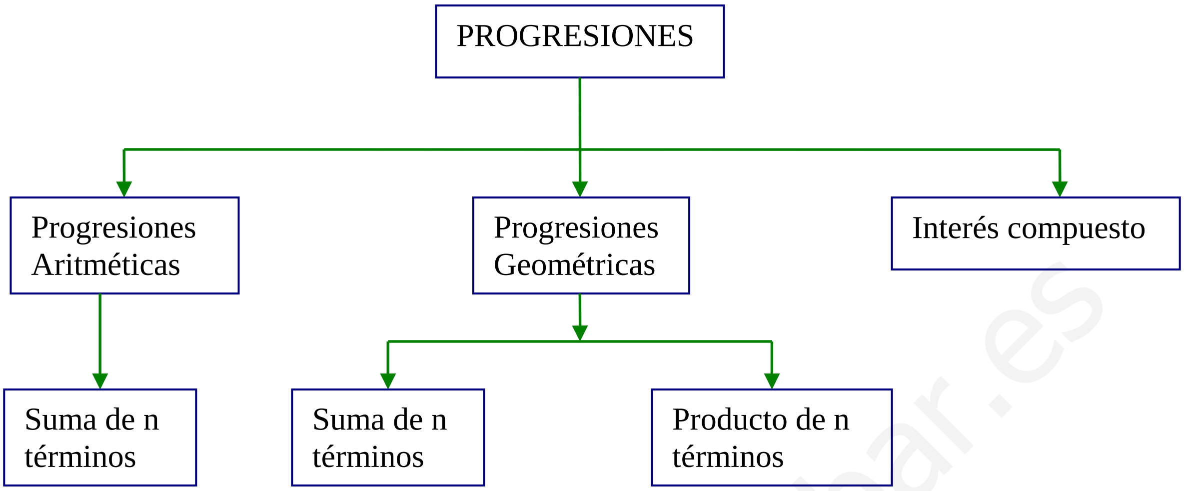
Progresiones aritméticas y geométricas

1. Esquema de la unidad



2. Progresiones aritméticas

Una sucesión de números reales es un conjunto ordenado de infinitos números reales a_1, a_2, a_3, a_4, a_5,..., a_n,... Cada uno de los números reales se llama **término** de la sucesión.

El conjunto ordenado de números impares 3, 5, 7, 9, 11, 13,... es una sucesión de números reales. Al término:

$$a_n = 3 + 2(n-1)$$

se le llama **término general**.

Sin embargo, no todas las sucesiones tienen término general. Por ejemplo, en la importante sucesión de los números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,... no hay ninguna fórmula que exprese el término general.

Consideremos la sucesión de término general $a_n = 3n + 2$

$$\{a_n\} = \{5, 8, 11, 14, 17, 20, ...\}$$

Observamos que cada término de la sucesión es igual que el anterior más 3. Se dice que la sucesión a_n es una progresión aritmética y que $d = 3$ es la diferencia de la progresión.

Definición: Una **progresión aritmética** es una sucesión de números tales que cada uno de ellos (salvo el primero) es igual al anterior más un número fijo llamado diferencia que se representa por *d*.

En la progresión anterior $a_1 = 5$, $a_2 = 8$ y $d = 8 - 5 = 3$.

En ocasiones nos referimos a la progresión formada por los *n* primeros términos de la progresión; en este caso se trata de una progresión aritmética limitada.

Son progresiones aritméticas:

- Los múltiplos de 2 o números pares: 2, 4, 6, 8, 10... La diferencia es $d = 2$.
- Los múltiplos de 3: 3, 6, 9, 12, 15... La diferencia es $d = 3$.

Los múltiplos de a: a, $2a$, $3a$, $4a$, $5a$... La diferencia es $d = a$.

Ejercicio 1:

Escribir los 8 primeros términos de las progresiones aritméticas cuyo término y diferencia se indica en cada caso:

a) $a_1=3$, $d=4$

b) $a_1=-4$, $d=3$

c) $a_1=9$, $d=-2$

d) $a_1=-2$, $d=-3$

e) $a_1=7$, $d=0{,}5$

f) $a_1=6{,}8$, $d=-0{,}3$

2.1 Término general

Fijémonos en la progresión aritmética ilimitada $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n, \ldots$ Según la definición, cada término es igual al anterior más la diferencia.

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$$

Generalizando este proceso se obtiene el término general:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)\cdot d}$$

Ejemplos:

- El término general de la progresión aritmética 5, 8, 11, 14... es:

$$a_n = 5 + (n - 1) \cdot 3 = 5 + 3n - 3 = 3n + 2$$

- El término general de una progresión aritmética en la que $a_1 = 13$ y $d = 2$ es:

$$a_n = 13 + (n - 1) \cdot 2 = 13 + 2n - 2 = 2n + 11$$

- Hallar el primer término de una progresión aritmética sabiendo que $a_{11} = 35$ y $d = 4$. Escribimos $a_{11} = a_1 + (11 - 1) \cdot 4$, es decir, $35 = a_1 + 40$, de donde $a_1 = 35 - 40 = -5$
- Hallar el octavo término de una progresión aritmética, cuyo primer término es 3 y su diferencia 5. Sol: $a_8=38$
- Hallar el primer término de una progresión aritmética que consta de 20 términos, si se sabe que el último es 83 y la diferencia es 4. Sol: $a_1=7$
- ¿Cuántos términos tiene una progresión aritmética cuyo primer término es 15 y el último -90, si la diferencia es -3? Sol: n=36
- Hallar la diferencia de una progresión aritmética que consta de 12 términos siendo 6 el primero y 39 el último. Sol: d=3

Se puede conseguir otra expresión para el término general en función de otro término cualquiera, en lugar del primer término. Como $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ y $a_k = a_1 + (k - 1) \cdot d$, despejando a_1 en ambas expresiones e igualando resulta:

$$\boxed{a_n = a_k + (n - k) \cdot d}$$

Ejercicio 2:

Los datos de cada uno de los apartados corresponden a una progresión aritmética. Calcular la incógnita que se indica en cada uno de ellos:

a) $a_1=3$, $d=4$, $a_8=?$ Sol: 31

b) $a_1=5$, $a_{10}=32$, $d=?$ Sol: 3

c) $a_1=3$, $d=3$, $a_n=36$, $n=?$ Sol: 12

d) $a_8=11$, $d=-2$, , $a_1=?$

e) $a_1=-5$, $a_{11}=-45$, $d=?$

f) $a_{12}=31$, $d=3$, $a_1=?$

g) $a_1=23$, $a_{17}=31$, $d=?$

h) $a_5=-10$, $a_{13}=-8$, $d=?$

i) $a_3=-5/3$, $a_8=-5$, $d=?$

j) $a_6=3$, $a_{14}=-1$, $d=?$

k) $a_{15}=-14$, $a_{24}=16$, $d=?$

l) $a_{11}=6$, $a_{35}=65$, $d=?$ Sol: 59/24

2.2 Interpolación de términos – medios aritméticos

Supongamos que queremos intercalar entre 2 y 14 tres números *a*, *b* y *c* de manera que 2, *a*, *b*, *c*, 14 estén en progresión aritmética.

Tenemos que $a_1 = 2$, $a_5 = 14$ y $n = 5$. Aplicando la expresión del término general de una progresión aritmética, se tiene que: $a_5 = a_1 + 4d$

$$14 = 2 + 4d$$

$$d = 3$$

Por tanto, la progresión aritmética es: 2, 5, 8, 11, 14.

Este problema, que consiste en intercalar varios términos entre dos dados, se denomina **interpolación**. Los términos que hemos hallado se llaman **medios aritméticos**.

Así, *"interpolar "m" medios aritméticos o medios diferenciales entre dos números "a" y "b" significa hallar "m" números* $x_1, x_2, \dots, x_m$ *tal que la sucesión* $a, x_1, x_2, \dots, x_m, b$ *sea una progresión aritmética de m+2 términos."*

- Interpolar 3 medios aritméticos entre 4/3 y 8/5. Sol: 4/3, 21/15,22/15, 23/15, 8/5

Ejercicio 3: a) Interpolar 4 medios aritméticos entre el 1 y el 19. Sol: d=18/5

b) Interpolar 5 medios aritméticos entre el 3/5 y el 23/5. Sol: d=2/3

2.3 Términos equidistantes de los extremos.

Fijemos que en una progresión aritmética finita se verifica que las sumas de los términos equidistantes de los extremos es igual a la suma de dichos extremos.

$$\underbrace{1,\ \underbrace{2,\ \underbrace{3,\ \underbrace{4,\ \underbrace{5,\ 6}_{11},\ 7}_{11},\ 8}_{11},\ 9}_{11},\ 10}_{11}$$

En general, en una progresión aritmética limitada se verifica:

$$a_3 + a_{n-2} = a_2 + a_{n-1} = \dots = a_1 + a_n$$

Ejemplo:

Consideremos la progresión formada por los seis primeros múltiplos de 5:

$$\{a_n\} = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$$

Observemos que la suma de los extremos es:

$$a_1 + a_6 = 5 + 30 = 35$$

y que los términos equidistantes suman lo mismo que los términos extremos:

$$a_2 + a_5 = 10 + 25 = 35$$

$$a_3 + a_4 = 15 + 20 = 35$$

2.4 Suma de n términos consecutivos.

Vamos a utilizar el resultado anterior para calcular la fórmula de la suma de n términos consecutivos de una progresión aritmética. Veámoslo primero con el ejemplo:

¿Cuál es la suma de los seis términos de la progresión 5, 10, 15, 20, 25, 30?

Una forma de hallar la suma de los términos de esta progresión es escribir la suma dos veces invirtiendo los términos en una de ellas.

$$S_6 = 5 + 10 + 15 + 20 + 25 + 30$$

$$S_6 = 30 + 25 + 20 + 15 + 10 + 5 \quad +$$

$$2S_6 = 35 + 35 + 35 + 35 + 35 + 35$$

$$2S_6 = 6 \cdot 35 = 6 \cdot (5 + 30)$$

$$S_6 = [6 \cdot (5 + 30)] : 2 = 105$$

Vamos a generalizar este resultado:

¿Cuál es la suma de los términos de la progresión $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$?

Llamemos S_n a la suma de los n términos y escribamos la suma dos veces, invirtiendo los sumandos en una de ellas. $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$

Sumando las dos igualdades $S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Como hay n paréntesis y el valor de cada uno es $(a_1 + a_n)$ se tiene:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) = (a_1 + a_n)\cdot n$$

de donde:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n}$$

Ejemplos:

- Hallar la suma de los 100 primeros números naturales.
- Idem. de los 100 primeros números pares. Sol: $S_{100}=10100$
- En una progresión aritmética limitada, cuyo primer término es 67 y cuya diferencia es -6, la suma de los n primeros términos es 408 ¿Cuántos términos forman la progresión y cual es el último?

$$\begin{cases} a_n = 67 + (n-1)\cdot(-6) \\ 408 = \dfrac{(67 + a_n).n}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6n + a_n = 73 \\ na_n + 67n = 816 \end{cases} \Rightarrow 6n^2 - 140n + 816 = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} n = 12 \\ n = 34/3 \text{ no vale} \end{array}\right.$$

Solución: 12 términos y el último valdrá 1

Nota: sabemos $\begin{cases} a_n = a_1 + (n-1).d \\ S = \dfrac{a_1 + a_n}{2}\cdot n \end{cases}$ que son 5 incógnitas $\begin{cases} a_1 \\ a_n \\ d \\ n \\ S \end{cases}$ y por tanto si conocemos 3 podremos resolver el sistema.

Ejercicio 4:

- Calcular la suma de: a) los 12 primeros múltiplos de 7.
  b) los 40 primeros múltiplos de 3.
  c) los múltiplos de 6 comprendidos entre 100 y 1000. Sol: S=82350
- Resolver: a) $a_1=4$; $a_n=?$, $d=2$, $n=8$, $S=?$
  b) $a_1=3$; $a_n=21$, $d=?$, $n=?$, $S=120$ Sol: d=2; n=10
  c) $a_1=?$; $a_n=56$, $d=3$, $n=?$, $S=516$

- Sea la progresión 9,…..,162 de 52 términos calcular la diferencia y su suma. Sol: S=4446;d=3
- La suma del tercer y cuarto término de una progresión aritmética es 12 y el sexto término es 1. Formar la progresión sabiendo que tiene 6 términos. Sol: d=-2; 11, 9, 7, 5, 3, 1
- Las edades de 4 hermanos forman una progresión aritmética cuya suma es 32. El mayor tiene 6 años más que el menor. Averiguar los años de los 4 hermanos. Sol: d=2; 5, 7, 9, 11

3. Progresiones geométricas.

Observemos las potencias de 10 que resultan de la sucesión $a_n = 10^{n-1}$.

$$1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, \ldots$$

Cada término de esta sucesión es igual al anterior multiplicado por 10. Esta sucesión es una **progresión geométrica**.

Definición: Una **progresión geométrica** es una sucesión de números tales que cada uno de ellos (salvo el primero) es igual al anterior multiplicado por un número constante llamado **razón**, que se representa por ***r***.

- 1, 2, 4, 8, 16, 32, … r =2
- 2, -2, 2, -2, 2, -2, … r =-1
- 4, -2, 1, -1/2, 1/4, … r =-1/2

Ejercicio 5:

Escribir los 6 primeros términos de las progresiones geométricas cuya razón se indica:

a) $a_1=3$ r =2 b) $a_1=16$ r =1/2

c) $a_1=81$ r=1/3 d) $a_1=1000$ r =1/5

3.1 Término general.

Según la definición anterior, en la progresión geométrica $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n$, se verifica:

$$a_2 = a_1 \cdot r$$

$$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \cdot r = a_1 \cdot r^3$$

Generalizando este proceso se obtiene el término general:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

Ejemplos:

- ¿Cuál es la razón de la progresión geométrica 3, 6, 12,...?

  La razón se obtiene dividiendo un término por el anterior: $r = 6 : 3 = 2$.

- ¿Cuál es el quinto término de una progresión geométrica en la que $a_1 = 2$ y $r = 3$?

  Podemos ir hallando la progresión término a término (2, 6, 18, 54, 162,...) multiplicando cada término por 3, o también se puede obtener directamente:

  $a_5 = a_1 \cdot r^{5-1} = a_1 \cdot r^4$

  $a_5 = 2 \cdot 3^4 = 2 \cdot 81 = 162$

Ejercicio 6:

a) Calcular el término 7º de la progresión 3, 9, 27, …

b) Calcular el primer término de una progresión geométrica que tiene 8 términos, sabiendo que el último es 1280 y que la razón es 2.

c) Calcular la razón de una progresión geométrica que consta de 9 términos, siendo 2 el primero y 781250 el último.

Se puede conseguir otra expresión para el término general en función de otro término cualquiera, en lugar del primer término. Como $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ y $a_k = a_1 \cdot r^{k-1}$, despejando a_1 en ambas expresiones e igualando resulta:

$$\boxed{a_n = a_k \cdot r^{n-k}}$$

3.2 Interpolación de términos – medios geométricos

Supongamos que queremos intercalar entre 3 y 96 cuatro números *a*, *b*, *c* y *d* de manera que 3, *a*, *b*, *c*, *d*, 14 estén en progresión geométrica.

Tenemos que $a_1 = 3$, $a_6 = 96$ y $n = 6$. Aplicando la expresión del término general de una progresión geométrica, se tiene que:

$$a_6 = a_1 \cdot r^5$$
$$96 = 3 \cdot r^5$$
$$32 = r^5$$
$$r = 2$$

Por tanto, la progresión geométrica es: 3, 6, 12, 24, 48, 96.

Este problema, que consiste en intercalar varios términos entre dos dados, se denomina **interpolación**. Los términos que hemos hallado se llaman **medios geométricos** o **proporcionales**.

Así, *"interpolar "m" medios geométricos o medios diferenciales entre dos números "a" y "b" significa hallar "m" números* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *tal que la sucesión* $a, x_1, x_2, \ldots, x_m, b$ *sea una progresión geométrica de m+2 términos."*

Ejemplo:

- Interpolar cuatro medios geométricos entre 4/5 y 293/40. Sol: 6/5, 9/5, 27/10, 81/20 r=3/2

Ejercicio 7:

Interpolar 5 medios geométricos entre los dos números de cada apartado:

a) 5 y 320 b) 0,3 y 0,0000003 c) 27/16 y 4/27

3.3 Términos equidistantes de los extremos.

Fijemos que en una progresión geométrica finita se verifica que los productos de los términos equidistantes de los extremos es igual al producto de dichos extremos.

$$\underbrace{1,\ \underbrace{2,\ \underbrace{4,\ \underbrace{8,\ \underbrace{16,\ 32}_{512},\ 64}_{512},\ 128}_{512},\ 256}_{512},\ 512}_{512}$$

Observemos que en la progresión geométrica:

$$3, 6, 12, 24, 48$$

el producto de los términos extremos es:

$$3 \cdot 48 = 144$$

y que el producto de los términos equidistantes de los extremos es también 144.

En general, en una progresión geométrica limitada se verifica:

$$a_3 \cdot a_{n-2} = a_2 \cdot a_{n-1} = \ldots = a_1 \cdot a_n$$

3.4 Producto de n términos consecutivos.

Vamos a utilizar el resultado anterior para calcular la fórmula del producto de *n* términos consecutivos de una progresión geométrica. Llamemos P_n al producto de los *n* términos y escribamos el producto dos veces, invirtiendo los factores en una de ellas.

$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{n-1} \cdot a_n$

$P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot ... \cdot a_2 \cdot a_1$ X Multiplicando las dos igualdades resulta:

$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \cdot ... \cdot (a_{n-1} \cdot a_2) \cdot (a_n \cdot a_1)$

Como hay *n* paréntesis y el valor de cada uno es $(a_1 \cdot a_n)$ se tiene:

$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_1 \cdot a_n) \cdot ... \cdot (a_1 \cdot a_n) = (a_1 \cdot a_n)^n$

de donde:

$$\boxed{P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}}$$

Ejemplo:

- Hallar el producto de las 8 primeras potencias de 3.

Ejercicio 8:

Calcular el producto de los 5 primeros términos de cada una de las siguientes progresiones geométricas:

a) 2, 6, 18,…. b) 5, 20, 80, … c) 2/3, 4/9, 8/27; …

d) $2\sqrt{2}, 8, 18\sqrt{2}, ...$ e) 3, 15, 75, … f) 3/8, 15/16, 75/32, …

3.5 Suma de n términos consecutivos.

Si queremos calcular la suma de los términos de la progresión geométrica limitada a_1, a_2, a_3,..., a_{n-1}, a_n, escribimos la suma S_n de los *n* términos y después multiplicamos por la razón.

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n \cdot r = a_1 \cdot r + a_2 \cdot r + ... + a_{n-1} \cdot r + a_n \cdot r$$

Ahora restamos $S_n \cdot r - S_n$ teniendo en cuenta que $a_1 \cdot r = a_2$, $a_2 \cdot r = a_3$, etc.

$$S_n \cdot r - S_n = a_n \cdot r - a_1$$

$$S_n \cdot (r - 1) = a_n \cdot r - a_1,$$

de donde:

$$\boxed{S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}}$$

Usando la expresión del término general de una progresión geométrica $a_n = a_1 \cdot r^n$, se puede obtener la fórmula de la suma en función de a_1 y r así:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 \cdot \left(r^n - 1\right)}{r - 1}}$$

3.6 Suma de los términos de una progresión geométrica decreciente.

La progresión $a_n = 2 \cdot 10^{1-n} \Leftrightarrow 2, 2/10, 2/100, 2/1000, \ldots$ es una progresión geométrica de razón positiva y menor que 1 ($r = 1/10$), es decir, es una progresión geométrica decreciente e ilimitada y sus términos se hacen cada vez menores, pudiendo llegar a ser más pequeños que cualquier número dado.

Para obtener la fórmula de la suma de estas progresiones multiplicamos por -1 el numerador y el denominador de la fórmula anterior:

$$S_n = \frac{a_1\left(r^n - 1\right)}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 - a_1 \cdot r^n}{1 - r} = \frac{a_1}{1 - r} - \frac{a_1 \cdot r^n}{1 - r}$$

Si r es positivo y menor que la unidad, por ejemplo $r = 1/100$, ¿qué ocurre con la suma anterior al crecer n?

La primera fracción permanece constante, pues no depende de n, pero r^n se hace tan pequeño como queramos. Por esta razón, para hallar la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica decreciente se utiliza esta fórmula:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1}{1 - r}}$$

4. Interés simple e interés compuesto

Una aplicación clara de las progresiones geométricas es el interés compuesto. Vamos a verlo con un ejemplo y recordando previamente el interés simple.

Cuando una persona deposita un capital en un banco durante un cierto tiempo, el banco paga intereses. Dependiendo de que se retiren o no los intereses periódicamente, el interés se llama simple o compuesto.

¿En cuánto se convierte un capital de 1.600.000 € al 10 % en dos años a interés simple? ¿Y a interés compuesto?

Veamos cada caso por separado:

4.1 Interés simple.

- Como el interés que produce 1 € en 1 año es de 10/100 €. = 0,1 €, el interés total es:

$$1.600.000 \cdot 0{,}1 = 160.000 \text{ €}$$

Al final del primer año retiramos los intereses y el capital sigue siendo el mismo: 1.600.000 € En el segundo año, el capital vuelve a producir otras 160.000 €

- En los dos años el interés producido es:

$$160.000 + 160.000 = 320.000 \text{ €}$$

Por tanto, el capital se convierte en los dos años en:

$$1.600.000 + 320.000 = 1.920.000 \text{ €}$$

- Se puede obtener directamente el interés en los dos años:

$$i = 1.600.000 \cdot 0{,}1 \cdot 2 = 320.000 \text{ €}$$

En general, si *C* es el capital, *r* es el tanto por ciento anual y *t* es el tiempo en años, entonces el **interés simple** es:

$$\boxed{i = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}}$$

Si el tiempo viene dado en meses la fórmula es:

$$\boxed{i = \frac{C \cdot r \cdot t}{12 \cdot 100} = \frac{C \cdot r \cdot t}{1200}}$$

Si el tiempo viene expresado en días la fórmula es:

$$\boxed{i = \frac{C \cdot r \cdot t}{360 \cdot 100} = \frac{C \cdot r \cdot t}{36.000}}$$

4.2 Interés compuesto.

- En el primer año la ganancia del capital es la misma estando depositado a interés simple o a interés compuesto: 160.000 €

  Al final del primer año las 160.000 € ganadas no se retiran, por lo que el capital, al empezar el segundo año, es de 1.760.000 €

  En el segundo año el interés que 1.760.000 € producen es:

  $$1.760.000 \cdot 0{,}1 = 176.000 \text{ €}$$

- En los dos años el interés producido es:

  $$160.000 + 176.000 = 336.000 \text{ €}$$

  Por tanto, el capital de 1.600.000 € se convierte en los dos años en:

  $$1.600.000 + 336.000 = 1.936.000 \text{ €}$$

- Se puede obtener directamente el capital final al cabo de los dos años:

  $$C = 1.600.000 \cdot (1 + 0{,}1)^2 = 1.936.000 \text{ €}$$

  En general, el capital final (C_t) que se obtiene a partir de un capital C en t años, al tanto por ciento anual r es:

  $$\boxed{C_t = C \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t}$$