

POLINOMIOS

1. Calcular el **valor numérico del polinomio** $P(x)$ para el valor de x indicado:

a) $P(x)=x^2+1$, para $x=1$

b) $P(x)=x^3+1$, para $x=-1$

(Soluc: a) 2; b) 0; c) 8; d) -4)

c) $P(x)=x^2+x+2$, para $x=2$

d) $P(x)=-x^2-x-2$, para $x=-2$

2. En cada caso, hallar k para el valor numérico indicado:

a) $P(x)=2x^2-6x-k$, siendo $P(1)=7$

(Soluc: $k=-11$)

b) $P(x)=-2x^4-6x^3+5x-k$, siendo $P(-2)=35$

(Soluc: $k=-29$)

c) $P(x)=-\frac{1}{2}x^6-5x^4+5x^2-k$, siendo $P(-4)=58$

(Soluc: $k=-3306$)

d) $P(x)=-8x^4-\frac{1}{4}x^2-12x+k$, siendo $P(1/2)=125$

(Soluc: $k=2105/16$)

3. Sumar convenientemente **monomios semejantes**:

a) $2x-5x+7x+x=$

b) $3x^2-7x^2+x^2-2x^2=$

c) $2x^2y-3x^2y+5x^2y=$

d) $-3xy^2+xy^2-6xy^2+8xy^2=$

e) $3x^2y^2-xy^2+5x^2y-x^2y^2+2xy^2-x^2y=$

(Soluc: a) $5x$; b) $-5x^2$; c) $4x^2y$; d) 0 ; e) $2x^2y^2+4x^2y+xy^2$; f) $5x^3yz$; g) $\frac{1}{3}ab^2-\frac{9}{2}a^2b$; h) $2xy^3+3x^2y$)

f) $-2x^3yz+3x^3yz+5x^3yz-x^3yz=$

g) $2ab^2-5a^2b-\frac{2}{3}ab^2-ab^2+\frac{1}{2}a^2b=$

h) $-2xy^3+3x^3y+5xy^3-xy^3=$

4. Dados $P(x)=2x^5-3x^4+3x^2-5$ y $Q(x)=x^5+6x^4-4x^3-x+7$, hallar $P(x)+Q(x)$ y $P(x)-Q(x)$

(Soluc: $3x^5+3x^4-4x^3+3x^2-x+2$; $x^5-9x^4+4x^3+3x^2+x-12$)

5. Dados $P(x)=4x^3+6x^2-2x+3$, $Q(x)=2x^3-x+7$ y $R(x)=7x^2-2x+1$, hallar:

a) $P(x)+Q(x)+R(x)$

(Soluc: $6x^3+13x^2-5x+11$)

b) $P(x)-Q(x)-R(x)$

(Soluc: $2x^3-x^2+x-5$)

c) $P(x)+3Q(x)-2R(x)$

(Soluc: $10x^3-8x^2-x+22$)

6. Efectuar los siguientes **productos** en los que intervienen **monomios**, dando el resultado simplificado:

a) $(-2x^3) \cdot \left(\frac{4}{5}x^2\right) \cdot \left(\frac{1}{2}x\right) =$ (Soluc: $-\frac{4}{5}x^6$)

b) $\left(-\frac{5}{7}x^7\right) \cdot \left(\frac{3}{5}x^2\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}x\right) =$ (Soluc: $\frac{4}{7}x^{10}$)

c) $5x^3 \cdot 3x^2y \cdot (-4xz^3) =$ (Soluc: $-60x^6yz^3$)

d) $-3ab^2 \cdot 2ab \cdot \left(-\frac{2}{3}a^2b\right) =$ (Soluc: $4a^4b^4$)

e) $(3x^4-2x^3+2x^2+5) \cdot 2x^2 =$ (Soluc: $6x^6-4x^5+4x^4+10x^2$)

f) $(-2x^5 + 3x^3 - 2x^2 - 7x + 1) \cdot (-3x^3) =$ (Soluc: $6x^8 - 9x^6 + 6x^5 + 21x^4 - 3x^3$)

g) $\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{5}{4}\right) \cdot 12x^2 =$ (Soluc: $8x^5 - 18x^4 + \frac{48}{5}x^3 - 15x^2$)

h) $\left(\frac{1}{2}ab^3 - a^2 + \frac{4}{3}a^2b + 2ab\right) \cdot 6a^2b =$ (Soluc: $3a^3b^4 - 6a^4b + 8a^4b^2 + 12a^3b^2$)

7. Extraer el máximo factor común posible:

a) $4x^2 - 6x + 2x^3$ (Soluc: $2x(x^2 + 2x - 3)$)

b) $12x^4y^2 + 6x^2y^4 - 15x^3y$ (Soluc: $3x^2y(4x^2y + 2y^3 - 5x)$)

c) $-3xy - 2xy^2 - 10x^2yz$ (Soluc: $xy(-3 - 2y - 10xz)$)

d) $-3x + 6x^2 + 12x^3$ (Soluc: $3x(4x^2 + 2x - 1)$)

e) $2ab^2 - 4a^3b + 8a^4b^3$ (Soluc: $2ab(b - 2a^2 + 4a^3b^2)$)

f) $2x^3 + 4x^2 - 8x$ (Soluc: $2x(x^2 + 2x - 4)$)

g) $6x^3y^2 - 3x^2yz + 9xy^3z^2$ (Soluc: $3xy(2x^2y - xz + 3y^2z^2)$)

h) $-2x(x-3)^2 + 4x^2(x-3)$ (Soluc: $2x(x-3)(x+3)$)

8. Efectuar los siguientes **productos**:

a) $(3x^2 + 5x - 6)(8x^2 - 3x + 4) =$ (Soluc: $24x^4 + 31x^3 - 51x^2 + 38x - 24$)

b) $(5x^3 - 4x^2 + x - 2)(x^3 - 7x^2 + 3) =$ (Soluc: $5x^6 - 39x^5 + 29x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 3x - 6$)

c) $(2x^4 - 3x^2 + 5x)(3x^5 - 2x^3 + x - 2) =$ (Soluc: $6x^9 - 13x^7 + 15x^6 + 8x^5 - 14x^4 - 3x^3 + 11x^2 - 10x$)

d) $(ab^2 + a^2b + ab)(ab - ab^2) =$ (Soluc: $a^3b^2 + a^2b^2 - a^2b^4 - a^3b^3$)

e) $(-x^6 + x^5 - 2x^3 + 7)(x^2 - x + 1) =$ (Soluc: $-x^8 + 2x^7 - 2x^6 - x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 7x + 7$)

f) $(x^2y^2 - 2xy)(2xy + 4) =$ (Soluc: $2x^3y^3 - 8xy$)

g) $10(x - 5 + y - 5) + (10 - x)(10 - y) =$ (Soluc: xy)

h) $(x^2 - 4x + 3/2)(x + 2) =$ (Soluc: $x^3 - 2x^2 - 13x/2 + 3$)

i) $(x^2 + 5x/2 + 35/3)(x - 6) =$ (Soluc: $x^3 - 7x^2/2 - 10x/3 - 70$)

j) $(2x^2 + 4x + 2)(x - 1/2) =$ (Soluc: $2x^3 + 3x^2 - 1$)

9. Efectuar las siguientes **operaciones combinadas**:

a) $(2x^2 + x + 3/2)(2x^2 - 3) + 8x + 7/2 =$ (Soluc: $4x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$)

b) $(3x^3 + 5x^2/2 - 3x + 13)(2x^2 + 2) - (-6x + 24) =$ (Soluc: $6x^5 + 5x^4 + 31x^2 + 2$)

c) $(3x^2 - 6x + 1)(x^3 - 2x/3 + 2) + 14x/3 =$ (Soluc: $3x^5 - 6x^4 - x^3 + 10x^2 - 8x + 2$)

d) $-x/3 + 1/3 + (2x^2 - x/3 - 2/3)(3x^2 + 2) =$ (Soluc: $6x^4 - x^3 + 2x^2 - x - 1$)

10. Dados los polinomios del ejercicio 5, hallar:

a) $[R(x)]^2$ b) $P(x) \cdot Q(x) \cdot R(x)$ c) $P(x) \cdot [Q(x) + R(x)]$ d) $P(x) \cdot Q(x) \cdot R(x)$

(Soluc: a) $49x^4 - 28x^3 + 18x^2 - 4x + 1$; b) $-14x^5 + 4x^4 + 9x^3 - 45x^2 + 13x - 4$; c) $8x^6 + 40x^5 + 26x^4 + 6x^3 + 75x^2 - 25x + 24$
d) $56x^8 + 68x^7 - 72x^6 + 224x^5 + 244x^4 - 179x^3 + 225x^2 - 59x + 21$)


11. Desarrollar, aplicando las **igualdades notables**:

a) $(x+2)^2 =$	h) $(x^3-2)^2 =$	n) $\left(2a - \frac{3}{2}\right)^2 =$	s) $\left(\frac{3x}{2} - \frac{1}{x}\right)^2 =$
b) $(x-3)^2 =$	i) $(x^2-1)(x^2+1) =$	o) $\left(1 + \frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{2}\right) =$	t) $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3}\right)\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}\right) =$
c) $(x+2)(x-2) =$	j) $(2x^2+3x)^2 =$	p) $\left(2x + \frac{3}{4}\right)^2 =$	u) $\left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\right)^2 =$
d) $(3x+2)^2 =$	k) $(2x^2-3)^2 =$	q) $\left(\frac{3}{2} - \frac{x}{4}\right)^2 =$	
e) $(2x-3)^2 =$	l) $(-x-3)^2 =$	r) $\left(2 + \frac{a}{3}\right)\left(-\frac{a}{3} + 2\right) =$	
f) $(5x+4)(5x-4) =$	m) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 =$		
g) $(x^2+5)^2 =$			

(Soluc: m) $x^2 + x + \frac{1}{4}$; n) $4a^2 - 6a + \frac{9}{4}$; o) $1 - \frac{x^2}{4}$; p) $4x^2 + 3x + \frac{9}{16}$; q) $\frac{9}{4} - \frac{3x}{4} + \frac{x^2}{16}$; r) $4 - \frac{a^2}{9}$;
s) $\frac{9}{4}x^2 - 3 + \frac{1}{x^2}$; t) $\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{9}$; u) $\frac{9}{4}x^2 + \frac{3x}{4} + \frac{1}{16}$)

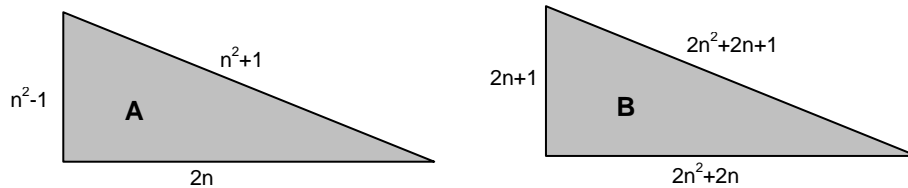
12. Operar y simplificar:

a) $(x+1)^2 + (x-2)(x+2) =$	e) $-3x + x(2x-5)(2x+5) - (1-x^2)^2 =$
b) $(3x-1)^2 - (2x+5)(2x-5) =$	f) $(3x-1)^2 - (-5x^2-3x)^2 - (-x+2x^2)(2x^2+x) =$
c) $(2x+3)(-3+2x) - (x+1)^2 =$	
d) $(-x+2)^2 - (2x+1)^2 - (x+1)(x-1) =$	

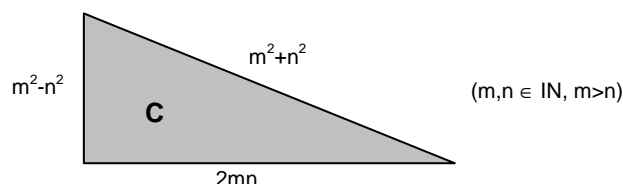
 Ejercicios libro: **pág. 42: 34**

(Soluc: a) $2x^2 + 2x - 3$; b) $5x^2 - 6x + 26$; c) $3x^2 - 2x - 10$; d) $-4x^2 - 4x + 4$; e) $-x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 28x - 1$; f) $-29x^4 - 30x^3 + x^2 - 6x + 1$)

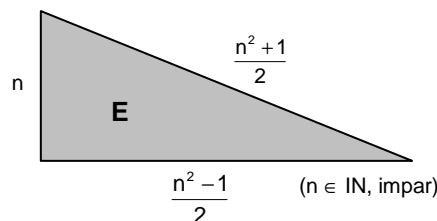
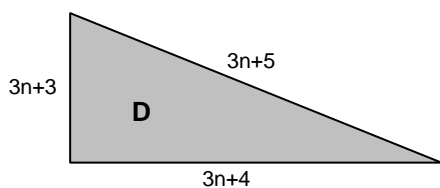
13. El matemático griego Pitágoras conocía las dos siguientes posibles formas de construir un triángulo rectángulo con sus tres lados de longitud entera, llamadas **ternas pitagóricas**, sin más que dar valores a $n \in \mathbb{N}$:



Por su parte, Euclides conocía la siguiente fórmula general, que engloba a las dos anteriores:



Finalmente, he aquí otras dos ternas pitagóricas de autor desconocido:



Demostrar la veracidad de estas fórmulas. Generar algunos casos concretos.

14. Demostrar que $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$

15. Desarrollar, aplicando el **triángulo de Tartaglia**:

- | | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $(x+2)^4$ | g) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^5$ | m) $(2x^2-4)^4$ | r) $\left(\frac{x}{2}-3\right)^6$ |
| b) $(x^2+3)^6$ | h) $(a-b)^5$ | n) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^5$ | s) $(-x-1)^4$ |
| c) $(2x^2+3y)^6$ | i) $(x-3)^3$ | o) $(2-3x^2)^5$ | t) $(2x-1)^5$ |
| d) $(2x^3+5)^5$ | j) $(3x-2)^4$ | p) $\left(2x-\frac{1}{3}\right)^4$ | Ejercicio libro: pág. 32: 10c |
| e) $(2x^4+5x)^5$ | k) $(x^2-3x)^5$ | q) $(2x-3)^6$ | |
| f) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$ | l) $(3x-2y)^6$ | | |

(Sol: a) $x^4+8x^3+24x^2+32x+16$; b) $x^{12}+18x^{10}+135x^8+540x^6+1215x^4+1458x^2+729$;
 c) $64x^{12}+576x^{10}y+2160x^8y^2+4320x^6y^3+4860x^4y^4+2916x^2y^5+729y^6$; d) $32x^{15}+400x^{12}+2000x^9+5000x^6+6250x^3+3125$;
 e) $32x^{20}+400x^{17}+2000x^{14}+5000x^{11}+6250x^8+3125x^5$; f) $x^4+4x^2+6+4/x^2+1/x^4$; g) $x^5+5x^4/2+5x^3/2+5x^2/4+5x/16+1/32$;
 h) $a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$; i) $x^3-9x^2+27x-27$; j) $81x^4-216x^3+216x^2-96x+16$;
 k) $x^{10}-15x^9+90x^8-270x^7+405x^6-243x^5$; l) $729x^6-2916x^5y+4860x^4y^2-4320x^3y^3+2160x^2y^4-576xy^5+64y^6$;
 m) $16x^8-128x^6+384x^4-512x^2+256$; n) $x^5-5x^4/2+5x^3/2-5x^2/4+5x/16-1/32$; p) $16x^4-32x^3/3+8x^2/3-8x/27+1/81$;
 r) $x^6/64-9x^5/16+134x^4/16-135x^3/2+1215x^2/4-729x+729$)

16. Efectuar los siguientes **cocientes** en los que intervienen **monomios**, dando el resultado simplificado:

- | | | | |
|---------------------------|-----------------------------------|--|--------------------------------------|
| a) $\frac{4x^3}{2x^2} =$ | e) $\frac{-3x^7}{-9x^4} =$ | i) $\frac{-12x^4+6x^3-4x^2}{-2x^2} =$ | m) $\frac{-3a(a^3b)+5a^4b}{-a^2b} =$ |
| b) $\frac{8x^4}{-2x^2} =$ | f) $\frac{6x^3y^4}{2x^2y} =$ | j) $\frac{-6x^8-7x^4-\frac{3}{4}x^3}{-\frac{5}{3}x^3} =$ | n) $\frac{-3xy^2(-2x^3y)}{4x^2y} =$ |
| c) $\frac{7x^5}{2x^3} =$ | g) $\frac{-9a^4b^3c^2}{3ab^2c} =$ | k) $\frac{-8x^9+\frac{3}{2}x^5-x^4}{-\frac{3}{7}x^4} =$ | |
| d) $\frac{-8x^3}{2x^2} =$ | h) $\frac{6x^5-9x^2+3x}{3x} =$ | l) $(-18x^3yz^3):(6xyz^3)=$ | |

(Soluc: h) $2x^4-3x+1$; i) $6x^2-3x+2$; j) $18x^6/5+21x/5+9/20$; k) $56x^6/3-7x/2+7/3$; l) $-3x^2$; m) $-2a^2$; n) $3x^2y^2/2$)

17. Efectuar los siguientes **cocientes**, indicando claramente el cociente $C(x)$ y el resto $R(x)$, y comprobar el resultado mediante la regla $D=d\cdot C+R$:

- a) $x^4 - x^3 + 7x^2 + x + 15 \mid x^2 + 2$ (Soluc: $C(x) = x^2 - x + 5$; $R(x) = 3x + 5$)
- b) $2x^5 - x^3 + 2x^2 - 3x - 3 \mid 2x^2 - 3$ (Soluc: $C(x) = x^3 + x + 1$; División exacta)
- c) $6x^4 - 10x^3 + x^2 + 11x - 6 \mid 2x^2 - 4x + 3$ (Soluc: $C(x) = 3x^2 + x - 2$; División exacta)
- d) $x^3 + 2x^2 + x - 1 \mid x^2 - 1$ (Soluc: $C(x) = x + 2$; $R(x) = 2x + 1$)
- e) $8x^5 - 16x^4 + 20x^3 - 11x^2 + 3x + 2 \mid 2x^2 - 3x + 2$ (Soluc: $C(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x + 1$; División exacta)
- f) $x^4 + 3x^3 - 2x + 5 \mid x^3 + 2$ (Soluc: $C(x) = x + 3$; $R(x) = -4x - 1$)
- g) $x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 6 \mid x^4 + 1$ (Soluc: $C(x) = x - 2$; $R(x) = 3x^2 - x - 4$)
- h) $x^2 \mid x^2 + 1$ (Soluc: $C(x) = 1$; $R(x) = -1$)
- i) $3x^6 + 2x^4 - 3x^2 + 5 \mid x^3 - 2x + 4$ (Soluc: $C(x) = 3x^3 + 8x - 12$; $R(x) = 13x^2 - 56x + 53$)
- j) $x^8 \mid x^2 + 1$ (Soluc: $C(x) = x^6 - x^4 + x^2 - 1$; $R(x) = 1$)
- k) $x^3 - 4x^2 + 5x - 8 \mid x - 2$ (Soluc: $C(x) = x^2 - 2x + 1$; $R = -6$)
- l) $2x^5 + 3x^2 - 6 \mid x + 3$ (Soluc: $C(x) = 2x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 51x + 153$; $R(x) = -465$)
- m) $x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 2 \mid x - 1$ (Soluc: $C(x) = x^3 - 6x^2 + 2x + 2$; División exacta)
- n) $3x^5 - x^4 + 8x^2 - 5x - 2 \mid x^2 - x + 1$ (Soluc: $C(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 5$; $R(x) = x - 7$)
- o) $5x^4 - 2x^3 + x - 7 \mid x^2 - 1$ (Soluc: $C(x) = 5x^2 - 2x + 5$; $R(x) = -x - 2$)
- p) $4x^5 - 3x^3 + 5x^2 - 7 \mid 2x^2 - 3x + 5$ (Soluc: $C(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 8$; $R(x) = -14x + 33$)
- q) $9x^3 + 3x^2 - 7x + 2 \mid 3x^2 + 5$ (Soluc: $C(x) = 3x + 1$; $R(x) = -22x - 3$)
- r) $4x^4 - 3x^2 + 5x - 7 \mid 2x^2 + x - 3$ (Soluc: $C(x) = 2x^2 - x + 2$; $R(x) = -1$)
- s) $4x^5 + 3x^3 - 2x^2 + 5 \mid 2x^2 - x + 3$ (Soluc: $C(x) = 2x^3 + x^2 - x - 3$; $R(x) = 14$)
- t) $6x^4 + 5x^2 - 3x + 8 \mid 3x^3 - 2x - 3$ (Soluc: $C(x) = 2x$; $R(x) = 9x^2 + 3x + 8$)
- u) $4x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1 \mid 2x^2 - 3$ (Soluc: $C(x) = 2x^2 + x + 3/2$; $R(x) = 8x + 7/2$)
- v) $8x^4 + 3x^3 + 2x - 2 \mid 4x^2 + x - 3$ (Soluc: $C(x) = 2x^2 + x/4 + 23/16$; $R(x) = 21x/16 + 37/16$)
- w) $2x^5 - x^3 + 3x - 9 \mid 2x^2 - x + 2$ (Soluc: $C(x) = x^3 + x^2/2 - 5x/4 - 9/8$; $R(x) = 35x/8 - 27/4$)
- x) $6x^3 - 3x^2 + 2x - 5 \mid 3x - 2$ (Soluc: $C(x) = 2x^2 + x/3 + 8/9$; $R(x) = -29/9$)
- y) $4x^4 - x^3 + x + 5 \mid 2x^2 - x + 3$ (Soluc: $C(x) = 2x^2 + x/2 - 11/4$; $R(x) = -13x/4 + 53/4$)
- z) $6x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 8 \mid 3x^2 - 5x + 2$ (Soluc: $C(x) = 2x^2 + 13x/3 + 38/9$; $R(x) = 121x/9 - 148/9$)
- α) $8x^4 - 3x^2 + 7x - 5 \mid 4x^2 - 3x + 2$ (Soluc: $C(x) = 2x^2 + 3x/2 - 5/8$; $R(x) = 17x/8 - 15/4$)
- β) $6x^5 + 5x^4 + 31x^2 + 2 \mid 2x^2 + 2$ (Soluc: $C(x) = 3x^3 + 5x^2/2 - 3x + 13$; $R(x) = 6x - 24$)
- γ) $3x^5 - 6x^4 - x^3 + 10x^2 - 8x + 2 \mid 3x^2 - 6x + 1$ (Soluc: $C(x) = x^3 - 2x/3 + 2$; $R(x) = 14x/3$)
- δ) $6x^4 - x^3 + 2x^2 - x - 1 \mid 3x^2 + 2$ (Soluc: $C(x) = 2x^2 - x/3 - 2/3$; $R(x) = -x/3 + 1/3$)
- ε) $4x^4 \mid 2x^2 - 1$ (Soluc: $C(x) = 2x^2 + 1$; $R(x) = 1$)
- ζ) $4x^4 + x^3 - x + 1 \mid 2x^2 - 1$ (Soluc: $C(x) = 2x^2 + x/2 + 1$; $R(x) = -x/2 + 2$)

18. Inventar una división de polinomios cuyo cociente sea $C(x)=x^2-3x+1$, el resto sea $R(x)=x-1$ y el dividendo un polinomio de 4º grado.

19. Efectuar las siguientes divisiones mediante la **regla de Ruffini**, indicando claramente el cociente $C(x)$ y el resto $R(x)$, y comprobar el resultado:

- a) $x^4-7x^3+8x^2-2 \mid x-1$ (Soluc: $C(x)=x^3-6x^2+2x+2$; División exacta)
- b) $x^3-4x^2+5x-8 \mid x-2$ (Soluc: $C(x)=x^2-2x+1$; $R=-6$)
- c) $2x^4+3x^3-4x^2+x-18 \mid x-2$ (Soluc: $C(x)=2x^3+7x^2+10x+21$; $R=24$)
- d) $2x^5+3x^2-6 \mid x+3$ (Soluc: $C(x)=2x^4-6x^3+18x^2-51x+153$; $R=-465$)
- e) $3x^4-10x^3-x^2-20x+5 \mid x-4$ (Soluc: $C(x)=3x^3+2x^2+7x+8$; $R=37$)
- f) $2x^4-10x+8 \mid x+2$ (Soluc: $C(x)=2x^3-4x^2+8x-26$; $R=60$)
- g) $10x^3-15 \mid x+5$ (Soluc: $C(x)=10x^2-50x+250$; $R=-1265$)
- h) $x^3-2x^2-13x/2+3 \mid x+2$ (Soluc: $C(x)=x^2-4x+3/2$; División exacta)
- i) $x^3-7x^2/2-10x/3-70 \mid x-6$ (Soluc: $C(x)=x^2+5x/2+35/3$; División exacta)
- j) $x^4-2x^3/3+x^2/2+3x+1 \mid x+3$ (Soluc: $C(x)=x^3-\frac{11}{3}x^2+\frac{23}{2}x-\frac{63}{2}$; $R(x)=\frac{191}{2}$)
- k) $x^3+2x^2+3x+1 \mid x-1$ (Soluc: $C(x)=x^2+3x+6$; $R=7$)
- l) $x^4-2x^3+x^2+3x+1 \mid x-2$ (Soluc: $C(x)=x^3+x+5$; $R=11$)
- m) $x^3+x^2+x+1 \mid x+1$ (Soluc: $C(x)=x^2+1$; División exacta)
- n) $2x^4+x^3-2x^2-1 \mid x+2$ (Soluc: $C(x)=2x^3-3x^2+4x-8$; $R=15$)
- o) $2x^4-7x^3+4x^2-5x+6 \mid x-3$ (Soluc: $C(x)=2x^3-x^2+x-2$; División exacta)
- p) $x^5+1 \mid x-1$ (Soluc: $C(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$; $R=2$)
- q) $2x^3+3x^2-1 \mid x-1/2$ (Soluc: $C(x)=2x^2+4x+2$; División exacta)
- r) $3x^3+2x^2+2x-1 \mid x-1/3$ (Soluc: $C(x)=3x^2+3x+3$; División exacta)
- s) $x^4+x^3-x^2+x-1 \mid x+2$ (Soluc: $C(x)=x^3-x^2+x-1$; $R=1$)
- t) $2x^3-x^2-x-3 \mid 2x-3$ (Soluc: $C(x)=x^2+x+1$; División exacta)
- (Ayuda: Dividir entre 2 ambos términos)
- u) $ax^3-3a^2x^2+2a^3x+1 \mid x-a$ (Soluc: $C(x)=ax^2-2a^2x$; $R=1$)

RECORDAR:

TEOREMA DEL RESTO: "El resto de la división de $P(x)$ por $x-a$ coincide con el valor numérico $P(a)$ "

Ejemplo: Al efectuar la división de $P(x)=x^2+x-2$ entre $x-1$ se obtiene resto cero, como cabía esperar, puesto que $P(1)=0$

Utilidad: El th. del resto permite predecir, sin necesidad de efectuar la división, si se trata de una división exacta.

20. Comprobar el **teorema del resto** mediante las divisiones anteriores.

21. Dado $P(x)=2x^2-x-3$, comprobar si es divisible por $x+1$ o por $x-2$ mediante el teorema del resto. Comprobar a continuación efectuando la división ¿Cuál es el otro factor por el que es divisible?
(Soluc: Sí; NO; $2x-3$)

22. Determinar, aplicando el teorema del resto, el valor de **a** para que el resto de la división $-x^5+3x^4+ax^3+9x^2+2x-7 \overline{)x-3}$ sea -1; comprobar, a continuación, el resultado obtenido haciendo la división. (Soluc: $a=-3$)

23. Averiguar, sin efectuar la división, cuáles de las siguientes divisiones son exactas:

a) $x^3-3x^2+2x-10 \overline{)x-4}$ (Soluc: NO)

c) $x^6-1 \overline{)x-1}$ (Soluc: Sí)

b) $x^3-x^2+x+14 \overline{)x+2}$ (Soluc: Sí)

d) $x^5-3x^3+2x \overline{)x-4}$ (Soluc: NO)

24. Hallar, de dos formas distintas, el valor de **m** en cada caso para que las siguientes divisiones sean exactas:

a) $x^3+8x^2+4x+m \overline{)x+4}$ (Soluc: $m=-48$)

e) $x^2+4x-m \overline{)x+3}$ (Soluc: $m=-3$)

b) $2x^3-10x^2+mx+25 \overline{)x-5}$ (Soluc: $m=-5$)

f) $x^3-5x^2+m \overline{)x-1}$ (Soluc: $m=4$)

c) $2x^4+mx^3-4x^2+40 \overline{)x-2}$ (Soluc: $m=-7$)

g) $5x^4+2x^2+mx+1 \overline{)x-3}$ (Soluc: $m=-424/3$)

d) $mx^2-3x-744 \overline{)x-8}$ (Soluc: $m=12$)

h) $x^5-4x^3+mx^2-10 \overline{)x+1}$ (Soluc: $m=7$)

RECORDAR:

TEOREMA DEL FACTOR: "P(x) es divisible por x-a (o dicho de otra forma, P(x) contiene el factor x-a) si se cumple que P(a)=0"

Ejemplo: Dado $P(x)=x^2+x-2$, como $P(1)=0$, podemos asegurar que P(x) es divisible por x-1

De hecho, puede comprobarse que al factorizarlo se obtiene $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

(Nótese que el th. del factor es a la división polinómica lo que los criterios de divisibilidad eran a la división numérica)

25. Comprobar, sin efectuar la división, que $x^{99}+1 \overline{)x+1}$ es exacta. (Soluc: Al hacer $P(-1)$, sale 0)

26. Comprobar que x^2-2x-3 es divisible por x-3 sin efectuar la división. Comprobar el resultado obtenido haciendo la división. ¿Por qué otro factor es divisible? (Soluc: $P(x)=(x-3)(x+1)$)

27. Estudiar si $P(x)=x^2+x-2$ es divisible por x+2 y/o por x-3, sin efectuar la división. Comprobar el resultado obtenido haciendo la división. ¿Por qué otro factor es divisible? (Soluc: divisible por x+2 pero no por x-3)

28. Estudiar si $P(x)=x^5-32$ es divisible por x-2 sin efectuar la división (Comprobar el resultado obtenido haciendo la división). (Soluc: Sí es divisible)

29. Sin necesidad de efectuar la división, ¿podemos asegurar que el polinomio $P(x)=x^{50}+x^{25}-x-1$ es divisible por x-1? ¿Por qué?

30. **TEORÍA:** Razonar, mediante ejemplos, que el teorema del factor viene a ser a la división polinómica lo que los criterios de divisibilidad eran a la división numérica

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS:

31. Dados los siguientes polinomios cuadráticos se pide:

- i) Obtener sus raíces y comprobarlas.
- ii) A partir de las raíces anteriores, factorizarlos.
- iii) Comprobar dicha factorización.

a) x^2-5x+6 b) x^2-2x-8 c) x^2-6x+9 d) $4x^2+23x-6$ e) x^2+x+1 f) $6x^2-7x+2$

32. Dados los siguientes polinomios se pide: **i)** Obtener sus raíces por Ruffini. **ii)** Comprobar dichas raíces sustituyéndolas en P(x) **iii)** Factorizar P(x) a partir de sus raíces y comprobar dicha factorización:

- | | | | |
|--------------------------------|-----------------------------|-------------------------------|----------------------------------|
| a) $P(x)=x^3-4x^2+x+6$ | (Soluc: $x=-1,2,3$) | d) $P(x)=x^4-2x^2+1$ | (Soluc: $x=-1$ doble, 1 doble) |
| b) $P(x)=x^4-8x^3+17x^2+2x-24$ | (Soluc: $x=-1,2,3,4$) | e) $P(x)=6x^4+x^3-25x^2-4x+4$ | (Soluc: $x=\pm 2, -1/2, 1/3$) |
| c) $P(x)=x^3+x^2-5x+3$ | (Soluc: $x=1$ doble, -3) | | |

33. Sabiendo que una de sus raíces es $x=1/2$, factorizar $P(x)=2x^4-3x^3+3x^2-3x+1$

34. Dadas las siguientes ecuaciones polinómicas se pide:

- i)** Resolverlas por Ruffini.
ii) Comprobar las soluciones obtenidas sustituyéndolas en la ecuación.
iii) A partir de sus raíces, factorizar el polinomio y comprobar dicha factorización.

- a) $x^3-6x^2+11x-6=0$ (Soluc: $x=1,2,3$)
b) $x^3+x^2-9x-9=0$ (Soluc: $x=-1,-3,3$)
c) $x^4-2x^3-17x^2+18x+72=0$ (Soluc: $x=-2, \pm 3, 4$)
d) $x^4-x^3-13x^2+25x-12=0$ (Soluc: $x=-4, 1$ doble, 3)
e) $x^4-x^3+2x^2+4x-8=0$ (Soluc: carece de raíces $\in \mathbb{Q}$)
f) $3x^3+x^2-8x+4=0$ (Soluc: $x=-2, 1, 2/3$)
g) $x^5-3x^4-5x^3+15x^2+4x-12=0$ (Soluc: $x=\pm 1, \pm 2, 3$)
h) $x^4-5x^2+4=0$ (Soluc: $x=\pm 1, \pm 2$) (También se puede hacer por ecuación bicuadrada)
i) $x^4+2x^3-5x^2-6x=0$ (Soluc: $x=-3,-1,0,2$)
j) $x^4+2x^3-7x^2-8x+12=0$ (Soluc: $x=1, \pm 2, -3$)
k) $x^3-5x^2-5x-6=0$ (Soluc: $x=6$)
l) $x^5-2x^4-x+2=0$ (Soluc: $x=\pm 1, 2$)
m) $x^4-6x^3+11x^2-6x=0$ (Soluc: $x=0, 1, 2, 3$)
n) $6x^4+11x^3-28x^2-15x+18=0$ (Soluc: $x=-1, -3, 2/3, 3/2$)
o) $x^3+3x^2-10x-24=0$ (Soluc: $x=-4,-2,3$)
p) $x^3+2x^2-15x-36=0$ (Soluc: $x=-3$ doble, 4)
q) $x^3-3x^2+3x-1=0$ (Soluc: $x=1$ triple)

35. Dados los siguientes polinomios, se pide:

- i)** Obtener sus raíces por Ruffini.
ii) Comprobar dichas raíces sustituyéndolas en P(x)
iii) Factorizar P(x) a partir de sus raíces y comprobar dicha factorización.

- a) $P(x)=x^4+4x^3+7x^2+8x+4$ (Soluc: $x=-2,-1$)
b) $P(x)=6x^3+7x^2-9x+2$ (Soluc: $x=-2, 1/2, 1/3$)
c) $P(x)=x^4-x^3+2x^2-4x-8$ (Soluc: $x=-1, 2$)
d) $P(x)=x^4-5x^3+5x^2+5x-6$ (Soluc: $x=2, 3, \pm 1$)
e) $P(x)=x^4-3x^3+5x^2-9x+6$ (Soluc: $x=1, 2$)
f) $P(x)=x^4-5x^2+4$ (También se puede hacer por ecuación bicuadrada)
g) $P(x)=x^4-5x^2-36$ (También se puede hacer por ecuación bicuadrada)
h) $P(x)=x^4-2x^3-2x^2-2x-3$ (Soluc: $x=-1, 3$)
i) $P(x)=x^4-6x^2+7x-6$ (Soluc: $x=2,-3$)
j) $P(x)=x^4-3x^3-3x^2+7x+6$ (Soluc: $x=-1$ doble, $2, 3$)

- k) $P(x)=12x^4-25x^3+25x-12$ (Soluc: $x=\pm 1, 4/3, 3/4$)
 l) $P(x)=2x^4-x^3+6x^2-7x$ (Soluc: $x=0, 1$)
 m) $P(x)=x^4-x^3-x^2-x-2$ (Soluc: $x=1$)
 n) $P(x)=x^5-x^3-x^2+1$ (Soluc: $x=\pm 1$)
 o) $P(x)=x^4-2x^3-7x^2+5x-6$ (Soluc: carece de raíces $\in \mathbb{Q}$)
 p) $P(x)=3x^4-9x^3-6x^2+36x-24$ (Soluc: $x=1, 2$ doble, -2)
 q) $P(x)=6x^4+11x^3-13x^2-16x+12$ (Soluc: $x=1, -2, 2/3, -3/2$)
 r) $P(x)=x^6+6x^5+9x^4-x^2-6x-9$ (Soluc: $x=\pm 1, -3$ doble)

CONSECUENCIA:

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA: "Un polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales"

36. Resolver la ecuación $2x^3 - 3x^2 = -\frac{1}{2}$, sabiendo que una de sus raíces es $1/2$ (Soluc: $x=\pm 1/2, 3/2$)
37. Resolver la ecuación $\sqrt[3]{x-2}=x$ (Sol: $x=2$)
38. ¿Serías capaz de resolver la ecuación $\sqrt[3]{x} = 2\sqrt{x} - 1$? Aunque es un poco complicada para este curso, puedes resolverla con los conocimientos ya adquiridos: tendrás que aplicar binomio de Newton y Ruffini... (Sol: $x=1$)
39. Resolver: a) $\left. \begin{array}{l} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \\ y - x^2 = 1 \end{array} \right\}$ (Soluc: $x=1, y=2$) b) $\left. \begin{array}{l} y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \\ y = \sqrt{x^3} \end{array} \right\}$ (Soluc: $x=1; y=1$)
40. Inventar una ecuación polinómica que tenga únicamente por soluciones $x=-2, x=1$ y $x=3$
41. Inventar, de dos formas distintas, una ecuación polinómica que tenga únicamente como raíces 1 y 2
42. Determinar el polinomio de grado 3 que verifica: $P(-1)=P(2)=P(-3)=0$ y $P(-2)=18$
43. Un polinomio de grado 3, ¿cuántas raíces puede tener como mínimo? Razonar la respuesta. (Soluc: 1 raíz)