

Sucesiones

Una sucesión es un conjunto de números dados ordenadamente de modo que se puedan numerar: primero, segundo, tercero...

Ejemplos:

- a) 1, 3, 5, 7, 9, 11...
- b) 1, 4, 9, 16, 25, 36...
- c) 2, 4, 8, 16, 32, 64...

Se llaman **términos** a los elementos de la sucesión y se suelen designar mediante una letra con subíndice. El subíndice indica el lugar que ocupa el término en la sucesión.

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$

Término general

Se llama término general de una sucesión a una expresión que sirve para obtener un término cualquiera de la sucesión con sólo saber el lugar que ocupa.

En los ejemplos anteriores, los términos generales son:

- a) $a_n = 2n - 1$
- b) $b_n = n^2$
- c) $c_n = 2^n$

No en todas las sucesiones es posible encontrar el término general.

Sucesiones recurrentes

Las sucesiones recurrentes son sucesiones cuyos términos se obtienen a partir de los anteriores.

Ejemplo:

1, 1, 2, 3, 5, 8, Cada término es la suma de los dos anteriores

Ley de recurrencia: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ($a_1 = 1; a_2 = 1$)

Progresiones aritméticas

Una **progresión aritmética** es un tipo de **sucesión** en la que cada término se obtiene sumando al anterior una cantidad fija denominada **diferencia (d)**.

Ejemplos: 1, 3, 5, 7, 9..... $a_1=1$ y $d=2$

8, 5, 2, -1, -4,... $a_1=8$ y $d=-3$

Término general

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$$

$$a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d$$

$$a_6 = a_1 + 5d$$

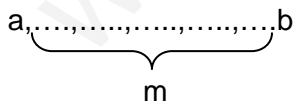
$$a_7 = a_1 + 6d$$

.....

$$\boxed{a_n = a_1 + (n - 1) d}$$

Interpolar términos en una progresión aritmética

Entre cada dos términos a y b de una progresión aritmética es posible intercalar en m términos, llamados **medios diferenciales (aritméticos)**, de manera que todos ellos formen una nueva progresión aritmética (con $m + 2$ términos) donde a y b sean los extremos.



La diferencia de esta progresión se determinará:

$$\boxed{d = \frac{b - a}{m + 1}}$$

Suma de los términos de una progresión aritmética

Una forma de hallar la suma de los términos de una progresión aritmética es escribir la suma dos veces invirtiendo los términos en una de ellas.

$$\begin{array}{r} S_6 = 5 + 10 + 15 + 20 + 25 + 30 \\ + \\ S_6 = 30 + 25 + 20 + 15 + 10 + 5 \\ \hline 2 S_6 = 35 + 35 + 35 + 35 + 35 + 35 \\ \\ 2 S_6 = 6 \cdot 35 = 6 \cdot (5 + 30) \\ \\ S_6 = \frac{6 \cdot (5 + 30)}{2} = \frac{6 \cdot 35}{2} = 105 \end{array}$$

Generalizaremos este resultado para determinar la suma de un número finito, n , de términos de una progresión aritmética, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$,

Llamaremos S_n a la suma de los n términos y escribiremos la suma dos veces, invirtiendo los sumandos en una de ellas.

$$\begin{array}{r} S_n = a_1 + a_2 + a_3 \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ + \\ S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} \dots + a_3 + a_2 + a_1 \\ \hline \end{array}$$

Sumando las dos igualdades resulta:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Los pares de términos a_1 y a_n , a_2 y a_{n-1} , a_3 y a_{n-2} , etc, que son equidistantes suman una misma cantidad.

Como hay n paréntesis y el valor de cada uno es $(a_1 + a_n)$ se tiene:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) = (a_1 + a_n) \cdot n$$

De donde:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Progresiones geométricas

Una **progresión geométrica** es un tipo de **sucesión** en la que cada término se obtiene multiplicando el anterior una cantidad fija denominada **razón (r)**.

Ejemplos: 3, 6, 12, 24, 48..... $a_1=3$ y $r=2$

4, 2, 1, 1/2, 1/4... $a_1=4$ y $r=1/2$

Término general

$$a_2 = a_1 \cdot r$$

$$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \cdot r = a_1 \cdot r^3$$

$$a_5 = a_4 \cdot r = a_1 \cdot r^3 \cdot r = a_1 \cdot r^4$$

$$a_6 = a_1 \cdot r^5$$

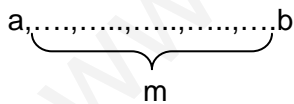
$$a_7 = a_1 \cdot r^6$$

.....

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

Interpolar términos en una progresión geométrica

Entre cada dos términos a y b de una progresión geométrica es posible intercalar m términos, llamados **medios proporcionales (geométricos)**, de manera que todos ellos formen una nueva progresión geométrica (con $m + 2$ términos) donde a y b sean los extremos.



La razón de esta progresión se determinará:

$r = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$

Suma de los términos de una progresión geométrica

Para calcular la suma de los términos de la progresión geométrica limitada $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$, escribiremos la suma S_n de los n términos y después multiplicamos por la razón.

$$S_n \cdot r = \underbrace{a_1}_{a_1} \cdot r + \underbrace{a_2}_{a_2} \cdot r + \dots + \underbrace{a_{n-2}}_{a_{n-2}} \cdot r + \underbrace{a_{n-1}}_{a_{n-1}} \cdot r + \underbrace{a_n}_{a_n} \cdot r$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

Restando $S_n \cdot r - S_n$ resulta:

$$S_n \cdot r - S_n = a_n \cdot r - a_1$$

$$S_n \cdot (r - 1) = a_n \cdot r - a_1,$$

De donde:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

Usando la expresión del término general de una progresión geométrica $a_n = a_1 \cdot r^n$, se puede obtener la fórmula de la suma en función de a_1 y r así:

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

Para progresiones geométricas ilimitadas y decrecientes $|r| < 1$, en las que sus términos se hacen cada vez menores, cada vez más cercanos a cero, la suma de sus infinitos términos puede obtenerse:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}$$

Producto de los términos de una progresión geométrica

Una forma de hallar el producto de los términos de una progresión geométrica es escribir el producto dos veces invirtiendo los términos en una de ellas.

$$\begin{array}{r} P_6 = 5 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 40 \cdot 80 \cdot 160 \\ \times \\ P_6 = 160 \cdot 80 \cdot 40 \cdot 20 \cdot 10 \cdot 5 \\ \hline P_6^2 = 800 \cdot 800 \cdot 800 \cdot 800 \cdot 800 \cdot 800 \\ P_6^2 = (5 \cdot 160)^6 = 800^6 \\ P_6 = \sqrt{(5 \cdot 160)^6} = \sqrt{800^6} = 512000000 \end{array}$$

Generalizaremos este resultado para determinar el producto de un número finito, n , de términos de una progresión geométrica, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$.

Llamaremos P_n al producto de los n términos y escribiremos el producto dos veces, invirtiendo los factores en una de ellas.

$$\begin{array}{r} P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n \\ \times \\ P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \dots \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 \\ \hline \end{array}$$

Multiplicando las dos igualdades resulta:

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \cdot (a_3 \cdot a_{n-2}) \dots \dots (a_{n-2} \cdot a_3) \cdot (a_{n-1} \cdot a_2) \cdot (a_n \cdot a_1)$$

El producto de los pares de términos a_1 y a_n , a_2 y a_{n-1} , a_3 y a_{n-2} , etc, que son equidistantes es una misma cantidad.

Como hay n paréntesis y el valor de cada uno es $(a_1 \cdot a_n)$ se tiene:

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_1 \cdot a_n) \cdot \dots \cdot (a_1 \cdot a_n) = (a_1 \cdot a_n)^n$$

De donde:

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Progresiones geométricas alternantes

Cuando la razón de una progresión geométrica es un número negativo, sus términos sucesivos adoptan signos mutuamente contrarios. Este tipo especial de progresión recibe el nombre de alternante.

$$2, -6, 18, -54, 162, -486, \dots \quad a_1 = 2 \text{ y } r = -3$$