FUNCIONES

1. Funciones y sus gráficas

Función es una relación entre dos variables a las que, en general se les llama x e y.

- x es la **variable independiente**.
- y es la **variable dependiente**.

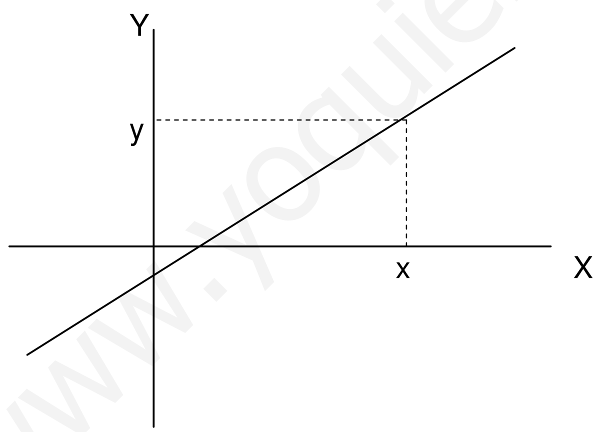
La función asocia a **cada valor de x** un **único valor de y**.
Se dice que y es función de x.

Las funciones sirven para describir fenómenos físicos, económicos, biológicos o simplemente, para expresar relaciones matemáticas.
Por ejemplo:

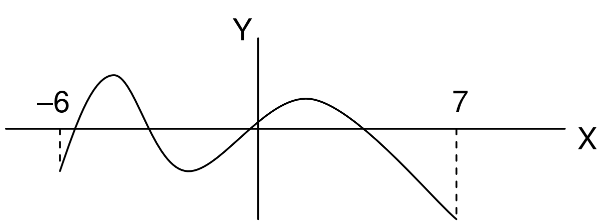
- El *espacio recorrido* por un móvil al pasar el *tiempo*. El espacio es función del tiempo.
- La *temperatura* del aire al variar la *altura*. La temperatura es función de la altura.
- El *área* de un cuadrado al variar la *longitud de su lado*. El área es función del lado.

Representación gráfica para visualizar el comportamiento de una función se recurre a su representación gráfica:

- Sobre uno ejes cartesianos se representan las dos variables:
  - La x (variable independiente) sobre el eje de abscisas (horizontal).
  - La y (variable dependiente) sobre el eje de ordenadas (vertical).
- Cada punto de la gráfica tiene dos coordenadas, su abscisa x y su ordenada y.



Dominio de definición de una función es el tramo de valores de x para los cuales hay valores de y.



Dominio: [–6, 7]

2. Variaciones de una función

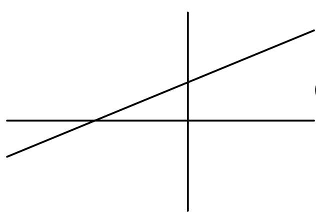
Crecimiento y decrecimiento

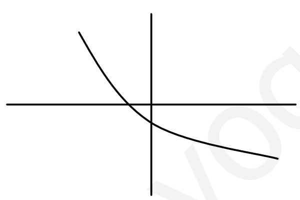
Para estudiar las variaciones de una función hemos de mirar su gráfica de izquierda a derecha, es decir ver cómo varía la y cuando x aumenta.

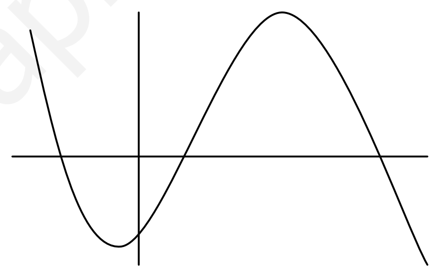
- Una función es **creciente** cuando al aumentar la variable independiente, x, aumenta la variable dependiente, y.
- Una función es **decreciente** cuando al aumentar la variable independiente, x, disminuye la variable dependiente, y.
- También existen funciones que tienen tramos crecientes y decrecientes.

Máximos y mínimos

- Una función tiene un **máximo** en un punto cuando su ordenada es mayor que la ordenada de los puntos que lo rodean.
  A la izquierda del máximo, la función es creciente, y a su derecha, decreciente.
- Una función tiene un **mínimo** en un punto cuando su ordenada es menor que la de los puntos que lo rodean.
  A la izquierda del mínimo, la función es decreciente, y a su derecha creciente.


Creciente


Decreciente



Máximo: (8, 8); Mínimo: (–1, –5)

Intervalos de Crecimiento: (–1, 8)
Intervalos de Decrecimiento: (–∞,–1) U (8, ∞)

3. Tendencias de una función

Periodicidad

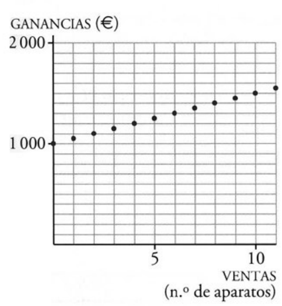
Funciones periódicas son aquellas cuyo comportamiento se va repitiendo cada vez que la variable independiente recorre un cierto intervalo. A la longitud de ese intervalo se llama **periodo**.

Una función periódica queda perfectamente determinada conociendo su comportamiento en un periodo.

La función describe la distancia del cometa Halley al Sol a lo largo de los últimos siglos.
Cómo la órbita se repite cada 76 años, la función se repite también en ese periodo de tiempo, es una función periódica de periodo 76 años

4. Discontinuidades y continuidad

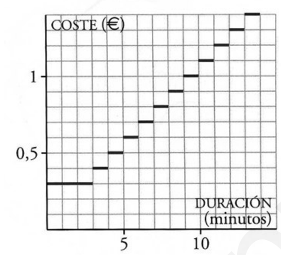
- Si la **variable** independiente pasa dando saltos de cada valor al siguiente la variable se llama **discreta**. La gráfica de la función consta de una serie de puntos, la **función** no es continua, es **discontinua**.
- Aunque la **variable** independiente sea **continua**, la función presenta saltos bruscos. Esos saltos bruscos se llaman discontinuidades, y la **función** que los tiene se dice que es **discontinua**.
- Una **función** se llama **continua** cuando no presenta discontinuidad de ningún tipo. Por tanto su gráfica se puede trazar sin levantar el lápiz del papel.
- También se puede decir de una **función** que es **continua en un tramo**, aunque tenga discontinuidades en otros.



Aparatos vendidos/ Ganancias mensuales

Variable discreta.

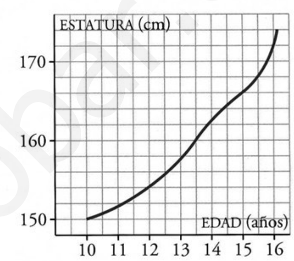
Función discontinua



Duración llamada telefónica/ Coste

Variable continua.

Función discontinua.



Edad/ Estatura

Variable continua.

Función continua

5. Expresión analítica de una función

Es una ecuación que relaciona algebraicamente las dos variables que intervienen.

Ejemplos

- Area de un cuadrado en función del lado: $A = l^2$
- Espacio recorrido por un móvil con movimiento rectilíneo uniforme en función del tiempo: $s = s_o + v\,t$

La expresión analítica tiene dos grandes ventajas sobre la representación gráfica:

- Resulta muy cómodo y breve dar la función de este modo.
- Con ella se pueden obtener con toda precisión, los valores de la función a partir de la variable independiente.

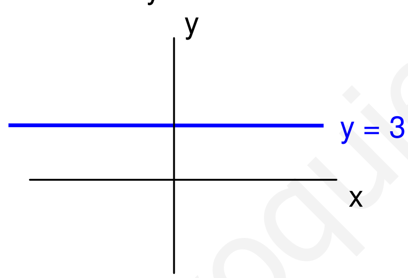
Y tiene un inconveniente: la fórmula, en principio, nos dice poso sobre el comportamiento de la función. Hay que efectuar cálculos y representarla para llegar a ver claro cómo se comporta globalmente.

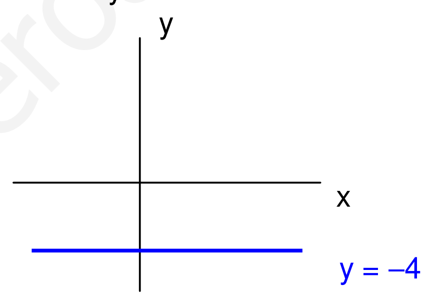
6. Clasificación de las funciones

- Algebraicas
  - Polinómicas
    - De grado cero: Constantes: $y = K$
    - De primer grado
      - Lineales: $y = mx$
      - Afines: $y = mx + n$
    - De segundo grado: Cuadráticas: $y = ax^2 + bx + c$
    - De grado superior a dos
  - Racionales
  - Irracionales
- No algebraicas
  - Exponenciales
  - Logarítmicas
  - Trigonométricas

7. La función constante $y = K$

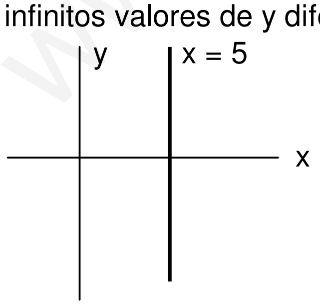
Su gráfica es una línea recta horizontal, paralela al eje de abscisas.
Su pendiente es: $m = 0$
Ejemplos: $y = 3$ $y = -4$

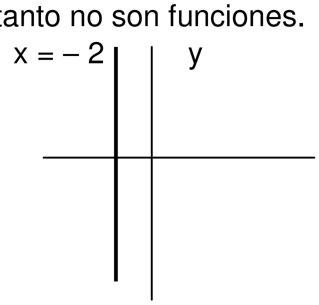




La ecuación del **eje de abscisas** (OX) es: **y =0**

La ecuación de una **recta vertical**, **paralela al eje de ordenadas**, es: **x = K**. Hay que hacer notar que estas rectas **no representan funciones**, porque las coordenadas de sus puntos tienen todas el mismo valor de la abscisa, luego un único valor de x tiene infinitos valores de y diferentes, por lo tanto no son funciones.





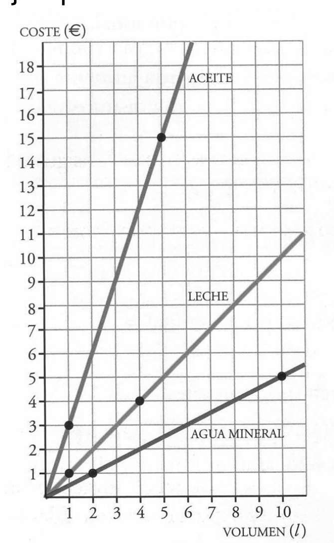
La ecuación del **eje de ordenadas** (OY) es: **x = 0**, aunque tampoco será función.

8. La función polinómica de primer grado

8.1. La función lineal (función de proporcionalidad) y = mx

Son funciones en las que las dos variables son proporcionales.

Ejemplo:

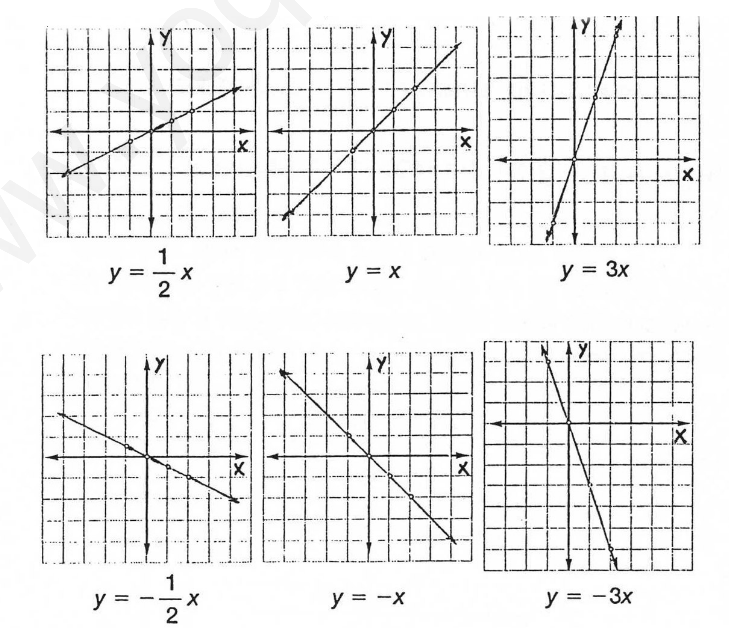


Cantidad comprada de un producto → *Coste de la compra*
(Variable independiente, x) (Variable dependiente, y)

Su gráfica es una línea recta que pasa por el origen de coordenadas (0,0)

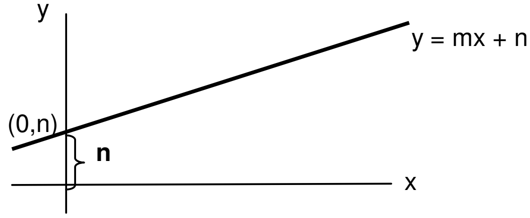
La constante de proporcionalidad entre las variables x e y es la **pendiente** de la recta, **m**, determina la inclinación de la recta y puede ser positiva o negativa.

- Cuanto mayor es la pendiente, mayor es la inclinación de la recta.
- Si la pendiente es positiva, la recta es creciente, si es negativa es decreciente.

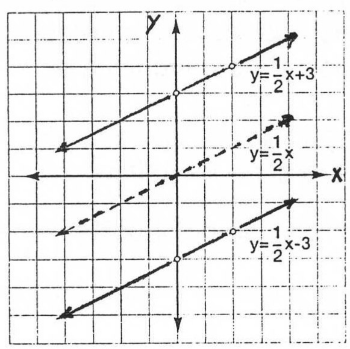


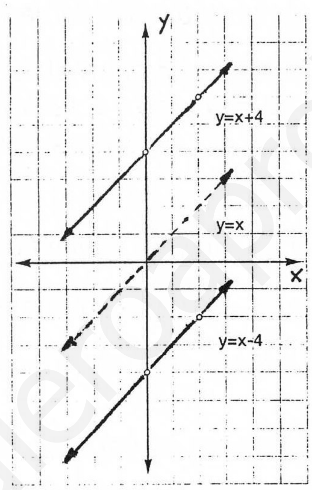
8.2 La función afín y = mx + n

Su gráfica es una recta de pendiente m, que corta al eje de ordenadas en el punto (0,n).Por lo tanto **n** indica la ordenada del punto de corte de la recta con el eje de ordenadas (OY). Por esta razón, a n se le denomina **ordenada en el origen**.



Todas las gráficas del y = mx + n son paralelas a y = mx, y se obtienen desplazando la gráfica de la función y = mx, n unidades hacia arriba, si n > 0; o n unidades hacia abajo, si n < 0. Cuando n = 0, la función se convierte en y = mx.





Todas las rectas con la **misma pendiente** son **paralelas.**

8.3. Representación de la gráfica a partir de la ecuación

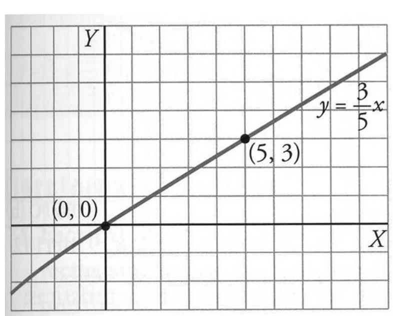
Se construye una tabla de valores en la que sólo se necesitan dos puntos, ya que, por dos puntos sólo pasa una recta.

Un punto ya se conoce: (0,0) en la función lineal y (0,n) en la función afín, por tanto para representarlas, sólo hará falta obtener otro punto, lo que se consigue dándole un valor a x y obteniendo el correspondiente valor de y.

Ejemplos:

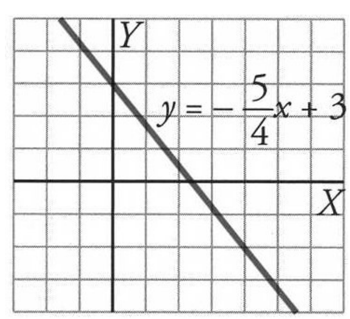
$$y=\frac{3}{5}x$$

x	y
0	0
5	3
-5	-3

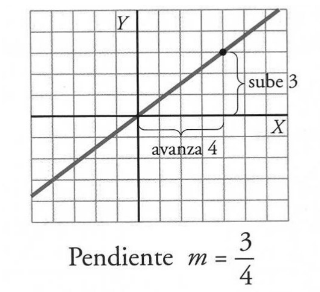


$$y=-\frac{5}{4}x+3$$

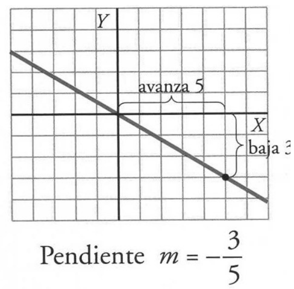
x	y
0	3
4	-2
-4	-8



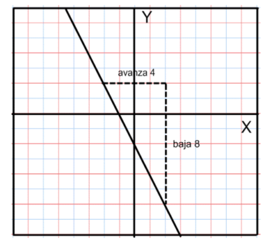
8.2 Cálculo de la ecuación a partir de la gráfica



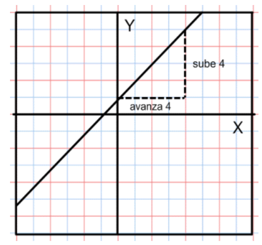
$y = \frac{3}{4}x$



$y = -\frac{3}{5}x$



$m = -2$; $y = -2x - 2$
$n = -2$;



$m = 1$; $y = x + 1$
$n = 1$

8.3. Ecuación de una recta conocido un punto y la pendiente

La expresión y = mx +n se denomina **ecuación explícita** de la recta.
Cada recta está identificada por su pendiente m, y su ordenada en el origen n.

Para hallar la ecuación de una recta de la que se conoce un punto $P(x_1,y_1)$ y su pendiente m, bastará con determinar n y para ello se procede así:

- Se sustituyen en la ecuación y = mx +n $\begin{cases} \text{el valor conocido de m} \\ \text{x por } x_1 \text{ e y por } y_1,. \end{cases}$
- Se despeja el valor de n
- Se sustituyen en la ecuación inicial, el valor de m y el de n calculado.

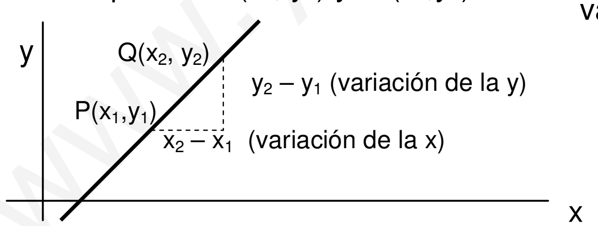
Ejemplo: Ecuación de una recta que pasa por $\underset{(x_1,y_1)}{(4,-1)}$ y tiene pendiente $\underset{m}{-5}$

$y = m x + n \rightarrow -1 = -5.4 + n \rightarrow n = 19 \rightarrow$ Ecuación de la recta: $y = -5x + 19$

8.6 Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

1º Cálculo de la pendiente, m, de una recta conocidos dos puntos

Sean los puntos P (x_1, y_1) y Q (x_2,y_2) $\quad m = \dfrac{\text{variación en la x}}{\text{variación en la y}} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



2º Cálculo de la ordenada en el origen, n

Ejemplo: Ecuación de una recta que pasa por P $(\overset{x_1}{-6},\overset{y_1}{1})$ y Q$(\overset{x_2}{4}, \overset{y_2}{-3})$

1º $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{-3-1}{4-(-6)} = \dfrac{-4}{10} = \dfrac{-2}{5}$

2º $y = mx + n \rightarrow 1 = \dfrac{-2}{5}(-6) + n \rightarrow n = \dfrac{-7}{5}$

Ecuación de la recta $y = -\dfrac{2}{5}x - \dfrac{7}{5}$

8.7 Ecuación general de una recta

La ecuación general de una recta es una ecuación del tipo: $Ax + By + C = 0$

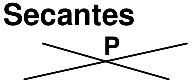
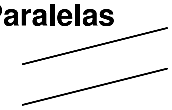
- La ecuación general puede transformarse en la explícita, despejando la y:
  $By = -Ax - C; \quad y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$
- Además cualquier ecuación explícita puede transformarse en general.

Ejemplos:

- Expresar en forma explícita la ecuación $3x - 2y - 6 = 0$
  $-2y = -3x + 6 \rightarrow y = \frac{3}{2}x - 3$
- Expresar en forma general la ecuación $y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{2}$
  $6y = -4x - 15 \rightarrow 4x + 6y + 15 = 0$

Para representar una recta dada en forma general , se puede:
- Obtener dos puntos suyos, dando valores a las variables.
- Despejar y, para obtener la expresión en forma explícita.

8.8 Posición relativa de dos rectas en el plano

		Forma general $A x + B y + C = 0$ $A'x + B'y + C' = 0$	**Forma explícita** $y = m x + n$ $y = m'x + n'$
Secantes 	Se cortan en un punto que es común a las dos rectas. Punto de intersección.	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$	$m \neq m'$
Paralelas 	No tienen ningún punto en común	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$	$m = m'$ igual pendiente

El **punto de intersección de dos rectas secantes** se obtiene analíticamente, **resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones**. También se puede obtener gráficamente, representado las rectas.

Ejemplos:

- Posición relativa de las rectas: $\left.\begin{array}{l} y = 2x - 5 \\ y = 2x + 4 \end{array}\right\} m = m' = 2 \Rightarrow$ Paralelas

  En forma general: $\left.\begin{array}{l} 2x - y - 5 = 0 \\ 2x - y + 4 = 0 \end{array}\right\} \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}; \ \frac{2}{2} = \frac{-1}{-1} \Rightarrow$ Paralelas

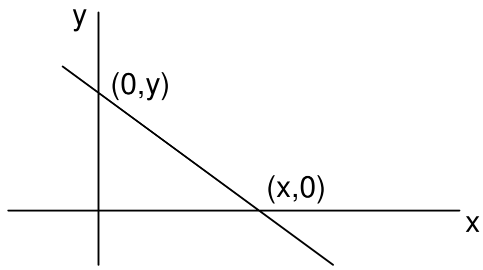
- Posición relativa de las rectas: $\left.\begin{array}{l} y = 2x - 3 \\ y = -3x + 7 \end{array}\right\} m \neq m'; \ 2 \neq -3 \Rightarrow$ Secantes

  En forma general: $\left.\begin{array}{l} 2x - y - 3 = 0 \\ 3x + y - 7 = 0 \end{array}\right\} \frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}; \ \frac{2}{3} \neq \frac{-1}{1} \Rightarrow$ Secantes

  Resolviendo el sistema se obtiene el punto de intersección: $x = 2$; $y = 1 \rightarrow (2,1)$

8.9 Calculo de los puntos de intersección de una recta con los ejes de coordenadas

Si en la ecuación de la recta, se hace $x = 0$, se obtiene el punto en que la recta corta al eje de ordenadas (OY).
Si en la ecuación de la recta se hace $y = 0$, se obtiene el punto en que la recta corta al eje de abscisas (OX).



Ejemplo: Obtener los puntos de intersección de la recta $x + 5y - 15 = 0$ con los ejes de coordenadas

$x = 0 \rightarrow 5y - 15 = 0;\ 5y = 15;\ y = 3$ Punto de corte con ordenadas (0,3)

$y = 0 \rightarrow x - 15 = 0;\ x = 15$ Punto de corte con abscisas (15,0)