SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

A. Introducción teórica

B. Ejercicios resueltos

A. Introducción teórica

En los sistemas de ecuaciones no lineales, a diferencia de los lineales, aparecen ecuaciones en las que hay incógnitas de grado mayor que uno, por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} 2x-y=-1 \\ (x-1)^2+y=3 \end{array}\right\}$$

En el caso de sistemas de dos ecuaciones de dos incógnitas, las ecuaciones ya no serán dos líneas rectas. Una de ellas, o las dos, pueden ser parábolas, elipses, hipérbolas. La solución será los puntos en los que las dos ecuaciones se corten.

B. Ejercicios resueltos

1. $\left.\begin{array}{l} x^2-y^2=8 \\ x\cdot y=-3 \end{array}\right\}$

Solución:

Lo primero que vamos a hacer es manipular convenientemente la

$$\Rightarrow x=-\frac{3}{y}\Rightarrow\left(-\frac{3}{y}\right)^2-y^2=8\Rightarrow y^4+8y^2-9=0,$$

,en donde ahora hacemos el cambio $t^2\equiv y$, lo que implica que

$$y^4+8y^2-9=0\Rightarrow t^2+8t-9=0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$t^2+8t-9=0\Rightarrow t=\frac{-8\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 9}}{2a}=\begin{cases} t_1=-9 \\ t_2=1 \end{cases}$$

Ahora deshacemos el cambio:

$$\begin{cases} t_1 = -9 \Rightarrow x^2 = -9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-9}, \text{ que no tiene soluciones en } \mathbb{R} \\ t_2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

Sólo hay dos posibles valores de x. Hallamos el valor de y para cada x:

Si x=1, entonces: $y = -\frac{3}{1} = -3$

Si x=-1, entonces: $y = -\frac{3}{(-1)} = 3$

Conclusión:
$(x, y) = (1, -3)$
$(x, y) = (-1, 3)$

2. $$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 13 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1 \end{array}\right\}$$

<u>Solución:</u>

Lo primero que vamos a hacer es manipular convenientemente la ecuación inferior para escribirla en función de $\frac{1}{x^2}$ y llevarla así a la ecuación superior.

Escribimos como sigue la ecuación inferior:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{y}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 1 + \frac{2}{y} + \frac{1}{y^2}$$

Ahora la llevamos a la superior:

$$\left(1 + \frac{2}{y} + \frac{1}{y^2}\right) + \frac{1}{y^2} = 13 \Rightarrow \frac{1}{y^2} + \frac{y}{y^2} = \frac{6y^2}{y^2} \Rightarrow 6y^2 - y - 1 = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$6y^2 - y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{125}}{12} = \begin{cases} y_1 = \frac{1}{2} \\ y_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Ahora obtenemos los valores de x:

Si $y_1 = \frac{1}{2}$, entonces, usando la ecuación inferior:

$$\frac{1}{x} = 1 + 2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

Si $y_1 = -\frac{1}{3}$, entonces, usando nuevamente la ecuación inferior:

$$\frac{1}{x} = 1 - 3 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Conclusión:

$$\begin{cases} (x_1, y_1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \\ (x_2, y_2) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right) \end{cases}$$

3. $$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0 \end{array}\right\}$$

<u>Solución:</u>

Vamos a restar las dos ecuaciones:

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0 \\ - \quad \underline{x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0} \\ 2x + 2y - 10 = 0 \Rightarrow y = 5 - x \end{array}$$

Cuando tengamos los valores de *x*, los sustituiremos en ésta ecuación para obtener *y*.

Ahora llevamos éste resultado a la primera ecuación del sistema. De ahí obtendremos el valor de x:

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0 \Rightarrow x^2 + (5 - x)^2 - 4x - 6y + 11 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

Resolvemos esta ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-(4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2a} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Ahora hallamos los valores de y sustituyendo los de x en $y = 5 - x$

Para $x_1 = 3$ se tiene que $y_1 = 5 - 3 = 2$, mientras que para $x_2 = 1$ se tiene que $y_1 = 5 - 1 = 4$

Conclusión:

$(x_1, y_1) = (3,2)$
$(x_2, y_2) = (1,4)$

4. $\left.\begin{array}{l} 2x + y^2 - y = 4 \\ y^2 - 3 = x \end{array}\right\}$

Solución:

La segunda ecuación del sistema, $y^2 - 3 = x$, la llevamos a la primera ecuación:

$2(y^2 - 3) + y^2 - y = 4$.

Esto es una ecuación de segundo grado. Pero hay que simplificar para removerla.

$$2(y^2 - 3) + y^2 - y = 4 \Rightarrow 3y^2 - y - 10 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-10)}}{2 \cdot 3} = \frac{1 \pm \sqrt{1+120}}{6} = \frac{1 \pm 11}{6} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

Los valores de x los obtendremos sustituyendo $y_1 = 2$ y $y_2 = -\frac{5}{3}$ en la segunda ecuación del sistema, $y^2 - 3 = x$. Así:

Para $y_1 = 2$:
$y^2 - 3 = x \Rightarrow (2)^2 - 3 = x \Rightarrow x_1 = 1$

Para $y_2 = -\frac{5}{3}$
$$y^2 - 3 = x \Rightarrow \left(-\frac{5}{3}\right)^2 - 3 = x \Rightarrow x_2 = -\frac{9}{2}$$

Conclusión

$$(x_1, y_1) = (1,2) \text{ y } (x_2, y_2) = \left(-\frac{9}{2}, -\frac{5}{3}\right)$$

5. $\left.\begin{array}{l} 2x^2 - 10y^2 = 8 \\ x^2 - 3y^2 = 6 \end{array}\right\}$

<u>Solución:</u>

Se puede eliminar fácilmente la x del sistema si multiplicamos la segunda ecuación por (-2) y luego sumamos las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 2x^2 - 10y^2 = 8 \\ (-2)\cdot(x^2 - 3y^2 = 6) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} 2x^2 - 10y^2 = 8 \\ \underline{-2x^2 + 6y^2 = -12} \\ -4y^2 = -4 \Rightarrow y = \pm 1 \end{array}$$

Ahora obtendremos los valores de x. Usaremos, por ejemplo, la segunda ecuación del sistema, y en ella introduciremos $y = \pm 1$. Así:

Si $y = 1$ entonces $2x^2 - 10y^2 = 8 \Rightarrow 2x^2 - 10\cdot 1^2 = 8 \Rightarrow x = \pm 3$, por lo que dos soluciones son $(3,1)$ y $(3,1)$

Si $y = -1$ entonces $2x^2 - 10y^2 = 8 \Rightarrow 2x^2 - 10\cdot(-1)^2 = 8 \Rightarrow x = \pm 3$, por lo que otras dos soluciones son $(3,-1)$ y $(-3,-1)$

Conclusión:

Tenemos cuatro puntos que satisfacen el sistema:
$(x_1, y_1) = (3,1); (x_2, y_2) = (3,1)$, $(x_3, y_3) = (3,-1)$ y $(x_4, y_4) = (-3,-1)$

6. $\left.\begin{array}{l} xy = \dfrac{x^2}{2} - 2x - 6 \\ y = x^2 - 4x - 12 \end{array}\right\}$

<u>Solución:</u>

De la primera ecuación despejamos la x y aplicamos el método de igualación:

$$xy = \frac{x^2}{2} - 2x - 6 \Rightarrow y = \frac{x}{2} - 2 - \frac{6}{x} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x}{2} - 2 - \dfrac{6}{x} \\ y = x^2 - 4x - 12 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2}-2-\frac{6}{x}=x^2-4x-12$$

Ahora tratamos de simplificar esa ecuación con el fin de poder resolverla:

$$\frac{x}{2}-2-\frac{6}{x}=x^2-4x-12 \Rightarrow x^2-4x-12=2x^3-8x^2-24x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x^3-9x^2-20x+12=0 \Rightarrow (x+2)(x-6)(2x-1)=0$$

La obtención de las soluciones de esta ecuación de grado tres es inmediata:

$$(x+2)(x-6)(2x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ x-6=0 \\ 2x-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=6 \\ x_3=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Ahora sustituiremos estos tres valores de x en una de las dos ecuaciones del sistema. Lo haremos en la segunda ecuación, $y=x^2-4x-12$. Así:

Para $x_1=-2$ se tiene que:
$y=x^2-4x-12 \Rightarrow y=(-2)^2-4(-2)-12 \Rightarrow y=0$, es decir, una solución es $(x_1,y_1)=(-2,0)$

Para $x_2=6$ se tiene que:
$y=x^2-4x-12 \Rightarrow y=6^2-4\cdot 6-12 \Rightarrow y=0$, es decir, otra solución es $(x_2,y_2)=(6,0)$

Para $x_3=\frac{1}{2}$ se tiene que:
$y=x^2-4x-12 \Rightarrow y=\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)-12 \Rightarrow y=-\frac{55}{4}$, es decir, otra solución es $(x_1,y_1)=\left(\frac{1}{3},-\frac{55}{4}\right)$

***