. Si  $\operatorname{sen} \alpha = 0,35$  y  $\alpha < 90^\circ$ , halla:

a)  $\operatorname{sen} (180 - \alpha)$  b)  $\operatorname{sen} (\alpha + 90^\circ)$  c)  $\operatorname{sen} (180 + \alpha)$  d)  $\operatorname{sen} (360 - \alpha)$  e)  $\operatorname{sen} (90 - \alpha)$  f)  $\operatorname{sen} (360 + \alpha)$

Sol: a) 0,35 b) 0,94 c) -0,35 d) -0,35 e) 0,94 f) 0,35.

53. Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos ayudándote de la circunferencia goniométrica.

a)  $150^\circ$  b)  $240^\circ$  c)  $300^\circ$  d)  $225^\circ$  e)  $100^\circ$  f)  $320^\circ$

54. Calcula las razones trigonométricas de  $55^\circ, 125^\circ, 145^\circ, 215^\circ, 235^\circ, 305^\circ$  y  $325^\circ$  a partir de las razones trigonométricas de  $35^\circ$ :

$\operatorname{sen} 35^\circ = 0,57$ ;  $\operatorname{cos} 35^\circ = 0,82$ ;  $\operatorname{tg} 35^\circ = 0,70$

55. Expresa con un ángulo del primer cuadrante:

a)  $\operatorname{sen} 1215^\circ$  b)  $\operatorname{cos} (-100^\circ)$  c)  $\operatorname{tg} (-50^\circ)$  d)  $\operatorname{cos} 930^\circ$  e)  $\operatorname{tg} 580^\circ$  f)  $\operatorname{sen} (-280^\circ)$

56. Expresa con un ángulo del primer cuadrante:

a)  $\operatorname{sen} 150^\circ$  b)  $\operatorname{cos} 135^\circ$  c)  $\operatorname{tg} 210^\circ$  d)  $\operatorname{cos} 225^\circ$  e)  $\operatorname{sen} 315^\circ$  f)  $\operatorname{tg} 120^\circ$  g)  $\operatorname{tg} 340^\circ$  h)  $\operatorname{cos} 200^\circ$  i)  $\operatorname{sen} 290^\circ$

57. Busca, en cada caso, un ángulo comprendido entre  $0^\circ$  y  $360^\circ$ , cuyas razones trigonométricas coincidan con el ángulo dado:

a)  $3720^\circ$  b)  $1935^\circ$  c)  $2040^\circ$  d)  $3150^\circ$  e)  $-200^\circ$  f)  $-820^\circ$

58. Sabiendo que  $\operatorname{tg} \alpha = -2$  y  $\alpha < 180^\circ$ , halla  $\operatorname{sen} \alpha$  y  $\operatorname{cos} \alpha$ . Sol:  $\operatorname{sen} \alpha = 2/\sqrt{5}$  y  $\operatorname{cos} \alpha = -1/\sqrt{5}$

59. ¿Existe algún ángulo agudo cuyo seno sea mayor que la tangente? Justifica la respuesta.

60. En un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide el doble que el otro. ¿Cuánto valen las razones trigonométricas

del ángulo menor? Sol:  $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$   $\operatorname{cos} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$   $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$



61. usando las relaciones fundamentales, demuestra que:

a)  $(\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{cos} \alpha)^2 + (\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{cos} \alpha)^2 = 2$

b)  $\frac{(\operatorname{sen} \alpha)^3 + \operatorname{sen} \alpha \cdot (\operatorname{cos} \alpha)^2}{\operatorname{sen} \alpha} = 1$     c)  $\frac{(\operatorname{sen} \alpha)^3 + \operatorname{sen} \alpha \cdot (\operatorname{cos} \alpha)^2}{\operatorname{cos} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

d)  $1 + (\operatorname{tg} \alpha)^2 = \frac{1}{(\operatorname{cos} \alpha)^2}$

62. Calcula los ángulos del primer cuadrante que cumplan:

a)  $\operatorname{sen} \alpha = 0,73$     b)  $\operatorname{cos} \alpha = 0,6$     c)  $\operatorname{tg} \alpha = 2$     d)  $\operatorname{sen} \alpha = 0,5$     e)  $\operatorname{cos} \alpha = 0,9$     f)  $\operatorname{tg} \alpha = 0,98$

Sol: a)  $46,89^\circ$  y  $133,11^\circ$     b)  $53,13^\circ$  y  $303,87^\circ$     c)  $63,43^\circ$  y  $243,43^\circ$     d)  $30^\circ$  y  $150^\circ$

e)  $25,84^\circ$  y  $334,84^\circ$     f)  $44,42^\circ$  y  $224,42^\circ$

63. Resuelve las siguientes ecuaciones sabiendo que  $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ :

a)  $(\operatorname{sen} x)^2 - \operatorname{sen} x = 0$     b)  $2(\operatorname{cos} x)^2 - \sqrt{3} \operatorname{cos} x = 0$

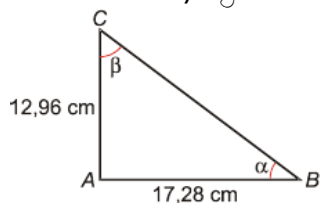
c)  $3 \operatorname{tg} x + 3 = 0$     d)  $4(\operatorname{sen} x)^2 - 1 = 0$     e)  $2(\operatorname{cos} x)^2 - \operatorname{cos} x - 1 = 0$

Sol: a)  $x = 0^\circ$      $x = 180^\circ$      $x = 90^\circ$     b)  $x = 90^\circ$      $x = 270^\circ$      $x = 30^\circ$      $x = 330^\circ$

c)  $x = 135^\circ$      $x = 315^\circ$     d)  $x = 30^\circ$      $x = 150^\circ$      $x = 210^\circ$      $x = 330^\circ$     e)  $x = 0^\circ$      $x = 120^\circ$      $x = 240^\circ$

### AUTOEVALUACIÓN

1. Calcula  $\alpha$ ,  $\beta$  y el valor del cateto que falta en el siguiente triángulo.



2. El ángulo que forma el suelo con la recta que une el extremo de la sombra de un árbol con la parte superior del árbol es de  $40^\circ$ . Calcula la longitud de la sombra sabiendo que el árbol mide 15 m de altura.

3. ¿Con qué ángulo sobre la pared he de apoyar una escalera de 8 metros para alcanzar una altura de 6 metros?

4. Sabiendo que  $\operatorname{cos} \alpha = 1/4$ , y que  $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ . Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo  $\alpha$ .

5. Demuestra mediante la circunferencia goniométrica las relaciones entre las razones trigonométricas entre  $\alpha$  y  $180 - \alpha$ , y  $\alpha$  y  $270 - \alpha$

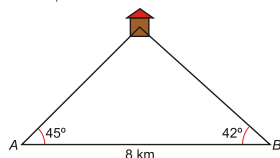
6. Sabiendo que el  $\operatorname{sen} 25^\circ = 0,423$ , calcula el seno, el coseno y la tangente de  $1685^\circ$

7. La base de un triángulo isósceles mide 64 cm, y el ángulo que se forma entre los lados iguales es de  $40^\circ$ . Calcula el perímetro y el área del triángulo.

8. El ángulo que se forma en la intersección de dos caminos es de  $68^\circ$ . La granja A está a 230 m de ese punto, y la granja B, a 435 m.

¿A qué distancia en línea recta está la granja A de la granja B?

9. Dos ambulancias, distanciadas 8 km en línea recta, reciben una llamada de urgencia de una casa. Observa la figura y calcula la distancia que separa a cada ambulancia de la casa:



10. Calcula la altura de un árbol, sabiendo que desde un punto del terreno se observa su copa bajo un ángulo de  $30^\circ$  y si nos acercamos 10 m, la vemos bajo un ángulo de  $60^\circ$ .

11. Un avión vuela entre dos ciudades, A y B, que distan 80 km. Las visuales desde el avión a A y a B forman ángulos de  $290$  y  $430$  con la horizontal, respectivamente. ¿A qué altura está el avión?

12. Demuestra las siguientes igualdades trigonométricas:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \operatorname{cos}^2 \alpha + \operatorname{cos}^4 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{1}{\tan^2 \alpha}$$

$$\frac{\operatorname{sen}^4 \alpha - \operatorname{cos}^4 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{cos}^2 \alpha} = 1$$