

Progresiones aritméticas

Definición

Una sucesión de números se dice que es una **progresión aritmética** cuando cada término se obtiene sumando al anterior un número fijo, llamado **diferencia** de la progresión. Por tanto, en una progresión aritmética, la diferencia entre dos términos consecutivos siempre es la misma. En consecuencia, una progresión aritmética queda determinada dando cualquier término y la diferencia.

En general, si el primer término es a_1 y la diferencia d , la progresión aritmética es:

$$\begin{aligned} a_1 & & a_2 = a_1 + d & & a_3 = a_2 + d & & a_4 = a_3 + d & & \dots & & a_n = a_{n-1} + d \\ & & a_2 = a_1 + d & & a_3 = a_1 + 2d & & a_4 = a_1 + 3d & & \dots & & a_n = a_1 + (n-1)d \end{aligned}$$

- El **término general** de una progresión aritmética es: $a_n = a_1 + (n-1)d$

Ejemplo:

□ La sucesión 1,5, 2, 2,5, 3, 3,5, ... es una progresión aritmética de diferencia $d = 0,5$.

Su término general será: $a_n = 1,5 + (n-1) \cdot 0,5 \Leftrightarrow$

Con esto, por ejemplo: $a_{35} = 1 + 0,5 \cdot 35 = 18,5$;

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 0,5n \\ a_{100} &= 1 + 0,5 \cdot 100 = 51 \end{aligned}$$

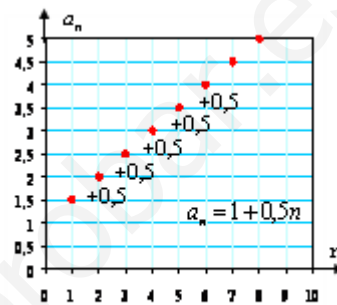


Fig. 12.4. Progresión aritmética de diferencia 0,5

EJERCICIO DE APLICACIÓN

5. Halla el término general de las siguientes progresiones aritméticas:

- a) 4, 4,3, 4,6, 4,9, ..., b) 1, 11, 21, 31, ... c) 100, 98, 96, ...

Cuál es, en cada caso, el término octogésimo quinto.

Solución:

- a) El primer término es 4 y la diferencia $d = 0,3$, luego: $a_n = 4 + (n-1) \cdot 0,3 = 0,3n + 3,7$.

El valor del término pedido es $a_{85} = 0,3 \cdot 85 + 3,7 = 29,2$

- b) El primer término es 1 y la diferencia $d = 10$, luego: $a_n = 1 + (n-1) \cdot 10 = 10n - 9$.

Por tanto, $a_{85} = 10 \cdot 85 - 9 = 841$

- c) El primer término es 100 y la diferencia $d = -2$, luego: $a_n = 100 + (n-1) \cdot (-2) = 102 - 2n$.

De donde $a_{85} = 102 - 2 \cdot 85 = -68$

Resuelve tú

5. Halla el término general de las siguientes progresiones aritméticas:

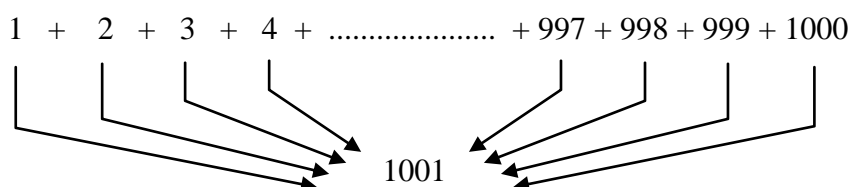
- a) -8, -5, -2, 1, ..., b) 3, 9, 15, 21, ... c) 1/2, 1, 3/2, 2, ...

Para cada caso halla el término vigésimo séptimo.

[sol] a) ; 70; b) ; 159; c) 0,5n; 13,5

Suma de términos consecutivos de una progresión aritmética

Para obtener la suma de n términos consecutivos de una progresión aritmética basta observar que las sumas de los términos, primero + último, segundo + penúltimo, ..., siempre vale lo mismo. Por ejemplo:



Como cada par de números suma 1001 y hay 500 parejas (la mitad de los términos que se suman), la suma total, vale $1001 \cdot 500 = 500500$.

La fórmula general que da la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética es

$$S = [a_1 + (a_1 + (n-1)d)] \frac{n}{2} \Rightarrow \boxed{S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}}$$

Ejemplo:

□ La progresión 1, 7, 13, 19, ... es aritmética de diferencia 6. La suma de sus 200 primeros términos, $1 + 7 + 13 + \dots + a_{200}$, vale, $S = \frac{(a_1 + a_{200}) \cdot 200}{2}$.

Como $a_1 = 1$ y $a_{200} = 1 + 199 \cdot 6 = 1195$, se obtiene: $S = \frac{(1 + 1195) \cdot 200}{2} = 119600$.

EJERCICIO DE APLICACIÓN

6. Halla las siguientes sumas:

a) $3 + 7 + 11 + \dots$ (150 términos) b) $1 + 3 + 5 + 7 + \dots$ (1000 términos)

Solución:

a) Es una progresión aritmética de diferencia 4.

Como $a_1 = 3$ y $a_{150} = 3 + 149 \cdot 4 = 599$, se tiene que: $S = \frac{(3 + 599) \cdot 150}{2} = 45150$.

b) Es la suma de los mil primeros números impares; progresión de diferencia 2, con $a_1 = 1$ y

$a_{1000} = 1999$. Luego, $S = \frac{(1 + 1999) \cdot 1000}{2} = 1000000$. (Puedes completar este resultado

viendo el Problema Resuelto n)

Resuelve tú

6. Halla las siguientes sumas:

a) $3 + 3,5 + 4 + 4,5 + \dots$ (175 términos) b) $70 + 67 + 64 + \dots$ (100 términos)

[sol] a) 8137,5; b) -16150
