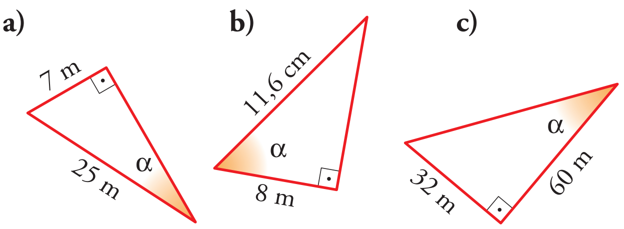
PÁGINA 161

PRACTICA

Razones trigonométricas de un ángulo agudo

1 □□□ **Halla las razones trigonométricas del ángulo α en cada uno de estos triángulos:**



a) $sen\ \alpha = \frac{7}{25} = 0{,}28$; $cos\ \alpha = \frac{\sqrt{25^2 - 7^2}}{25} = \frac{24}{25} = 0{,}96$; $tg\ \alpha = \frac{7}{24} \approx 0{,}29$

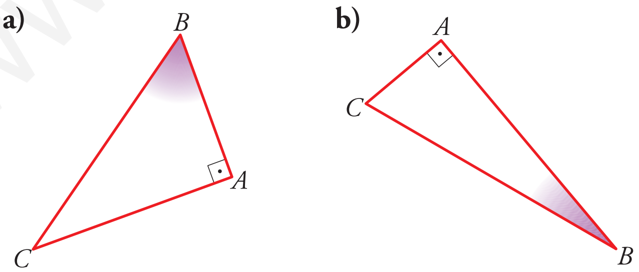
b) $sen\ \alpha = \frac{\sqrt{11{,}6^2 - 8^2}}{11{,}6} = \frac{8{,}4}{11{,}6} \approx 0{,}724$

$cos\ \alpha = \frac{8}{11{,}6} \approx 0{,}69$; $tg\ \alpha = \frac{8{,}4}{8} = 1{,}05$

c) $sen\ \alpha = \frac{32}{\sqrt{32^2 + 60^2}} = \frac{32}{68} = \frac{8}{17} \approx 0{,}47$

$cos\ \alpha = \frac{60}{68} = \frac{15}{17} \approx 0{,}88$; $tg\ \alpha = \frac{32}{60} = \frac{8}{15} \approx 0{,}53$

2 □□□ **Midiendo los lados, halla las razones trigonométricas de $\hat{B}$ en cada caso:**



a) $sen\ \hat{B} = \frac{2{,}8}{3{,}4} \approx 0{,}82$; $cos\ \hat{B} = \frac{2}{3{,}4} \approx 0{,}59$; $tg\ \hat{B} = \frac{2{,}8}{2} = 1{,}4$

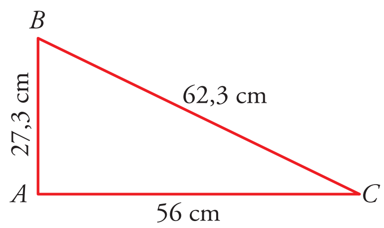
b) $sen\ \hat{B} = \frac{1{,}3}{3{,}8} \approx 0{,}34$; $cos\ \hat{B} = \frac{3{,}6}{3{,}8} \approx 0{,}95$; $tg\ \hat{B} = \frac{1{,}3}{3{,}6} \approx 0{,}36$

3 **Halla las razones trigonométricas de los ángulos agudos de los siguientes triángulos rectángulos ($\hat{A} = 90°$):**

a) b = 56 cm; a = 62,3 cm **b) b = 33,6 cm; c = 4,5 cm**

c) c = 16 cm; a = 36 cm

a)



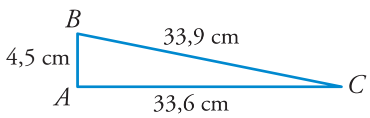
$$sen\ \hat{B} = \frac{56}{62,3} \approx 0,90$$

$$cos\ \hat{B} = \frac{\sqrt{62,3^2 - 56^2}}{62,3} = \frac{27,3}{62,3} \approx 0,438$$

$$tg\ \hat{B} = \frac{56}{27,3} \approx 2,051$$

$$sen\ \hat{C} = \frac{27,3}{62,3} \approx 0,438; \quad cos\ \hat{C} = \frac{56}{62,3} \approx 0,90; \quad tg\ \hat{C} = \frac{27,3}{56} = 0,4875$$

b)



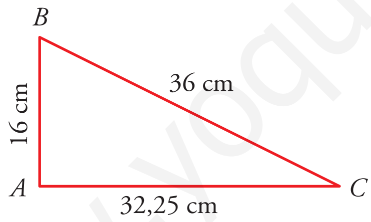
$$sen\ \hat{B} = \frac{33,6}{\sqrt{4,5^2 + 33,6^2}} = \frac{33,6}{33,9} \approx 0,991$$

$$cos\ \hat{B} = \frac{4,5}{33,9} \approx 0,133$$

$$tg\ \hat{B} = \frac{33,6}{4,5} \approx 7,467$$

$$sen\ \hat{C} = \frac{4,5}{33,9} \approx 0,133; \quad cos\ \hat{C} = \frac{33,6}{33,9} \approx 0,991; \quad tg\ \hat{C} = \frac{4,5}{33,6} \approx 9,955$$

c)



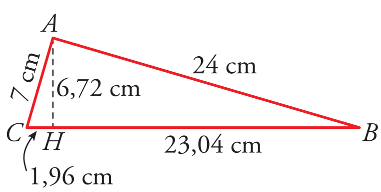
$$sen\ \hat{B} = \frac{\sqrt{36^2 - 16^2}}{36} \approx \frac{32,25}{36} \approx 0,896$$

$$cos\ \hat{B} = \frac{16}{36} = 0,\widehat{4}$$

$$tg\ \hat{B} = \frac{32,25}{16} \approx 2,016$$

$$sen\ \hat{C} = \frac{16}{36} = 0,\widehat{4}; \quad cos\ \hat{C} = \frac{32,25}{36} \approx 0,896; \quad tg\ \hat{C} = \frac{16}{32,25} \approx 0,496$$

4 **Comprueba, con el teorema de Pitágoras, que los triángulos *ABC* y *AHB* son rectángulos.**



Halla en cada uno las razones trigonométricas del ángulo *B* y compara los resultados. ¿Qué observas?

El triángulo ABC es rectángulo en A:

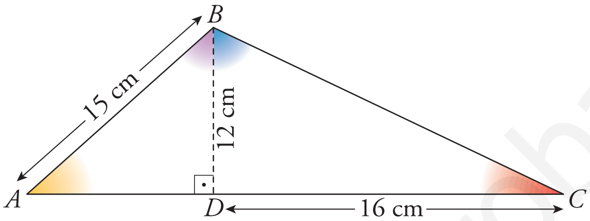
$$24^2 + 7^2 = 625 = (23,04 + 1,96)^2 = 25^2 = 625$$

El triángulo AHB es rectángulo en H:

$$23,04^2 + 6,72^2 = 576 = 24^2$$

	sen $\hat{B}$	*cos* $\hat{B}$	*tg* $\hat{B}$
en ***ABC***	$\frac{7}{25} = 0,28$	$\frac{24}{25} = 0,96$	$\frac{7}{24} \approx 0,292$
en ***AHB***	$\frac{6,72}{24} = 0,28$	$\frac{23,04}{24} = 0,96$	$\frac{6,72}{23,04} \approx 0,292$

5 **Calcula las razones trigonométricas de los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{C}$, $\widehat{ABD}$ y $\widehat{CBD}$.**



$\overline{AD} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$; $\overline{BC} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$

	$\hat{A}$	$\hat{C}$	$\widehat{ABD}$	$\widehat{CBD}$
sen	$\frac{12}{15} = 0,8$	$\frac{12}{20} = 0,6$	$\frac{9}{15} = 0,6$	$\frac{16}{20} = 0,8$
cos	$\frac{9}{15} = 0,6$	$\frac{16}{20} = 0,8$	$\frac{12}{15} = 0,8$	$\frac{12}{20} = 0,6$
tg	$\frac{12}{9} = 1,\overset{\frown}{3}$	$\frac{12}{16} = 0,75$	$\frac{9}{12} = 0,75$	$\frac{16}{12} = 1,\overset{\frown}{3}$

Relaciones fundamentales

6 **Si *sen* α = 0,28, calcula *cos* α y *tg* α utilizando las relaciones fundamentales (α < 90°).**

$$cos\ \alpha = \sqrt{1 - 0,28^2} = 0,96; \quad tg\ \alpha = \frac{0,28}{0,96} \approx 0,292$$

7 **Halla el valor exacto (con radicales) de *sen* α y *tg* α sabiendo que *cos* α = 2/3 (α < 90°).**

$$sen\ \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}; \quad tg\ \alpha = \frac{\sqrt{5}/3}{2/3} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

8 Si $tg\,\alpha = \sqrt{5}$, calcula $sen\,\alpha$ y $cos\,\alpha$ $(\alpha < 90°)$.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \sqrt{5} \\ sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1\end{array}\right\} \begin{array}{l} s = \sqrt{5}c \\ (\sqrt{5}c)^2 + c^2 = 1 \rightarrow 6c^2 = 1 \rightarrow cos\,\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}\end{array}$$

$$sen\,\alpha = \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{30}}{6}$$

9 Calcula y completa esta tabla con valores aproximados:

sen α	**0,92**		
cos α			**0,12**
tg α		**0,75**	

sen α	0,92	0,6	0,99
cos α	0,39	0,8	0,12
tg α	2,35	0,75	8,27

En todos los casos solo tomaremos valores positivos.

- $sen\,\alpha = 0{,}92 \rightarrow cos\,\alpha = \sqrt{1 - (0{,}92)^2} = 0{,}39$

  $tg\,\alpha = \dfrac{0{,}92}{0{,}39} = 2{,}35$

- $tg\,\alpha = 0{,}75$

  $\dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = 0{,}75 \rightarrow sen\,\alpha = 0{,}75 \cdot cos\,\alpha$

  $(sen\,\alpha)^2 + (cos\,\alpha)^2 = 1 \rightarrow (0{,}75 \cdot cos\,\alpha)^2 + (cos\,\alpha)^2 = 1 \rightarrow$

  $\rightarrow (cos\,\alpha)^2 = 0{,}64 \rightarrow cos\,\alpha = 0{,}8$

  $sen\,\alpha = 0{,}75 \cdot 0{,}8 = 0{,}6$

- $cos\,\alpha = 0{,}12 \rightarrow sen\,\alpha = \sqrt{1 - (0{,}12)^2} = 0{,}99$

  $tg\,\alpha = \dfrac{0{,}99}{0{,}12} = 8{,}27$

10 Calcula el valor exacto (utilizando radicales) de las razones trigonométricas que faltan en la tabla siguiente $(\alpha < 90°)$:

sen α	**2/3**		
cos α		$\sqrt{2}/3$	
tg α			**2**

sen α	2/3	$\sqrt{7}/3$	$2\sqrt{5}/5$
cos α	$\sqrt{5}/3$	$\sqrt{2}/3$	$\sqrt{5}/5$
tg α	$2\sqrt{5}/5$	$\sqrt{7/2}$	2

Como $\alpha < 90° \rightarrow \begin{cases} sen\ \alpha > 0 \\ cos\ \alpha > 0 \end{cases}$

- $sen\ \alpha = \frac{2}{3} \rightarrow cos\ \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

  $tg\ \alpha = \frac{2/3}{\sqrt{5}/3} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

- $cos\ \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3} \rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

  $tg\ \alpha = \frac{\sqrt{7}/3}{\sqrt{2}/3} = \sqrt{\frac{7}{2}}$

- $tg\ \alpha = 2 \rightarrow \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = 2 \rightarrow sen\ \alpha = 2\ cos\ \alpha$

  $(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow 4(cos\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow cos\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

  $sen\ \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Calculadora

11 ■□□ **Completa la tabla siguiente, utilizando la calculadora:**

α	15°	55° 20'	72° 25' 40''	85,5°
sen α				
cos α				
tg α				

α	15°	55° 20'	72° 25' 40''	85,5°
sen α	0,26	0,82	0,95	0,997
cos α	0,97	0,57	0,30	0,078
tg α	0,27	1,45	3,16	12,71

12 ■□□ **Halla el ángulo α en cada caso. Exprésalo en grados, minutos y segundos.**

a) $sen\ \alpha = 0{,}58$ **b)** $cos\ \alpha = 0{,}75$ **c)** $tg\ \alpha = 2{,}5$

d) $sen\ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ **e)** $cos\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ **f)** $tg\ \alpha = 3\sqrt{2}$

a) α = 35° 27' 2'' b) α = 41° 24' 35'' c) α = 68° 11' 55''

d) α = 48° 11' 23'' e) α = 54° 44' 8'' f) α = 76° 44' 14''

13 ■□□ **Halla, con la calculadora, las otras razones trigonométricas del ángulo α en cada uno de los casos siguientes:**

a) $sen\ \alpha = 0{,}23$ **b)** $cos\ \alpha = 0{,}74$ **c)** $tg\ \alpha = 1{,}75$

d) $sen\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ **e)** $tg\ \alpha = \sqrt{3}$ **f)** $cos\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

a) $cos\ \alpha = 0{,}97;\ \ tg\ \alpha = 0{,}24$

b) $sen\ \alpha = 0{,}67;\ \ tg\ \alpha = 0{,}91$

c) $sen\ \alpha = 0{,}87;\ \ cos\ \alpha = 0{,}5$

d) $cos\ \alpha = 0{,}71;\ \ tg\ \alpha = 1$

e) $sen\ \alpha = 0{,}87;\ \ cos\ \alpha = 0{,}5$

f) $sen\ \alpha = 0{,}5;\ \ tg\ \alpha = 0{,}58$

PÁGINA 162

Resolución de triángulos rectángulos

14 ■□□ **Halla la medida de los lados y ángulos desconocidos en los siguientes triángulos rectángulos ($\hat{A} = 90°$):**

a) $b = 7$ cm $\quad c = 18$ cm **b)** $a = 25$ cm $\quad b = 7$ cm

c) $b = 18$ cm $\quad \hat{B} = 40°$ **d)** $c = 12{,}7$ cm $\quad \hat{B} = 65°$

e) $a = 35$ cm $\quad \hat{C} = 36°$

a) $a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{7^2 + 18^2} \approx 19{,}31$ cm

$tg\ \hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{7}{18} = 0{,}3\widehat{8} \rightarrow \hat{B} \approx 21°\ 15'\ 2''$

$\hat{C} = 90° - 21°\ 15'\ 2'' = 68°\ 44'\ 58''$

b) $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$ cm

$sen\ \hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{7}{25} = 0{,}28 \rightarrow \hat{B} \approx 16°\ 15'\ 37''$

$\hat{C} = 90° - 16°\ 15'\ 37'' = 73°\ 44'\ 23''$

c) $\hat{C} = 90° - 40° = 50°$

$sen\ \hat{B} = \frac{b}{a} \rightarrow sen\ 40° = \frac{18}{a} \rightarrow a \approx 28$ cm

$tg\ \hat{B} = \frac{b}{c} \rightarrow tg\ 40° = \frac{18}{c} \rightarrow c \approx 21{,}45$ cm

d) $\hat{C} = 90° - 65° = 25°$

$tg\ \hat{B} = \frac{b}{c} \rightarrow tg\ 65° = \frac{b}{12{,}7} \rightarrow b \approx 27{,}23$ cm

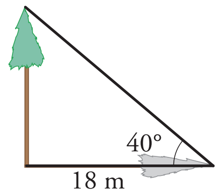
$cos\ \hat{B} = \frac{c}{a} \rightarrow cos\ 65° = \frac{12{,}7}{a} \rightarrow a \approx 30{,}05$ cm

e) $\hat{B} = 90° - 36° = 54°$

$sen\ \hat{C} = \dfrac{c}{a} \rightarrow sen\ 36° = \dfrac{c}{35} \rightarrow c \approx 20{,}57$ cm

$cos\ \hat{C} = \dfrac{b}{a} \rightarrow cos\ 36° = \dfrac{b}{35} \rightarrow b \approx 28{,}32$ cm

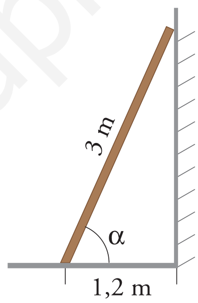
15 ■□□ **Cuando los rayos del sol forman 40° con el suelo, la sombra de un árbol mide 18 m. ¿Cuál es su altura?**



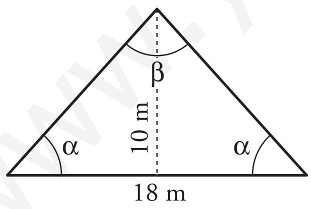
$tg\ 40° = \dfrac{x}{18} \rightarrow x = 15{,}1$ m mide el árbol.

16 ■□□ **Una escalera de 3 m está apoyada en una pared. ¿Qué ángulo forma la escalera con el suelo si su base está a 1,2 m de la pared?**

$cos\ \alpha = \dfrac{1{,}2}{3} = 0{,}4 \rightarrow \alpha = 66°\ 25'\ 19''$



17 ■□□ **De un triángulo isósceles conocemos su lado desigual, 18 m, y su altura, 10 m. ¿Cuánto miden sus ángulos?**

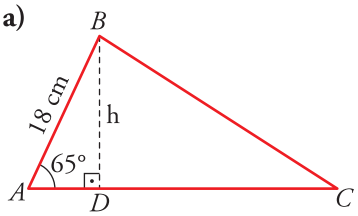


$tg\ \alpha = \dfrac{10}{9} = 1{,}\widehat{1} \rightarrow \alpha = 48°\ 46''$

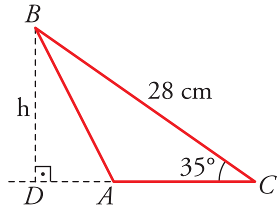
$\beta = 180° - 2\alpha = 83°\ 58'\ 28''$

18 ■■□ **Calcula la altura, h, de los siguientes triángulos:**

a)



b)

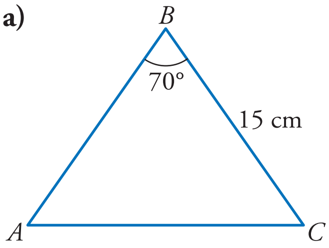


a) $sen\ 65° = \dfrac{h}{18} \rightarrow h \approx 16{,}3$ cm

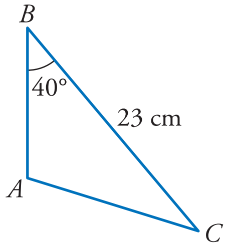
b) $sen\ 35° = \dfrac{h}{28} \rightarrow h \approx 16{,}1$ cm

19 ■■□ **Calcula la altura sobre el lado *AB* en los siguientes triángulos:**

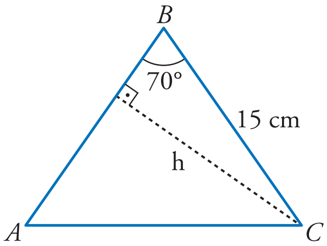
a)



b)

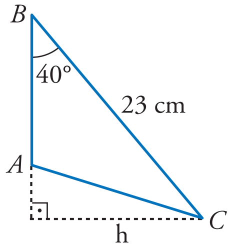


a)



$sen\ 70° = \dfrac{h}{15} \rightarrow h \approx 14,1$ cm

b)



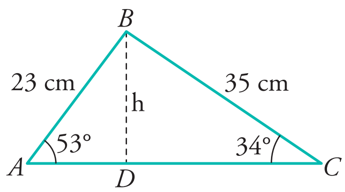
$sen\ 40° = \dfrac{h}{23} \rightarrow h \approx 14,8$ cm

20 ■■□ **Halla:**

a) La longitud *AC*.

b) El área del triángulo *ABC*.

☞ ***Ten en cuenta que AC = AD + DC.***



a) En $\widehat{ABD}$, $cos\ 53° = \dfrac{\overline{AD}}{23} \rightarrow \overline{AD} \approx 13,84$ cm

En $\widehat{BDC}$, $cos\ 34° = \dfrac{\overline{DC}}{35} \rightarrow \overline{DC} \approx 29$ cm

$\overline{AC} \approx 13,84 + 29 = 42,84$ cm

b) Hallamos la altura h en el triángulo *ABD*:

$sen\ 53° = \dfrac{h}{23} \rightarrow h \approx 18,37$ cm

$A_{ABC} = \dfrac{\overline{AC} \cdot h}{2} = \dfrac{42,84 \cdot 18,37}{2} \approx 393,49\ cm^2$

Razones trigonométricas de ángulos cualesquiera

21 Sitúa en la circunferencia goniométrica los siguientes ángulos e indica el signo de sus razones trigonométricas.

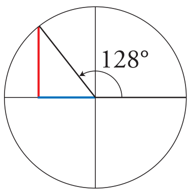
a) 128° b) 198°

c) 87° d) 98°

e) 285° f) 305°

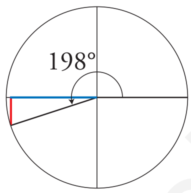
Compruébalo con la calculadora.

a)



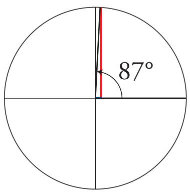
128°	
sen	+
cos	–
tg	–

b)



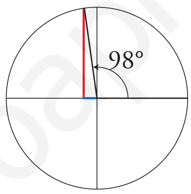
198°	
sen	–
cos	–
tg	+

c)



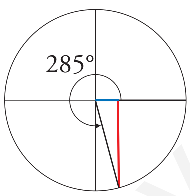
87°	
sen	+
cos	+
tg	+

d)



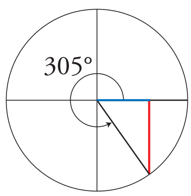
98°	
sen	+
cos	–
tg	–

e)



285°	
sen	–
cos	+
tg	–

f)



305°	
sen	–
cos	+
tg	–

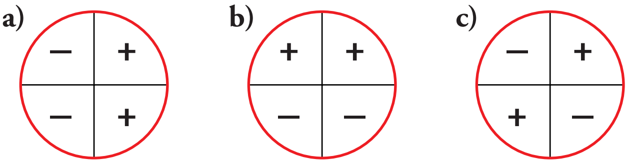
22 Completa esta tabla sin usar la calculadora:

	0°	90°	180°	270°	360°
sen		1			
cos		0			
tg		No tiene			

	0°	90°	180°	270°	360°
sen	0	1	0	–1	0
cos	1	0	–1	0	1
tg	0	No tiene	0	No tiene	0

23 ■■□ **En cada uno de estos círculos está indicado el signo de las razones trigonométricas de α, según el cuadrante en el que esté α. ¿Cuál corresponde a *sen* α. ¿Cuál a *cos* α? ¿Y cuál a *tg* α?**

a) **b)** **c)**

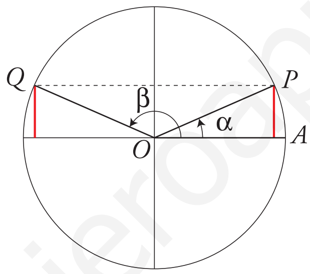


a) *cos* α b) *sen* α c) *tg* α

24 ■■□ **Resuelto en el libro de texto.**

PÁGINA 163

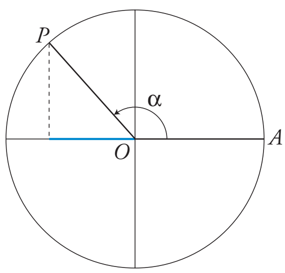
25 ■■□ **Dibuja dos ángulos cuyo seno sea 2/5 y halla su coseno.**



$$sen\ \alpha = \frac{2}{5} \rightarrow cos\ \alpha = \pm\sqrt{1-\frac{4}{25}} = \pm\sqrt{\frac{21}{25}} = \pm\frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$cos\ \widehat{AOP} = \frac{\sqrt{21}}{5};\ cos\ \widehat{AOQ} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$$

26 ■■□ **Dibuja un ángulo menor que 180° cuyo coseno sea –2/3 y halla su seno y su tangente.**



El ángulo $\widehat{AOP}$ cumple las condiciones.

$$cos\ \alpha = -\frac{2}{3} \rightarrow sen\ \alpha = \pm\sqrt{1-\frac{4}{9}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{3} \rightarrow sen\ \widehat{AOP} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$tg\ \widehat{AOP} = \frac{\sqrt{5}/3}{-2/3} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

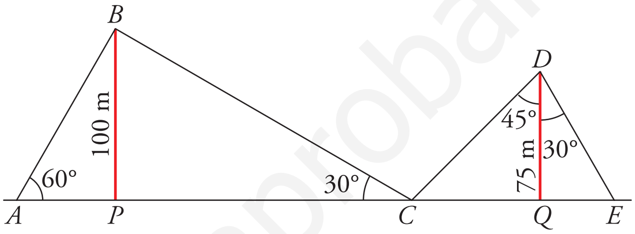
27 Sabiendo que $tg\,\alpha = -2$ y $\alpha < 180°$, halla $sen\,\alpha$ y $cos\,\alpha$.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = -2 \\ (sen\,\alpha)^2 + (cos\,\alpha)^2 = 1\end{array}\right\} \begin{array}{l} s = -2c \\ 4c^2 + c^2 = 1 \;\rightarrow\; 5c^2 = 1 \;\rightarrow\; c = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}\end{array}$$

$$cos\,\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}; \quad sen\,\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

PIENSA Y RESUELVE

28 Dos antenas de radio están sujetas al suelo por cables tal como indica la figura. Calcula la longitud de cada uno de los tramos de cable y la distancia AE.



$sen\,60° = \dfrac{100}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AB} \approx 115{,}47$ m $\qquad tg\,60° = \dfrac{100}{\overline{AP}} \rightarrow \overline{AP} \approx 57{,}74$ m

$sen\,30° = \dfrac{100}{\overline{BC}} \rightarrow \overline{BC} = 200$ m $\qquad tg\,30° = \dfrac{100}{\overline{PC}} \rightarrow \overline{PC} \approx 173{,}21$ m

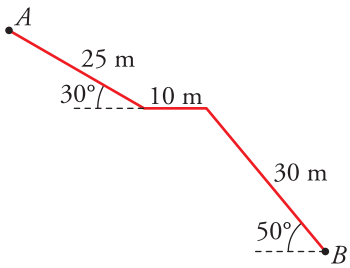
$cos\,45° = \dfrac{75}{\overline{CD}} \rightarrow \overline{CD} \approx 106{,}07$ m $\qquad tg\,45° = \dfrac{\overline{CQ}}{75} \rightarrow \overline{CQ} = 75$ m

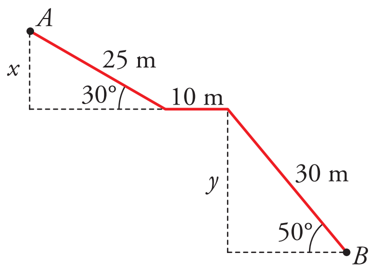
$cos\,30° = \dfrac{75}{\overline{DE}} \rightarrow \overline{DE} \approx 86{,}6$ m $\qquad tg\,30° = \dfrac{\overline{QE}}{75} \rightarrow \overline{QE} \approx 43{,}3$ m

$\overline{AE} = 57{,}74 + 173{,}21 + 75 + 43{,}3 = 349{,}25$ m

29 Una escalera para acceder a un túnel tiene la forma y las dimensiones de la figura.

Calcula la profundidad del punto B.



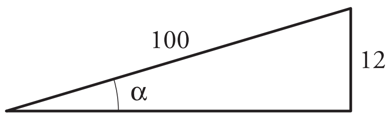


$sen\,30° = \dfrac{x}{25} \rightarrow x = 12{,}5$ m

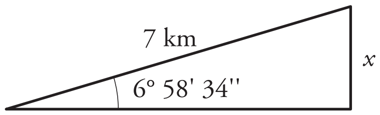
$sen\,50° = \dfrac{y}{30} \rightarrow y \approx 22{,}98$ m

Profundidad: $12{,}5 + 22{,}98 = 35{,}48$ m

30 **Una señal de peligro en una carretera nos advierte que la pendiente es del 12%. ¿Qué ángulo forma ese tramo de carretera con la horizontal? ¿Cuántos metros hemos descendido después de recorrer 7 km por esa carretera?**

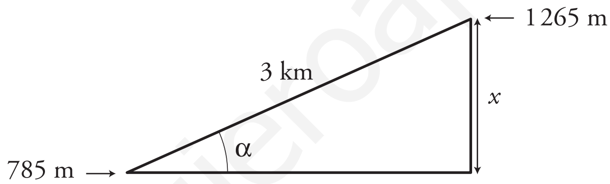


$$sen\ \alpha = \frac{12}{100} = 0{,}12 \rightarrow \alpha = 6°\ 53'\ 32''$$



$$sen\ \alpha = \frac{x}{7} \rightarrow x = 0{,}12 \cdot 7 = 0{,}84 \text{ km} = 840 \text{ m}$$

31 **En una ruta de montaña, una señal indica una altitud de 785 m. Tres kilómetros más adelante, la altitud es de 1 265 m. Halla la pendiente media de esa ruta y el ángulo que forma con la horizontal.**



$x = 1\,265 - 785 = 480$ m

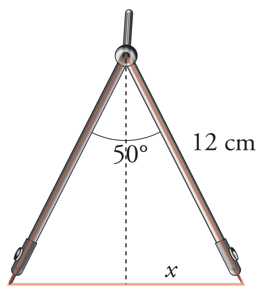
$$sen\ \alpha = \frac{480}{3\,000} = 0{,}16 \rightarrow \alpha = 9°\ 12'\ 25''$$

Pendiente = $tg\ \alpha = 0{,}162 \rightarrow 16{,}2\%$

32 **Los brazos de un compás, que miden 12 cm, forman un ángulo de 50°. ¿Cuál es el radio de la circunferencia que puede trazarse con esa abertura?**

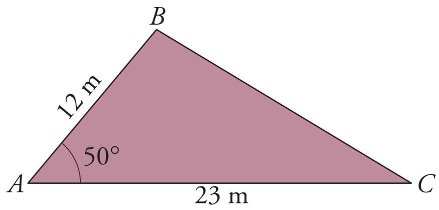
$$sen\ 25° = \frac{x}{12} \rightarrow x \approx 5{,}07 \text{ cm}$$

Radio de la circunferencia ≈ 10,14 cm

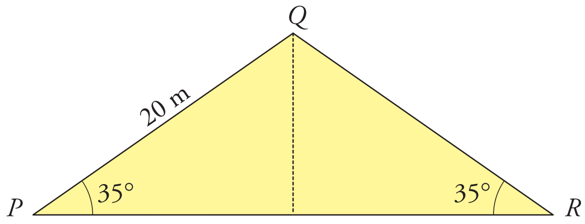


33 **Calcula el área de cada uno de estos triángulos:**

a)



b)



a) Calculamos la altura, h, sobre AC:

$$sen\ 50° = \frac{h}{12} \rightarrow h \approx 9{,}19 \text{ m}$$

$$\text{Área} = \frac{23 \cdot 9{,}19}{2} = 105{,}685 \text{ m}^2$$

b) Calculamos la altura, h, sobre PR:

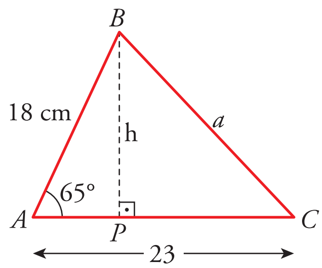
$$sen\ 35° = \frac{h}{20} \rightarrow h \approx 11{,}47 \text{ m}$$

Calculamos la base, $\overline{PR}$:

$$cos\ 35° = \frac{\overline{PR}/2}{20} \rightarrow \overline{PR} = 40 \cdot cos\ 35° \approx 32{,}77 \text{ m}$$

$$\text{Área} = \frac{32{,}77 \cdot 11{,}47}{2} \approx 188 \text{ m}^2$$

34 **En el triángulo** ***ABC*** **calcula h y** ***a*****.**



- En el triángulo ABP:

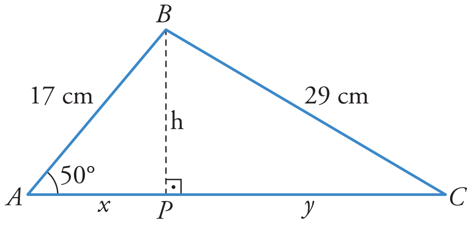
$$sen\ 65° = \frac{h}{18} \rightarrow h \approx 16{,}31 \text{ cm}$$

- $cos\ 65° = \dfrac{\overline{AP}}{18} \rightarrow \overline{AP} \approx 7{,}61$

$$\overline{PC} = \overline{AC} - \overline{AP} = 23 - 7{,}61 = 15{,}39$$

$$a = \sqrt{h^2 + \overline{PC}^2} = \sqrt{16{,}31^2 + 15{,}39^2} \approx 22{,}42 \text{ cm}$$

35 ▭▭▭ **En el triángulo *ABC* halla *x*, h e *y*.**



- En el triángulo *ABP*:

$cos\ 50° = \dfrac{x}{17} \rightarrow x \approx 10{,}93$ cm

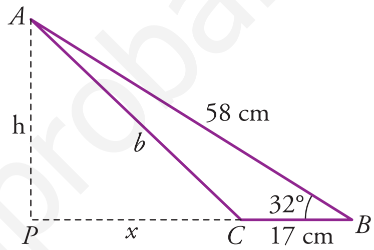
$sen\ 50° = \dfrac{h}{17} \rightarrow h \approx 13{,}02$ cm

- En el triángulo *BCP*:

$y = \sqrt{29^2 - h^2} = \sqrt{29^2 - 13{,}02^2} \approx 25{,}91$ cm

36 ▭▭▭ **Calcula h, *x* y *b*.**

☞ ***En el triángulo PAB, PB = x + 17.***

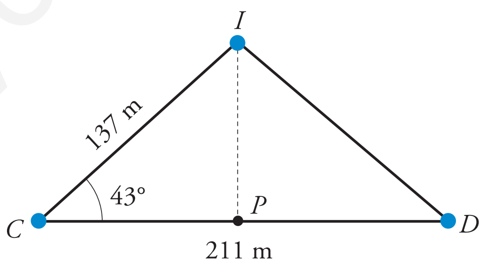


$sen\ 32° = \dfrac{h}{58} \rightarrow h \approx 30{,}74$ cm

$cos\ 32° = \dfrac{x + 17}{58} \rightarrow x \approx 32{,}19$ cm

$b = \sqrt{x^2 + h^2} \approx 44{,}51$ cm

37 ▭▭▭ **Conocemos la distancia de nuestra casa a la iglesia, 137 m; la distancia de nuestra casa al depósito de agua, 211 m, y el ángulo, 43°, bajo el cual se ve desde nuestra casa el segmento cuyos extremos son la iglesia y el depósito.**
¿Cuál es la distancia que hay de la iglesia al depósito de agua?



En el triángulo *IPC*:

$cos\ 43° = \dfrac{\overline{CP}}{137} \rightarrow \overline{CP} \approx 100{,}2$ m

$sen\ 43° = \dfrac{\overline{IP}}{137} \rightarrow \overline{IP} \approx 93{,}43$ m

$\overline{PD} = 211 - 100{,}2 = 110{,}8$ m

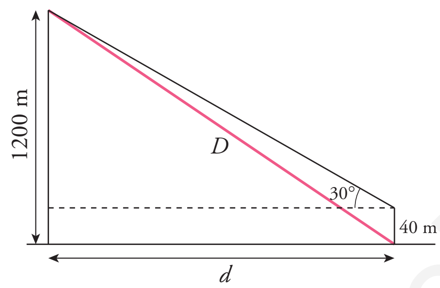
Distancia de la iglesia al depósito:

$\overline{ID} = \sqrt{\overline{PD}^2 + \overline{IP}^2} = \sqrt{110{,}8^2 + 93{,}43^2} \approx 144{,}93$ m

PÁGINA 164

38 **Desde la torre de control de un aeropuerto se establece comunicación con un avión que va a aterrizar. En ese momento, el avión se encuentra a una altura de 1 200 metros y el ángulo de observación desde la torre (ángulo que forma la visual hacia el avión con la horizontal) es de 30°.**

¿A qué distancia está el avión del pie de la torre si esta mide 40 m de altura?



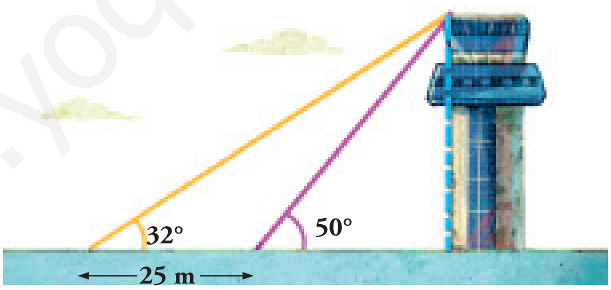
$tg\ 30° = \dfrac{1\,200 - 40}{d} \rightarrow d = \dfrac{1\,160}{tg\ 30°} = 2\,009{,}2$ m

Utilizando el teorema de Pitágoras:

$D = \sqrt{(1\,200)^2 + (2\,009{,}2)^2} = 2\,340{,}3$ m

La distancia del avión al pie de la torre es de 2 340,3 m.

39 **Desde el lugar donde me encuentro, la visual de la torre forma un ángulo de 32° con la horizontal.**



Si me acerco 25 m, el ángulo es de 50°. ¿Cuál es la altura de la torre?

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 32° = \dfrac{h}{25 + x} \\ tg\ 50° = \dfrac{h}{x} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 25tg\ 32° + x\ tg\ 32° = h \\ x \cdot tg\ 50° = h \end{array}\right\}$$

$25tg\ 32° + x\ tg\ 32° = x\ tg\ 50°$

$25tg\ 32° = x(tg\ 50° - tg\ 32°)$

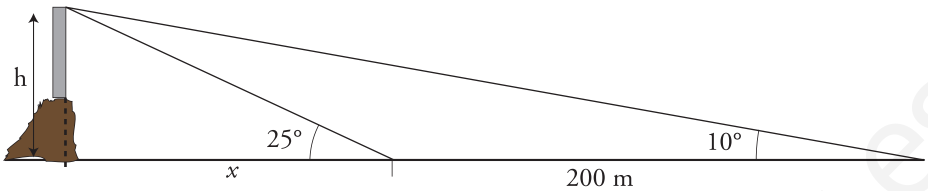
$x = \dfrac{25tg\ 32°}{tg\ 50° - tg\ 32°} = 27{,}56$ m

La altura de la torre es $h = 27{,}56 \cdot tg\ 50° = 32{,}84$ m.

40 **Calcula la altura de la luz de un faro sobre un acantilado cuya base es inaccesible, si desde un barco se toman las siguientes medidas:**

— El ángulo que forma la visual hacia la luz con la línea de horizonte es de 25°.

— Nos alejamos 200 metros y el ángulo que forma ahora dicha visual es de 10°.



$tg\ 25° = \frac{h}{x} \rightarrow h = x\ tg\ 25°$

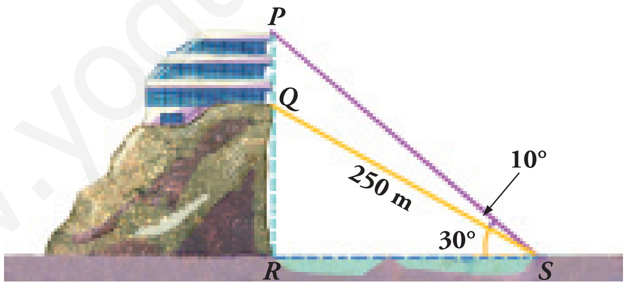
$tg\ 10° = \frac{h}{x + 200} \rightarrow h = (x + 200)tg\ 10°$

$x\ tg\ 25° = (x + 200)tg\ 10° \rightarrow x(tg\ 25° - tg\ 10°) = 200 \cdot tg\ 10° \rightarrow$

$\rightarrow x = \frac{200 \cdot tg\ 10°}{tg\ 25° - tg\ 10°} = 121{,}6$ m

$h = x\ tg\ 25° = 121{,}6 \cdot tg\ 25° = 56{,}7$ m

41 **Para calcular la altura del edificio, $\overline{PQ}$, hemos medido los ángulos que indica la figura. Sabemos que hay un funicular para ir de S a Q, cuya longitud es de 250 m. Halla $\overline{PQ}$.**



Calculamos $\overline{SR}$ y $\overline{RQ}$ con el triángulo SQR:

$cos\ 30° = \frac{\overline{SR}}{250} \rightarrow \overline{SR} = 250 \cdot cos\ 30° \approx 216{,}5$ m

$sen\ 30° = \frac{\overline{RQ}}{250} \rightarrow \overline{RQ} = 250 \cdot sen\ 30° = 125$ m

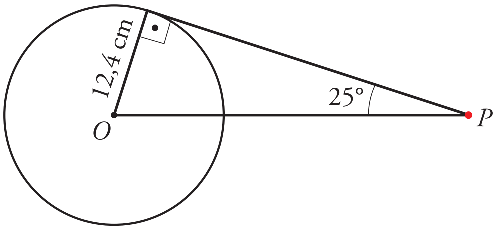
Calculamos $\overline{RP}$ con el triángulo SPR:

$tg\ 40° = \frac{\overline{RP}}{\overline{SR}} \rightarrow \overline{RP} = 216{,}5 \cdot tg\ 40° \approx 181{,}66$ m

Luego, $\overline{PQ} = \overline{RP} - \overline{RQ} = 181{,}66 - 125 = 56{,}66$ m

La altura del edificio es de 56,66 m.

42 □□□ **Las tangentes a una circunferencia de centro O, trazadas desde un punto exterior, P, forman un ángulo de 50°. Halla la distancia PO sabiendo que el radio de la circunferencia es 12,4 cm.**



$$sen\ 25° = \frac{12,4}{\overline{PO}} \rightarrow$$

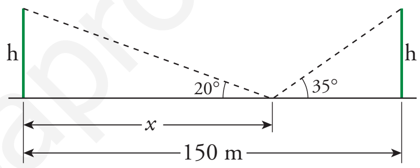
$$\rightarrow \overline{PO} = \frac{12,4}{sen\ 25°} \approx 29,34 \text{ cm}$$

43 □□□ **Dos edificios distan entre sí 150 metros. Desde un punto del suelo que está entre los dos edificios, vemos que las visuales a los puntos más altos de estos forman con la horizontal ángulos de 35° y 20°.**

¿Cuál es la altura de los edificios, si sabemos que los dos miden lo mismo?

$$tg\ 20° = \frac{h}{x}$$

$$tg\ 35° = \frac{h}{150 - x}$$



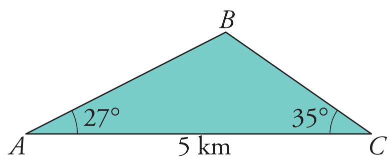
$$\left.\begin{array}{l} h = x\ tg\ 20° \\ h = (150 - x)\ tg\ 35° \end{array}\right\} (150 - x)\ tg\ 35° = x\ tg\ 20° \rightarrow x = \frac{150 \cdot tg\ 35°}{tg\ 20° + tg\ 35°} = 98,7 \text{ m}$$

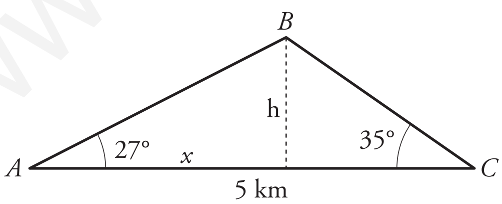
$$h = 98,7 \cdot tg\ 20° = 35,92 \text{ m}$$

La altura de los dos edificios es de 35,92 m.

44 □□□ **En dos comisarías de policía, A y C, se escucha la alarma de un banco B.**

Con los datos de la figura, calcula la distancia del banco a cada una de las comisarías.





$$\left.\begin{array}{l} tg\ 27° = \dfrac{h}{x} \\ tg\ 35° = \dfrac{h}{5 - x} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} h = x\ tg\ 27° \\ h = (5 - x) tg\ 35° \end{array}\right\}$$

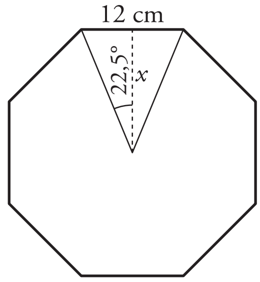
$$(5 - x) tg\ 35° = x\ tg\ 27° \rightarrow 5 tg\ 35° = x\ tg\ 35° + x\ tg\ 27°$$

$$x = \frac{5 tg\ 35°}{tg\ 35° + tg\ 27°} = 2,89 \text{ km} \rightarrow h = 1,47 \text{ km}$$

$$\overline{AB}^2 = x^2 + h^2 \rightarrow \overline{AB} = \sqrt{2,89^2 + 1,47^2} = 3,24 \text{ km}$$

$$\overline{BC}^2 = (5 - x)^2 + h^2 \rightarrow \overline{BC} = \sqrt{2,11^2 + 1,47^2} = 2,57 \text{ km}$$

45 □□□ **Halla el área de un octógono regular de 12 cm de lado.**

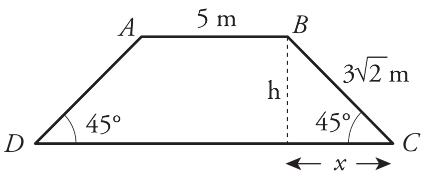


$\dfrac{360°}{8} = 45°; \ \dfrac{45°}{2} = 22,5°;$ apotema: x

$tg\ 22,5° = \dfrac{6}{x} \rightarrow x = 14,49$ cm

$\text{Área} = \dfrac{(12 \cdot 8) \cdot 14,49}{2} = 695,52 \text{ cm}^2$

46 □□□ **En un trapecio isósceles de bases AB y DC, conocemos los lados $\overline{AB} = 5$m y $\overline{BC} = 3\sqrt{2}$ m, y los ángulos que forma la base mayor con los lados oblicuos, que son de 45°.**
Halla su área.



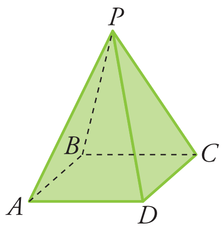
$sen\ 45° = \dfrac{h}{3\sqrt{2}} \rightarrow h = 3$ m

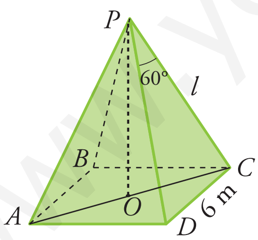
$cos\ 45° = \dfrac{x}{3\sqrt{2}} \rightarrow x = 3$ m

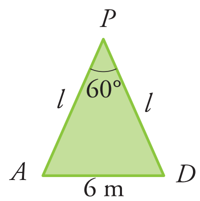
Base mayor: $5 + 3 + 3 = 11$ m

$\text{Área} = \dfrac{(5 + 11) \cdot 3}{2} = 24 \text{ m}^2$

47 □□□ **El lado de la base de una pirámide cuadrangular regular mide 6 m y el ángulo $\widehat{APD} = 60°$. Halla su volumen.**

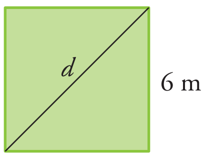






El triángulo APD es equilátero; $l = 6$ m

- Altura de la pirámide:



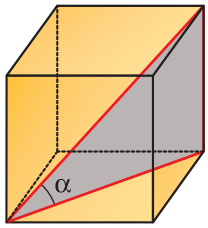
$d^2 = 6^2 + 6^2 \rightarrow d = 6\sqrt{2}$ m

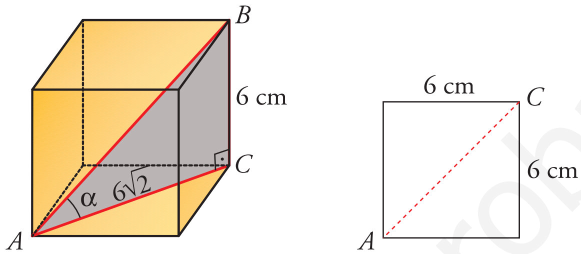
$\overline{AO} = \dfrac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ m

En el triángulo APO, $\overline{PO} = \sqrt{6^2 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ m

$\text{Volumen} = \dfrac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 3\sqrt{2} = 36\sqrt{2} \text{ m}^3$

48 ■■□ **Halla el ángulo que forma la diagonal de un cubo de arista 6 cm con la diagonal de la base.**



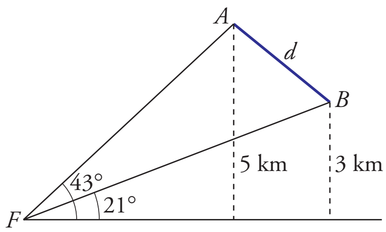


$\overline{AC}^2 = 6^2 + 6^2 \rightarrow \overline{AC} = 6\sqrt{2}$ cm

$tg\ \alpha = \dfrac{6}{6\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \alpha = 35°\ 15'\ 52''$

49 ■■■ **Desde un faro *F* se observa un barco *A* bajo un ángulo de 43° con respecto a la línea de la costa; y unbarco *B*, bajo un ángulo de 21°. El barco *A* está a 5 km de la costa, y el *B*, a 3 km. Calcula la distancia entre los barcos.**

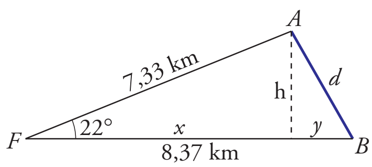
Calculamos $\overline{FA}$ y $\overline{FB}$:



$sen\ 43° = \dfrac{5}{\overline{FA}} \rightarrow \overline{FA} = \dfrac{5}{sen\ 43°} = 7{,}33$ km

$sen\ 21° = \dfrac{3}{\overline{FB}} \rightarrow \overline{FB} = \dfrac{3}{sen\ 21°} = 8{,}37$ km

Para calcular *d* utilizamos el triángulo de la derecha:



$sen\ 22° = \dfrac{5}{7{,}33}$

$h = 7{,}33 \cdot sen\ 22° = 2{,}74$ km

$cos\ 22° = \dfrac{x}{7{,}33} \rightarrow x = 7{,}33 \cdot cos\ 22° = 6{,}8$ km

$y = 8{,}37 - x \rightarrow y = 8{,}37 - 6{,}8 = 1{,}57$ km

Utilizando el teorema de Pitágoras:

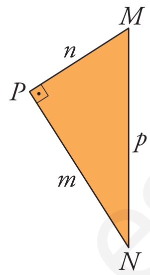
$d = \sqrt{h^2 + y^2} = \sqrt{2{,}74^2 + 1{,}57^2} = 3{,}16$ km

La distancia entre *A* y *B* es de 3,16 km.

PÁGINA 165

REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

50 **Observa el triángulo rectángulo *MPN*, y en las siguientes igualdades, sustituye los puntos suspensivos por *sen*, *cos* o *tg*.**



a) $\ldots\ \hat{M} = \dfrac{m}{p}$ **b)** $\ldots\ \hat{N} = \dfrac{m}{p}$

c) $\ldots\ \hat{M} = \dfrac{m}{n}$ **d)** $\ldots\ \hat{N} = \dfrac{n}{p}$

a) $sen\ \hat{M} = \dfrac{m}{p}$ b) $cos\ \hat{N} = \dfrac{m}{p}$ c) $tg\ \hat{M} = \dfrac{m}{n}$ d) $sen\ \hat{N} = \dfrac{n}{p}$

51 **¿Existe algún ángulo α tal que *sen* $\alpha = 3/5$ y *tg* $\alpha = 1/4$?**

No, porque si $sen\ \alpha = \dfrac{3}{5}$, $cos\ \alpha = \sqrt{1 - \dfrac{9}{25}} = \dfrac{4}{5}$ y $tg\ \alpha = \dfrac{3/5}{4/5} = \dfrac{3}{4} \neq \dfrac{1}{4}$.

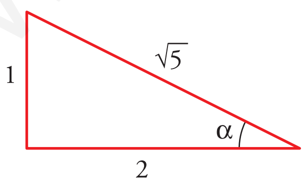
52 **¿Existe algún ángulo agudo cuyo seno sea mayor que la tangente? Justifica la respuesta.**

El seno es siempre menor que la tangente, porque

$$\text{seno} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \quad \text{y} \quad \text{tangente} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto continguo}}$$

y la hipotenusa es, siempre, mayor que el cateto contiguo.

53 **En un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide el doble que el otro. ¿Cuánto valen las razones trigonométricas del ángulo menor?**



$sen\ \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$; $cos\ \alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$; $tg\ \alpha = \dfrac{1}{2}$

54 **¿Puede existir un ángulo cuyo seno sea igual a 2? ¿Y uno cuyo coseno sea igual a 3/2? Razona las respuestas.**

No, porque el cateto opuesto es siempre menor que la hipotenusa y, por ello, el valor del seno de un ángulo agudo es siempre menor que 1.

El coseno es también menor que 1 por la misma razón. No puede ser igual a 3/2.

55 **Indica, en cada caso, en qué cuadrante está el ángulo α:**

a) $sen\ \alpha > 0,\ \ cos\ \alpha < 0$

b) $tg\ \alpha > 0,\ \ cos\ \alpha > 0$

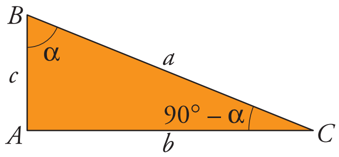
c) $sen\ \alpha < 0,\ \ cos\ \alpha > 0$

d) $sen\ \alpha < 0,\ \ cos\ \alpha < 0$

a) 2.° cuadrante. b) 1.er cuadrante.

c) 4.° cuadrante. d) 3.er cuadrante.

56 **Los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo se llaman complementarios porque su suma es uno recto. Observa la figura, completa la tabla y expresa simbólicamente lo que obtienes:**



	α	$90° - \alpha$
sen		
cos		
tg		

	α	$90° - \alpha$
sen	b/a	c/a
cos	c/a	b/a
tg	b/c	c/b

$sen\ \alpha = cos\ (90° - \alpha)$

$cos\ \alpha = sen\ (90° - \alpha)$

$tg\ \alpha = \dfrac{1}{tg(90° - \alpha)}$

57 **Usando las relaciones fundamentales, demuestra que:**

a) $(sen\ \alpha + cos\ \alpha)^2 + (sen\ \alpha - cos\ \alpha)^2 = 2$

b) $\dfrac{(sen\ \alpha)^3 + sen\ \alpha \cdot (cos\ \alpha)^2}{sen\ \alpha} = 1$

c) $\dfrac{(sen\ \alpha)^3 + sen\ \alpha \cdot (cos\ \alpha)^2}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha$

d) $1 + (tg\ \alpha)^2 = \dfrac{1}{(cos\ \alpha)^2}$

a) $(sen\ \alpha + cos\ \alpha)^2 + (sen\ \alpha - cos\ \alpha)^2 =$

$= (sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 + 2sen\ \alpha\ cos\ \alpha + (sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 - 2sen\ \alpha\ cos\ \alpha = 1 + 1 = 2$

b) $\dfrac{(sen\ \alpha)^3 + sen\ \alpha \cdot (cos\ \alpha)^2}{sen\ \alpha} = \dfrac{sen\ \alpha[(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2]}{sen\ \alpha} = \dfrac{sen\ \alpha}{sen\ \alpha} = 1$

c) $\dfrac{(sen\ \alpha)^3 + sen\ \alpha \cdot (cos\ \alpha)^2}{cos\ \alpha} = \dfrac{sen\ \alpha[(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2]}{cos\ \alpha} = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha$

d) $1 + (tg\ \alpha)^2 = 1 + \dfrac{(sen\ \alpha)^2}{(cos\ \alpha)^2} = \dfrac{(cos\ \alpha)^2 + (sen\ \alpha)^2}{(cos\ \alpha)^2} = \dfrac{1}{(cos\ \alpha)^2}$

PROFUNDIZA

58 **Sobre la circunferencia goniométrica señalamos un ángulo α en el primer cuadrante y a partir de él dibujamos los ángulos:**

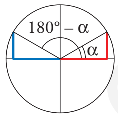
$$180° - \alpha \qquad 180° + \alpha \qquad 360° - \alpha$$

Busca la relación que existre entre:

a) ***sen*** **$(180° - \alpha)$ y** ***sen*** **α**

cos **$(180° - \alpha)$ y** ***cos*** **α**

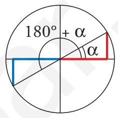
tg **$(180° - \alpha)$ y** ***tg*** **α**



b) ***sen*** **$(180° + \alpha)$ y** ***sen*** **α**

cos **$(180° + \alpha)$ y** ***cos*** **α**

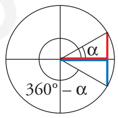
tg **$(180° + \alpha)$ y** ***tg*** **α**



c) ***sen*** **$(360° - \alpha)$ y** ***sen*** **α**

cos **$(360° - \alpha)$ y** ***cos*** **α**

tg **$(360° - \alpha)$ y** ***tg*** **α**



a) *sen* $(180° - \alpha)$ = *sen* α

cos $(180° - \alpha)$ = – *cos* α

tg $(180° - \alpha)$ = – *tg* α

b) *sen* $(180° + \alpha)$ = – *sen* α

cos $(180° + \alpha)$ = – *cos* α

tg $(180° + \alpha)$ = *tg* α

c) *sen* $(360° - \alpha)$ = – *sen* α

cos $(360° - \alpha)$ = *cos* α

tg $(360° - \alpha)$ = – *tg* α

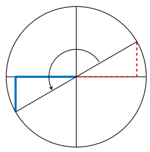
59 **Sitúa el ángulo dado sobre la circunferencia goniométrica y expresa sus razones trigonométricas utilizando un ángulo agudo como en el ejemplo:**

Ejemplo: 215°

sen **215° = –*sen* 35°**

cos **215° = –*cos* 35°**

tg **215° = *tg* 35°**



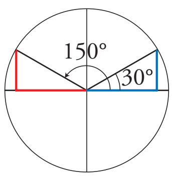
a) 150° **b) 240°** **c) 300°**

d) 225° **e) 100°** **f) 320°**

a) *sen* 150° = *sen* 30°

cos 150° = –*cos* 30°

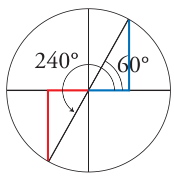
tg 150° = –*tg* 30°



b) *sen* 240° = –*sen* 60°

cos 240° = –*cos* 60°

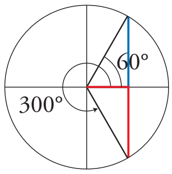
tg 240° = *tg* 60°



c) $sen\ 300° = -sen\ 60°$

$cos\ 300° = cos\ 60°$

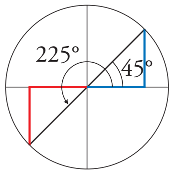
$tg\ 300° = -tg\ 60°$



d) $sen\ 225° = -sen\ 45°$

$cos\ 225° = -cos\ 45°$

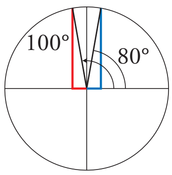
$tg\ 225° = tg\ 45°$



e) $sen\ 100° = sen\ 80°$

$cos\ 100° = -cos\ 80°$

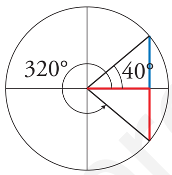
$tg\ 100° = -tg\ 80°$



f) $sen\ 320° = -sen\ 40°$

$cos\ 320° = cos\ 40°$

$tg\ 320° = -tg\ 40°$



60 **Resuelto en el libro de texto.**

61 **Resuelve las siguientes ecuaciones sabiendo que $0° \le x \le 360°$:**

a) $(sen\ x)^2 - sen\ x = 0$

b) $2(cos\ x)^2 - \sqrt{3}\ cos\ x = 0$

c) $3\ tg\ x + 3 = 0$

d) $4(sen\ x)^2 - 1 = 0$

e) $2(cos\ x)^2 - cos\ x - 1 = 0$

a) $(sen\ x)^2 - sen\ x = 0$

$sen\ x(sen\ x - 1) = 0$

- $sen\ x = 0$
  - $x = 0$
  - $x = 180°$
- $sen\ x = 1 \to x = 90°$

b) $2(cos\ x)^2 - \sqrt{3}\ cos\ x = 0$

$cos\ x(2\ cos\ x - \sqrt{3}) = 0$

- $cos\ x = 0$
  - $x = 90°$
  - $x = 270°$
- $cos\ x = \sqrt{3}/2$
  - $x = 30°$
  - $x = 330°$

c) $3\ tg\ x + 3 = 0 \to tg\ x = -1$
- $x = 135°$
- $x = 315°$

d) $4(sen\ x)^2 - 1 = 0 \rightarrow (sen\ x)^2 = \frac{1}{4}$

$sen\ x = \frac{1}{2}$: $x = 30°$, $x = 150°$

$sen\ x = -\frac{1}{2}$: $x = 210°$, $x = 330°$

e) $2(cos\ x)^2 - cos\ x - 1 = 0$

$$cos\ x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$cos\ x = 1 \rightarrow x = 0°$

$cos\ x = -\frac{1}{2}$: $x = 120°$, $x = 240°$