

1. Resuelve las siguientes ecuaciones radicales:

a) $3 + \sqrt{2x+3} = 2x$

- Aislamos el radical en un miembro, pasando al otro lo demás:

$$\sqrt{2x+3} = 2x-3$$

- Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$$(\sqrt{2x+3})^2 = (2x-3)^2$$

- Operamos y reducimos términos semejantes:

$$2x+3 = 4x^2 - 12x + 9 \Rightarrow 4x^2 - 12x + 9 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 14x + 6 = 0 \xrightarrow{(:2)} 2x^2 - 7x + 3 = 0$$

- Resolvemos la ecuación de 2º grado obtenida: $2x^2 - 7x + 3 = 0 \Rightarrow a = 2 \quad b = -7 \quad c = 3$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{12}{4} = 3 \\ \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

COMPROBACIÓN

- $x = 3$

$$\left. \begin{array}{l} 3 + \sqrt{2 \cdot 3 + 3} = 3 + 3 = 6 \\ 2 \cdot 3 = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow 3 + \sqrt{2 \cdot 3 + 3} = 2 \cdot 3 \Rightarrow x = 3 \text{ sí es solución}$$

- $x = \frac{1}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} 3 + \sqrt{2 \cdot \frac{1}{2} + 3} = 3 + 2 = 5 \\ 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 3 + \sqrt{2 \cdot \frac{1}{2} + 3} \neq 2 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ no es solución}$$

Por tanto,**La solución de la ecuación es $x = 3$**

b) $\sqrt{x+6} + \sqrt{x} = 6$

- Aislamos uno de los radicales en un miembro, pasando al otro lo demás:

$$\sqrt{x+6} = 6 - \sqrt{x}$$

- Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$$(\sqrt{x+6})^2 = (6-\sqrt{x})^2$$

- Operamos y reducimos términos semejantes:

$$x+6 = 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot \sqrt{x} + (\sqrt{x})^2$$

$$x+6 = 36 - 12\sqrt{x} + x$$

Ahora tenemos una ecuación como la del apartado a), luego repetimos los pasos

- Aislamos el radical en un miembro, pasando al otro lo demás:

$$12\sqrt{x} = -x - 6 + 36 + x$$

$$12\sqrt{x} = 30$$

- Simplificamos dividiendo en los dos miembros de la ecuación por 6:

$$2\sqrt{x} = 5 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{5}{2}$$

- Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$$(\sqrt{x})^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

- Finalmente: $x = \frac{25}{4}$

COMPROBACIÓN

- $x = \frac{25}{4}$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{\frac{25}{4}+6} = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2} \\ 6 - \sqrt{\frac{25}{4}} = 6 - \frac{5}{2} = \frac{7}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow 3 + \sqrt{\frac{25}{4}+6} = 6 - \sqrt{\frac{25}{4}} \Rightarrow x = \frac{25}{4} \text{ sí es solución}$$

Por tanto,

La solución de la ecuación es $x = \frac{25}{4}$

c) $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 3$

- Aislamos uno de los radicales en un miembro, pasando al otro lo demás:

$$\sqrt{3x-2} = 3 - \sqrt{x-1}$$

- Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$$(\sqrt{3x-2})^2 = (3-\sqrt{x-1})^2$$

- Operamos y reducimos términos semejantes:

$$3x-2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{x-1} + (\sqrt{x-1})^2$$

$$3x-2 = 9 - 6\sqrt{x-1} + x-1$$

Ahora tenemos una ecuación como la del apartado a), luego repetimos los pasos

- Aislamos el radical en un miembro, pasando al otro lo demás:

$$6\sqrt{x-1} = -3x+2+9+x-1$$

$$6\sqrt{x-1} = 10-2x$$

- Simplificamos dividiendo en los dos miembros de la ecuación por 2:

$$3\sqrt{x-1} = 5-x$$

- Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$$(3\sqrt{x-1})^2 = (5-x)^2$$

- Operamos y reducimos términos semejantes:

$$9(x-1) = 25-10x+x^2 \Rightarrow 9x-9 = 25-10x+x^2 \Rightarrow x^2-19x+34=0$$

- Resolvemos la ecuación de 2º grado obtenida $x^2-19x+34=0 \Rightarrow a=1 \quad b=-19 \quad c=34$

$$x = \frac{19 \pm \sqrt{(-19)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 34}}{2 \cdot 1} = \frac{19 \pm \sqrt{361-136}}{2} = \frac{19 \pm 15}{2} = \begin{cases} \frac{34}{2} = 17 \\ \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

COMPROBACIÓN

- $x=17$

$$\sqrt{3 \cdot 17 - 2} + \sqrt{17 - 1} = 7 + 4 = 11 \neq 3 \Rightarrow x=17 \text{ no es solución}$$

- $x=2$

$$\sqrt{3 \cdot 2 - 2} + \sqrt{2 - 1} = 2 + 1 = 3 \Rightarrow x=2 \text{ sí es solución}$$

Por tanto,

La solución de la ecuación es $x=2$

d) $\sqrt{x+1} = \sqrt[3]{x^2-1}$

- Elevamos los dos miembros de la ecuación a $m.c.m.(2,3) = 6$:

$$(\sqrt{x+1})^6 = (\sqrt[3]{x^2-1})^6$$

- Operamos y reducimos términos semejantes:

$$(x+1)^3 = (x^2-1)^2 \Rightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^4 - 2x^2 + 1 \Rightarrow x^4 - x^3 - 5x^2 - 3x = 0$$

- Resolvemos la ecuación obtenida: $x^4 - x^3 - 5x^2 - 3x = 0$

$$x^4 - x^3 - 5x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^3 - x^2 - 5x - 3) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0 (*) \end{cases}$$

$$x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0 (*)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -1 & -5 & -3 & \\ -1 & -1 & +2 & +3 & \\ \hline 1 & -2 & -3 & 0 & \end{array} \Rightarrow -1 \text{ es raíz} \Rightarrow (x+1) \text{ es factor} \Rightarrow x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x+1)(x^2 - 2x - 3)$$

$$x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 - 2x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x=3 \\ x=-1 \end{cases} \end{cases}$$

COMPROBACIÓN

- $x=0$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{0+1} = 1 \\ \sqrt[3]{0^2-1} = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{0+1} \neq \sqrt[3]{0^2-1} \Rightarrow x=0 \text{ no es solución}$$

- $x=-1$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{-1+1} = 0 \\ \sqrt[3]{(-1)^2-1} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{-1+1} = \sqrt[3]{(-1)^2-1} \Rightarrow x=-1 \text{ sí es solución}$$

- $x=3$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{3+1} = 2 \\ \sqrt[3]{(3)^2-1} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{3+1} = \sqrt[3]{(3)^2-1} \Rightarrow x=3 \text{ sí es solución}$$

Por tanto,

Las soluciones de la ecuación son $x=-1$ y $x=3$

e) $\frac{1}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-1} = \frac{x}{2}$

- Reducimos las fracciones a mínimo común denominador:

$$\frac{2 + 2(\sqrt{x-1})^2}{2\sqrt{x-1}} = \frac{x\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}$$

- Eliminamos los denominadores (al ser iguales) y nos queda la ecuación:

$$2 + 2(\sqrt{x-1})^2 = x\sqrt{x-1}$$

- Operamos y reducimos términos semejantes:

$$2 + 2(x-1) = x\sqrt{x-1} \Rightarrow 2 + 2x - 2 = x\sqrt{x-1} \Rightarrow 2x = x\sqrt{x-1}$$

- Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$$(2x)^2 = (x\sqrt{x-1})^2$$

- Operamos y reducimos términos semejantes:

$$4x^2 = x^2(x-1) \Rightarrow 4x^2 = x^3 - x^2 \Rightarrow x^3 - 5x^2 = 0$$

- Resolvemos la ecuación obtenida: $x^3 - 5x^2 = 0$

$$x^3 - 5x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \end{cases}$$

COMPROBACIÓN

- $x = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{0-1}} + \sqrt{0-1} = \text{no existe} \\ \frac{0}{2} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 0 \text{ no es solución}$$

- $x = 5$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{5-1}} + \sqrt{5-1} = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5-1}} + \sqrt{5-1} = \frac{5}{2} \Rightarrow x = 5 \text{ sí es solución}$$

Por tanto,

La solución de la ecuación es $x = 5$

f) $\sqrt{x} + \sqrt{x+2} = \frac{6}{\sqrt{x}}$

- Reducimos las fracciones a mínimo común denominador:

$$\frac{(\sqrt{x})^2 + \sqrt{x} \cdot \sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} = \frac{6}{\sqrt{x}}$$

- Eliminamos los denominadores (al ser iguales) y nos queda la ecuación:

$$(\sqrt{x})^2 + \sqrt{x} \cdot \sqrt{x+2} = 6$$

- Operamos y reducimos términos semejantes:

$$x + \sqrt{x^2 + 2x} = 6$$

- Aislamos el radical en un miembro, pasando al otro lo demás:

$$\sqrt{x^2 + 2x} = 6 - x$$

- Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$$(\sqrt{x^2 + 2x})^2 = (6 - x)^2$$

- Operamos y reducimos términos semejantes:

$$x^2 + 2x = 36 - 12x + x^2 \Rightarrow 14x - 36 = 0$$

- Resolvemos la ecuación obtenida: $14x - 36 = 0 \Rightarrow 14x = 36 \Rightarrow x = \frac{36}{14} \Rightarrow x = \frac{18}{7}$

COMPROBACIÓN $\sqrt{x} + \sqrt{x+2} = \frac{6}{\sqrt{x}}$

- $x = 12$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\frac{18}{7}} + \sqrt{\frac{18}{7} + 2} &= \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{7}} + \sqrt{\frac{32}{7}} = \frac{\sqrt{18}\sqrt{7}}{7} + \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2 \cdot 3^2} \sqrt{7}}{7} + \frac{\sqrt{2^5} \sqrt{7}}{7} = \frac{3\sqrt{14} + 4\sqrt{14}}{7} = \sqrt{14} \\ \frac{6}{\sqrt{\frac{18}{7}}} &= \frac{6}{\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{7}}} = \frac{6\sqrt{7}}{\sqrt{18}} = \frac{6\sqrt{7}}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{7}\sqrt{2}}{2} = \sqrt{14} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{18}{7} \text{ sí es solución}$$

Por tanto,

La solución de la ecuación es $x = \frac{18}{7}$

g) $\sqrt{40 - x^2} + 7x = 4(x + 3)$

- Aislamos el radical en un miembro, pasando al otro lo demás:

$$\sqrt{40-x^2} = 4x+12-7x$$

$$\sqrt{40-x^2} = 12-3x$$

- Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$$(\sqrt{40-x^2})^2 = (12-3x)^2$$

- Operamos y reducimos términos semejantes:

$$40-x^2 = 144-72x+9x^2 \Rightarrow 10x^2-72x+104=0 \xrightarrow{(:2)} 5x^2-36x+52=0$$

- Resolvemos la ecuación de 2º grado obtenida: $5x^2-36x+52=0 \Rightarrow a=5 \quad b=-36 \quad c=52$

$$x = \frac{36 \pm \sqrt{(-36)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 52}}{2 \cdot 5} = \frac{36 \pm \sqrt{1296 - 1040}}{10} = \frac{36 \pm 16}{10} = \begin{cases} \frac{52}{10} = \frac{26}{5} \\ \frac{20}{10} = 2 \end{cases}$$

COMPROBACIÓN

- $x = 2$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{40-2^2} + 7 \cdot 2 &= 6+14=20 \\ 4(2+3) &= 20 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{40-2^2} + 7 \cdot 2 = 4(2+3) \Rightarrow x = 2 \text{ sí es solución}$$

- $x = \frac{26}{5}$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{40 - \left(\frac{26}{5}\right)^2} + 7 \cdot \frac{26}{5} &= \sqrt{40 - \frac{676}{25}} + \frac{182}{5} = \sqrt{\frac{324}{25}} + \frac{182}{5} = \frac{18}{5} + \frac{182}{5} = \frac{200}{5} = 40 \\ 4\left(\frac{26}{5} + 3\right) &= 4\left(\frac{26+15}{5}\right) = 4\frac{41}{5} = \frac{164}{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = \frac{26}{5} \text{ no es solución}$$

Por tanto,

La solución de la ecuación es $x = 2$

h) $3+2x = 2\sqrt{x+1} - x$

- Aislamos el radical en un miembro, pasando al otro lo demás:

$$3+3x = 2\sqrt{x+1}$$

- Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$$(3+3x)^2 = (2\sqrt{x+1})^2$$

- Operamos y reducimos términos semejantes:

$$9 + 18x + 9x^2 = 4(x + 1) \Rightarrow 9 + 18x + 9x^2 = 4x + 4 \Rightarrow 9x^2 + 14x + 5 = 0$$

- Resolvemos la ecuación de 2º grado obtenida: $9x^2 + 14x + 5 = 0 \Rightarrow a = 9 \quad b = 14 \quad c = 5$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{(14)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 5}}{2 \cdot 9} = \frac{-14 \pm \sqrt{196 - 180}}{18} = \frac{-14 \pm 4}{18} = \begin{cases} \frac{-10}{18} = -\frac{5}{9} \\ \frac{-18}{18} = -1 \end{cases}$$

COMPROBACIÓN

- $x = -1$

$$\left. \begin{array}{l} 3 + 2 \cdot (-1) = 1 \\ 2\sqrt{-1+1} - (-1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 3 + 2 \cdot (-1) = 2\sqrt{-1+1} - (-1) \Rightarrow x = -1 \text{ sí es solución}$$

- $x = -\frac{5}{9}$

$$\left. \begin{array}{l} 3 + 2 \cdot \left(-\frac{5}{9}\right) = 3 - \frac{10}{9} = \frac{17}{9} \\ 2\sqrt{-\frac{5}{9}+1} - \left(-\frac{5}{9}\right) = 2\sqrt{\frac{4}{9} + \frac{5}{9}} = 2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{9} = \frac{4}{3} + \frac{5}{9} = \frac{17}{9} \end{array} \right\} \Rightarrow 3 + 2 \cdot \left(-\frac{5}{9}\right) = 2\sqrt{-\frac{5}{9}+1} - \left(-\frac{5}{9}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{5}{9} \text{ sí es solución}$$

Por tanto,

Las soluciones de la ecuación son $x = -1$ y $x = -\frac{5}{9}$

i) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = 5$

- Aislamos uno de los radicales en un miembro, pasando al otro lo demás:

$$\sqrt{x+3} = 5 - \sqrt{x-2}$$

- Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$$(\sqrt{x+3})^2 = (5 - \sqrt{x-2})^2$$

- Operamos y reducimos términos semejantes:

$$x + 3 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{x-2} + (\sqrt{x-2})^2$$

$$x + 3 = 25 - 10\sqrt{x-2} + x - 2$$

Ahora tenemos una ecuación como la del apartado a), luego repetimos los pasos

- Aislamos el radical en un miembro, pasando al otro lo demás:

$$10\sqrt{x-2} = -x+3+25+x-2$$

$$10\sqrt{x-2} = 20$$

- Simplificamos dividiendo en los dos miembros de la ecuación entre 10:

$$\sqrt{x-2} = 2$$

- Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$$(\sqrt{x-2})^2 = (2)^2$$

- Operamos y reducimos términos semejantes:

$$x-2 = 4 \Rightarrow x = 6$$

COMPROBACIÓN

- $x = 6$

$$\sqrt{6+3} + \sqrt{6-2} = 3+2 = 5 \Rightarrow x = 17 \text{ sí es solución}$$

Por tanto,

La solución de la ecuación es $x = 6$

j) $4\sqrt{x-5} - 3\sqrt{x+7} = -4$

- Aislamos uno de los radicales en un miembro, pasando al otro lo demás:

$$4\sqrt{x-5} = 3\sqrt{x+7} - 4$$

- Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$$(4\sqrt{x-5})^2 = (3\sqrt{x+7} - 4)^2$$

- Operamos y reducimos términos semejantes:

$$16(x-5) = 9(x+7) - 24\sqrt{x+7} + 16$$

$$16x - 80 = 9x + 63 - 24\sqrt{x+7} + 16$$

Ahora tenemos una ecuación como la del apartado a), luego repetimos los pasos

- Aislamos el radical en un miembro, pasando al otro lo demás:

$$24\sqrt{x+7} = -16x + 80 + 9x + 63 + 16$$

$$24\sqrt{x+7} = 159 - 7x$$

- Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$$(24\sqrt{x+7})^2 = (159-7x)^2$$

- Operamos y reducimos términos semejantes:

$$576(x+7) = 25281 - 2226x + 49x^2 \Rightarrow 576x + 4032 = 25281 - 2226x + 49x^2 \Rightarrow 49x^2 - 2802x + 21249 = 0$$

- Resolvemos la ecuación de 2º grado obtenida:

$$49x^2 - 2802x + 21249 = 0 \Rightarrow a = 49 \quad b = -2802 \quad c = 21249$$

$$x = \frac{2802 \pm \sqrt{(-2802)^2 - 4 \cdot 49 \cdot 21249}}{2 \cdot 49} = \frac{2802 \pm \sqrt{3686400}}{98} = \frac{2802 \pm 1920}{98} = \begin{cases} \frac{4722}{98} = \frac{2361}{49} \\ \frac{882}{98} = 9 \end{cases}$$

COMPROBACIÓN $4\sqrt{x-5} - 3\sqrt{x+7} = -4$

- $x = \frac{2361}{49}$

$$4 \cdot \sqrt{\frac{2361}{49} - 5} - 3 \cdot \sqrt{\frac{2361}{49} + 7} = 4 \cdot \sqrt{\frac{2116}{49}} - 3 \cdot \sqrt{\frac{2704}{49}} = 4 \cdot \frac{46}{7} - 3 \cdot \frac{52}{7} = \frac{184}{7} - \frac{156}{7} = \frac{28}{7} = 4 \neq -4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2361}{49} \text{ no es solución}$$

- $x = 9$

$$4 \cdot \sqrt{9-5} - 3 \cdot \sqrt{9+7} = 4 \cdot \sqrt{4} - 3 \cdot \sqrt{16} = 4 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = 8 - 12 = -4 \Rightarrow x = 9 \text{ sí es solución}$$

Por tanto,

La solución de la ecuación es $x=9$

k) $\sqrt{x-20} + \sqrt{x} = \frac{40}{\sqrt{x-20}}$

- Reducimos las fracciones a mínimo común denominador:

$$\frac{(\sqrt{x-20})^2 + \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-20}}{\sqrt{x-20}} = \frac{40}{\sqrt{x-20}}$$

- Eliminamos los denominadores (al ser iguales) y nos queda la ecuación:

$$(\sqrt{x-20})^2 + \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-20} = 40$$

- Operamos y reducimos términos semejantes:

$$x - 20 + \sqrt{x(x-20)} = 40$$

$$x - 20 + \sqrt{x^2 - 20x} = 40$$

- Aislamos el radical en un miembro, pasando al otro lo demás:

$$\sqrt{x^2 - 20x} = 60 - x$$

- Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$$(\sqrt{x^2 - 20x})^2 = (60 - x)^2$$

- Operamos y reducimos términos semejantes:

$$x^2 - 20x = 3600 - 120x + x^2 \Rightarrow 100x - 3600 = 0$$

- Resolvemos la ecuación obtenida: $10x - 3600 = 0 \Rightarrow 100x = 3600 \Rightarrow x = \frac{3600}{100} \Rightarrow x = 36$

COMPROBACIÓN $\sqrt{x-20} + \sqrt{x} = \frac{40}{\sqrt{x-20}}$

- $x = 36$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{36-20} + \sqrt{36} = 4 + 6 = 10 \\ \frac{40}{\sqrt{36-20}} = \frac{40}{4} = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 36 \text{ sí es solución}$$

Por tanto,

<p>La solución de la ecuación es $x = \frac{18}{7}$</p>

1) $\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$

- Multiplicamos en cruz y nos queda la ecuación:

$$(\sqrt{x}-2) \cdot (\sqrt{x}-3) = (\sqrt{x}+2) \cdot (\sqrt{x}+1)$$

- Operamos y reducimos términos semejantes:

$$x - 3\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 6 = x + \sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 2$$

$$x - 5\sqrt{x} + 6 = x + 3\sqrt{x} + 2$$

$$4 = 8\sqrt{x}$$

$$\frac{1}{2} = \sqrt{x}$$

- Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = (\sqrt{x})^2$$

- Operamos y reducimos términos semejantes:

$$\frac{1}{4} = x \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

COMPROBACIÓN

- $x = \frac{1}{4}$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\sqrt{\frac{1}{4}-2}}{\sqrt{\frac{1}{4}+2}} = \frac{\frac{1}{2}-2}{\frac{1}{2}+2} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = -\frac{3}{5} \\ \frac{\sqrt{\frac{1}{4}+1}}{\sqrt{\frac{1}{4}-3}} = \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-3} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\sqrt{\frac{1}{4}-2}}{\sqrt{\frac{1}{4}+2}} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} \frac{\sqrt{\frac{1}{4}+1}}{\sqrt{\frac{1}{4}-3}} x = \frac{1}{4} \text{ sí es solución}$$

Por tanto,

La solución de la ecuación es $x = \frac{1}{4}$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales:

a)
$$\frac{x+1}{3x-6} - \frac{x+1}{2x+4} = \frac{10-x^2}{6x^2-24}$$

- Factorizamos los denominadores: (sacando factor común y utilizando identidades notables)

$$3x-6=3(x-2)$$

$$2x+4=2(x+2)$$

$$6x^2-24=6(x^2-4)=6(x-2)(x+2)$$

La ecuación queda:

$$\frac{x+1}{3(x-2)} - \frac{x+1}{2(x+2)} = \frac{10-x^2}{6(x-2)(x+2)}$$

- Reducimos las fracciones a mínimo común denominador:

$$\frac{2(x+2)(x+1)-3(x-2)(x+1)}{6(x-2)(x+2)} = \frac{10-x^2}{6(x-2)(x+2)}$$

- Eliminamos los denominadores (al ser iguales) y nos queda la ecuación:

$$2(x+2)(x+1)-3(x-2)(x+1)=10-x^2$$

- Operamos y reducimos términos semejantes:

$$2(x^2+x+2x+2)-3(x^2+x-2x-2)=10-x^2 \Rightarrow 2(x^2+3x+2)-3(x^2-x-2)=10-x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2+6x+4-3x^2+3x+6=10-x^2 \Rightarrow 2x^2+6x+4-3x^2+3x+6-10+x^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x=0$$

- Resolvemos la ecuación de primer grado obtenida: $9x=0 \Rightarrow x=0$ "Posible solución"

En las ecuaciones racionales no es necesario (salvo que lo indique el enunciado) hacer todo el desarrollo de la comprobación de las posibles soluciones como ocurre en las ecuaciones radicales.

Sólo debéis asegurarnos que no anulan los denominadores de la ecuación porque entonces no son solución ya que no se puede dividir por cero.

En este caso $x=0$ no anulan los denominadores por eso es solución de la ecuación.

Por tanto,

La solución de la ecuación es $x=0$

b)
$$15 - \frac{8}{5-x} = \frac{12}{9-x} + 9$$

- Reducimos las fracciones a mínimo común denominador:

$$\frac{15(5-x)(9-x)-8(9-x)}{(5-x)(9-x)} = \frac{12(5-x)+9(5-x)(9-x)}{(5-x)(9-x)}$$

- Eliminamos los denominadores (al ser iguales) y nos queda la ecuación:

$$15(5-x)(9-x)-8(9-x)=12(5-x)+9(5-x)(9-x)$$

- Operamos y reducimos términos semejantes:

$$15(45-5x-9x+x^2)-72+8x=60-12x+9(45-5x-9x+x^2)$$

$$15(x^2-14x+45)-72+8x=60-12x+9(x^2-14x+45)$$

$$15x^2 - 210x + 675 - 72 + 8x = 60 - 12x + 9x^2 - 126x + 405$$

$$15x^2 - 9x^2 - 210x + 8x + 12x + 126x + 675 - 72 - 60 - 405 = 0$$

$$6x^2 - 64x + 138 = 0 \xrightarrow{:2} 3x^2 - 32x + 69 = 0$$

- Resolvemos la ecuación de 2º grado obtenida: $3x^2 - 32x + 69 = 0 \Rightarrow a = 3 \quad b = -32 \quad c = 69$

$$x = \frac{32 \pm \sqrt{(32)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 69}}{2 \cdot 3} = \frac{32 \pm \sqrt{1024 - 828}}{6} = \frac{32 \pm \sqrt{196}}{6} = \frac{32 \pm 14}{6} = \begin{cases} \frac{46}{6} = \frac{23}{3} \\ \frac{18}{6} = 3 \end{cases} \quad \text{''Posibles soluciones''}$$

En las ecuaciones racionales no es necesario (salvo que lo indique el enunciado) hacer todo el desarrollo de la comprobación de las posibles soluciones como ocurre en las ecuaciones radicales.

Sólo debéis asegurarnos que no anulan los denominadores de la ecuación porque entonces no son solución ya que no se puede dividir por cero.

En este caso $x = 3$ y $x = \frac{23}{3}$ no anulan los denominadores por eso los dos son soluciones de la ecuación.

Por tanto,

<p>Las soluciones de la ecuación son $x = 3$ y $x = \frac{23}{3}$</p>
--

c) $\frac{6x+1}{x^2-4} = \frac{x+1}{x+2} + \frac{x}{x-2}$

- Factorizamos los denominadores:

$$\frac{6x+1}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+1}{x+2} + \frac{x}{x-2}$$

- Reducimos las fracciones a mínimo común denominador:

$$\frac{6x+1}{(x-2)(x+2)} = \frac{(x-2)(x+1) + x(x+2)}{(x-2)(x+2)}$$

- Eliminamos los denominadores (al ser iguales) y nos queda la ecuación:

$$6x+1 = (x-2)(x+1) + x(x+2)$$

- Operamos y reducimos términos semejantes:

$$6x+1 = (x^2 + x - 2x - 2) + x^2 + 2x \Rightarrow 6x+1 = x^2 + x - 2x - 2 + x^2 + 2x \Rightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0$$

- Resolvemos la ecuación de 2º grado obtenida: $2x^2 - 5x - 3 = 0 \Rightarrow a = 2 \quad b = -5 \quad c = -3$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{12}{4} = 3 \\ \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{''Posibles soluciones''}$$

En las ecuaciones racionales no es necesario (salvo que lo indique el enunciado) hacer todo el desarrollo de la comprobación de las posibles soluciones como ocurre en las ecuaciones radicales.

Sólo debéis asegurarnos que no anulan los denominadores de la ecuación porque entonces no son solución ya que no se puede dividir por cero.

En este caso $x = 3$ y $x = -\frac{1}{2}$ no anulan los denominadores por eso los dos son soluciones de la ecuación.

Por tanto,

Las soluciones de la ecuación son $x = -3$ y $x = -\frac{1}{2}$
--

d)
$$\frac{3x^2 - 2x}{3x + 1} + \frac{1}{2x} = x - 1$$

• Reducimos las fracciones a mínimo común denominador:

$$\frac{2x(3x^2 - 2x) + 1(3x + 1)}{(3x + 1)2x} = \frac{(3x + 1)2x(x - 1)}{(3x + 1)2x}$$

• Eliminamos los denominadores (al ser iguales) y nos queda la ecuación:

$$2x(3x^2 - 2x) + 1(3x + 1) = (3x + 1)2x(x - 1)$$

• Operamos y reducimos términos semejantes:

$$6x^3 - 4x^2 + 3x + 1 = (6x^2 + 2x)(x - 1) \Rightarrow 6x^3 - 4x^2 + 3x + 1 = 6x^3 - 6x^2 + 2x^2 - 2x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6x^3 - 4x^2 + 3x + 1 - 6x^3 + 6x^2 - 2x^2 + 2x = 0 \Rightarrow 5x + 1 = 0$$

• Resolvemos la ecuación de primer grado obtenida: $5x + 1 = 0 \Rightarrow 5x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{5}$

$x = -\frac{1}{5}$ no anula los denominadores por eso es solución de la ecuación.

Por tanto,

La solución de la ecuación es $x = -\frac{1}{5}$

e)
$$\frac{1}{x + 3} + \frac{1}{x - 3} = \frac{1}{x^2 - 9}$$

• Factorizamos los denominadores:

$$\frac{1}{(x + 3)} + \frac{1}{(x - 3)} = \frac{1}{(x - 3)(x + 3)}$$

• Reducimos las fracciones a mínimo común denominador:

$$\frac{1(x - 3) + 1(x + 3)}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{1}{(x - 3)(x + 3)}$$

• Eliminamos los denominadores (al ser iguales) y nos queda la ecuación:

$$1(x - 3) + 1(x + 3) = 1$$

• Operamos y reducimos términos semejantes:

$$x - 3 + x + 3 = 1 \Rightarrow 2x - 1 = 0$$

$$2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

- Resolvemos la ecuación de primer grado obtenida:

$$x = \frac{1}{2}$$

no anula los denominadores por eso es solución de la ecuación.

Por tanto,

La solución de la ecuación es $x = \frac{1}{2}$

$$\frac{3x-3}{x-1} + \frac{x^2+2}{x+1} = \frac{7x+1}{x^2-1}$$

f) Factorizamos los denominadores:

- Factorizamos los denominadores:

$$\frac{3x-3}{(x-1)} + \frac{x^2+2}{(x+1)} = \frac{7x+1}{(x-1)(x+1)}$$

- Reducimos las fracciones a mínimo común denominador:

$$\frac{(3x-3)(x+1) + (x^2+2)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{7x+1}{(x-1)(x+1)}$$

- Eliminamos los denominadores (al ser iguales) y nos queda la ecuación:

$$(3x-3)(x+1) + (x^2-x+2x-2) = 7x+1$$

- Operamos y reducimos términos semejantes:

$$\Rightarrow 3x^2 + 3x - 3x - 3 + x^3 - x^2 + 2x - 2 = 7x + 1 \Rightarrow x^3 + 2x^2 + 2x - 5 = 7x + 1 \Rightarrow x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$$

- Resolvemos la ecuación obtenida: $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & +2 & -5 & -6 & \\ & -1 & -1 & -1 & +6 \\ \hline 1 & +1 & -6 & 0 & \end{array}$$

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 + x - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ (no es solución pues anula al denominador)} \\ x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases} \end{cases}$$

$x = -3$ y $x = 2$ no anulan los denominadores por eso los dos son soluciones de la ecuación.

Por tanto,

Las soluciones de la ecuación son $x = -3$ y $x = 2$

$$\frac{x+2}{x^2+3x+2} - \frac{1}{x^2+2x+1} = \frac{1}{x^3+2x^2+x}$$

- Factorizamos los denominadores:

$$\Rightarrow x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow a = 1 \quad b = 3 \quad c = 2$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{-2}{2} = -1 \\ \frac{-4}{2} = -2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \quad (\text{identidad notable})$$

$$\Rightarrow x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x+1)^2 \quad (\text{sacar foactor común e identidad notable})$$

Luego la ecuación queda:

$$\frac{x+2}{(x+1)(x+2)} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2}$$

- Simplificamos la primera fracción:

$$\frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2}$$

- Reducimos las fracciones a mínimo común denominador:

$$\frac{x(x+1) - x}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2}$$

- Eliminamos los denominadores (al ser iguales) y nos queda la ecuación:

$$x(x+1) - x = 1$$

- Operamos y reducimos términos semejantes: $\Rightarrow x^2 + x - x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0$

- Resolvemos la ecuación obtenida:

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (no es solución porque anula al denominador)} \\ x = 1 \end{cases}$$

$x = 1$ no anula los denominadores por eso sí es solución de la ecuación.

Por tanto,

La solución de la ecuación es $x = 1$

$$\text{h) } x^2 - \frac{64}{x^2} = -12$$

- Reducimos las fracciones a mínimo común denominador:

$$\frac{x^4 - 64}{x^2} = \frac{-12x^2}{x^2}$$

- Eliminamos los denominadores (al ser iguales) y nos queda la ecuación:

$$x^4 - 64 = -12x^2$$

- Operamos y reducimos términos semejantes: $\Rightarrow x^4 + 12x^2 - 64 = 0$

- Resolvemos la ecuación obtenida: $x^4 + 12x^2 - 64 = 0$ (bicuadrada)

1) Hacemos el cambio de variable $x^2 = t$ y la ecuación se convierte en la ecuación de 2º grado:

$$t^2 + 12t - 64 = 0$$

2) Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$t^2 + 12t - 64 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 256}}{2} = \frac{-12 \pm 20}{2} = \begin{cases} t = 4 \\ t = -16 \end{cases}$$

3) Deshacemos el cambio de variable

- $t = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$

- $t = -16 \Rightarrow x^2 = -16 \Rightarrow x = \sqrt{-16} \Rightarrow$ no tiene solución real

$x = -2$ y $x = 2$ no anulan los denominadores por eso los dos son soluciones de la ecuación.

Por tanto,

La solución de la ecuación es $x = 1$

$$\text{j) } \frac{x-1}{x^3-2x^2+x} + \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{x^4-x^2}$$

• Factorizamos los denominadores:

$$\triangleright x^3-2x^2+x = x(x^2-2x+1) = x(x-1)^2$$

$$\triangleright x^2-1 = (x-1)(x+1)$$

$$\triangleright x^4-x^2 = x^2(x^2-1) = x^2(x-1)(x+1)$$

La ecuación queda:

$$\frac{x-1}{x(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}$$

• Simplificamos la primera fracción:

$$\frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}$$

• Reducimos las fracciones a mínimo común denominador:

$$\frac{x(x+1)+x^2}{x^2(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}$$

• Eliminamos los denominadores (al ser iguales) y nos queda la ecuación:

$$x(x+1)+x^2=1$$

• Operamos y reducimos términos semejantes: $x^2+x+x^2-1=0 \Rightarrow 2x^2+x-1=0$

• Resolvemos la ecuación obtenida: $2x^2+x-1=0$

$$2x^2+x-1=0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -1 \text{ (no es solución porque anula los denominadores)} \end{cases}$$

$x = \frac{1}{2}$ no anula los denominadores por eso es solución de la ecuación.

Por tanto,

La solución de la ecuación es $x = \frac{1}{2}$

$$\text{j) } \frac{7(x+1)}{3x^2+17x+10} - \frac{1}{3x+2} = \frac{1}{x^2+5x}$$

• Factorizamos los denominadores:

$$\triangleright 3x^2+17x+10 = (3x+2)(x+5)$$

$$3x^2+17x+10=0 \Rightarrow a=3 \quad b=17 \quad c=10$$

$$x = \frac{-17 \pm \sqrt{(17)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10}}{2 \cdot 3} = \frac{-17 \pm \sqrt{289 - 120}}{6} = \frac{-17 \pm 13}{6} = \begin{cases} \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \\ \frac{-30}{6} = -5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 17x + 10 = 3 \left(x + \frac{2}{3} \right) (x + 5) (3x + 2) (x + 5)$$

➤ $x^2 + 5x = x(x + 5)$ (sacar factor común "x")

Luego la ecuación queda:

$$\frac{7x+7}{(3x+2)(x+5)} - \frac{1}{(3x+2)} = \frac{1}{x(x+5)}$$

• Reducimos las fracciones a mínimo común denominador:

$$\frac{x(7x+7) - x(x+5)}{x(3x+2)(x+5)} = \frac{3x+2}{x(3x+2)(x+5)}$$

• Eliminamos los denominadores (al ser iguales) y nos queda la ecuación:

$$x(7x+7) - x(x+5) = 3x+2$$

• Operamos y reducimos términos semejantes: $\Rightarrow 7x^2 + 7x - x^2 - 5x = 3x + 2 \Rightarrow 6x^2 - x - 2 = 0$

• Resolvemos la ecuación de 2º grado obtenida: $6x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow a = 6 \quad b = -1 \quad c = -2$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{2 \cdot 6} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{12} = \frac{1 \pm 7}{12} = \begin{cases} \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \\ \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ "Posibles soluciones"}$$

$x = \frac{2}{3}$ y $x = -\frac{1}{2}$ no anulan los denominadores por eso los dos son soluciones de la ecuación.

Por tanto,

<p>Las soluciones de la ecuación son $x = \frac{2}{3}$ y $x = -\frac{1}{2}$</p>
--