

PÁGINA 280

PRACTICA

Muy probable, poco probable

1 Tenemos muchas bolas de cada uno de los siguientes colores: negro (N), rojo (R), verde (V) y azul (A), y una gran caja vacía.

Echamos en la caja 1 R, 50 V y 200 A. Removemos y extraemos una al azar. Asocia con flechas:

$P[R]$	Imposible
$P[V]$	Muy poco probable
$P[A]$	Poco probable
$P[N]$	Muy probable

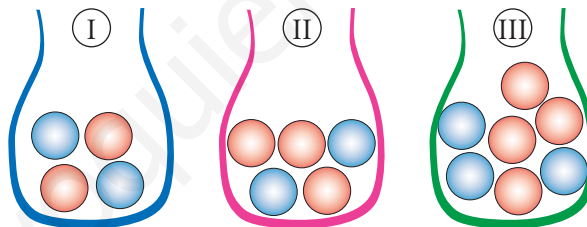
$P[R] \longrightarrow$ Muy poco probable

$P[V] \longrightarrow$ Poco probable

$P[A] \longrightarrow$ Muy probable

$P[N] \longrightarrow$ Imposible

2 Razona de cuál de las bolsas siguientes es más probable sacar bola roja:



$$P_I[R] = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$P_{II}[R] = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$P_{III}[R] = \frac{4}{7} = 0,57$$

Por tanto, es más probable extraer bola roja de la bolsa II.

Espacio muestral. Sucesos

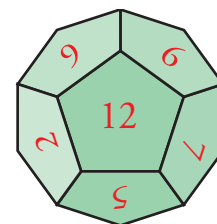
3 Lanzamos un dado con forma de dodecaedro con las caras numeradas del 1 al 12 y anotamos el número obtenido.

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Escribe los sucesos:

A = "Menos de 5"; B = "Más de 4"

C = "Número par"; D = "No múltiplo de 3"



a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

b) $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

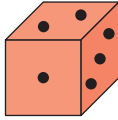
$C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$; $D = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}$

- 4** ■■■ Nos fijamos en la cifra en la que termina el premio gordo de la lotería.
- Describe el espacio muestral.
 - Describe los sucesos:
 - A = “Menor que 4”
 - B = “Número impar”
 - C = “Mayor que 5”
- a) $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
 b) A = $\{0, 1, 2, 3\}$
 B = $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
 C = $\{6, 7, 8, 9\}$
- 5** ■■■ Escribimos cada una de las letras de la palabra JUEGO en un papel diferente y las ponemos en una bolsa. Extraemos una letra al azar.
- Describe los sucesos elementales de este experimento aleatorio.
 - Describe el suceso “obtener vocal”.
 - Si la palabra elegida fuera PROBABILIDAD, ¿cómo responderías a los apartados a) y b)?
- a) Sucesos elementales: $\{J\}, \{U\}, \{E\}, \{G\}, \{O\}$
 b) “Obtener vocal” = $\{U, E, O\}$
 c) Sucesos elementales: $\{P\}, \{R\}, \{O\}, \{B\}, \{A\}, \{I\}, \{L\}, \{D\}$
 “Obtener vocal” = $\{O, A, I\}$
- 6** ■■■ Lanzamos una moneda dos veces y anotamos los resultados ordenadamente.
- Completa el espacio muestral: $E = \{CC, \dots\}$
 - Escribe los sucesos siguientes:
 - A = “La primera fue cara”
 - B = “Ninguna fue cara”
- a) $E = \{CC, C+, +C, ++\}$
 b) A = $\{CC, C+\}$
 B = $\{++\}$
- 7** ■■■ Lanzamos una moneda tres veces y anotamos los resultados.
- Describe el espacio muestral (hay 8 casos).
 - Describe los sucesos:
 - A = “Obtener dos veces cara”
 - B = “Obtener dos veces cruz”
 - C = “No obtener ninguna cruz”
- a) $E = \{CCC, CC+, C+C, C++, +CC, +C+, ++C, +++\}$
 b) A = $\{CC+, C+C, +CC\}$
 B = $\{C++, +C+, ++C\}$
 C = $\{CCC\}$

Probabilidad

8 ■■■ Halla la probabilidad de obtener un 2 y la probabilidad de obtener un 5, al lanzar un dado correcto en cada uno de estos casos:

a)



(Cubo numerado del 1 al 6)

b)



(Octaedro numerado del 1 al 8)

c)



(Tetraedro numerado del 1 al 4)

$$a) P[2] = \frac{1}{6}; P[5] = \frac{1}{6}$$

$$b) P[2] = \frac{1}{8}; P[5] = \frac{1}{8}$$

$$c) P[2] = \frac{1}{4}; P[5] = 0$$

9 ■■■ En una bolsa hay 6 bolas rojas, 4 azules, 7 verdes, 2 amarillas y una negra. Extraemos una al azar. Halla la probabilidad de que:

- a) Sea azul.
- b) No sea negra.
- c) Sea roja o verde.
- d) No sea amarilla ni negra.

En total hay 20 bolas.

$$a) P[\text{AZUL}] = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

$$b) P[\text{NO NEGRA}] = \frac{19}{20}$$

$$c) P[\text{ROJA O VERDE}] = \frac{13}{20}$$

$$d) P[\text{NO AMARILLA Y NO NEGRA}] = \frac{17}{20}$$

PÁGINA 281

10 ■■■ En un examen para unas oposiciones hay 80 temas, de los cuales se elige uno al azar. Si un opositor se sabe 60 de los temas, halla la probabilidad de que:

- a) Le toque uno de los que sabe.
- b) Le toque uno de los que no sabe.

$$a) \frac{60}{80} = \frac{3}{4}$$

$$b) \frac{20}{80} = \frac{1}{4}$$

PIENSA Y RESUELVE

11 ■■■ Halla las probabilidades siguientes asociadas al lanzamiento de un dado correcto:

- a) El resultado es múltiplo de 3. b) El resultado es múltiplo de 2.
 c) El resultado es mayor que 1. d) El resultado es menor que 5.
 e) El resultado es menor que 1.

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$a) P[\text{MÚLTIPLO DE 3}] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$b) P[\text{MÚLTIPLO DE 2}] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$c) P[\text{RESULTADO MAYOR QUE 1}] = \frac{5}{6}$$

$$d) P[\text{RESULTADO MENOR QUE 5}] = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$e) P[\text{RESULTADO MENOR QUE 1}] = 0$$

12 ■■■ En un colegio hay 990 alumnos matriculados, de los cuales 510 son niñas. Si elegimos al azar un estudiante de ese colegio, ¿cuál es la probabilidad de que sea niño?

$$990 - 510 = 480 \text{ niños}$$

$$P[\text{NIÑO}] = \frac{480}{990} = 0,485$$

13 ■■■ En un instituto, los alumnos y las alumnas están distribuidos por cursos del modo siguiente:

1.º ESO	2.º ESO	3.º ESO	4.º ESO	1.º Bach.	2.º Bach.
210	250	260	220	140	120

Si elegimos un estudiante al azar, calcula la probabilidad de que:

- a) Sea de 3.º ESO.
 b) Sea de ESO.
 c) Sea de Bachillerato.

Hay 1 200 alumnos en total.

$$a) P[3.º \text{ ESO}] = \frac{260}{1\,200} = 0,22$$

$$b) 210 + 250 + 260 + 220 = 940 \text{ alumnos de ESO}$$

$$P[\text{ESO}] = \frac{940}{1\,200} = 0,78$$

$$c) 140 + 120 = 260 \text{ alumnos de Bachillerato}$$

$$P[\text{BACHILLERATO}] = \frac{260}{1\,200} = 0,22$$

13 Soluciones a los ejercicios y problemas

15 Extraemos una carta de una baraja española de 40 naipes. Halla la probabilidad de que:

a) Sea un CINCO.

b) NO sea un CABALLO.

c) La carta sea de OROS o de COPAS.

d) NO sea de ESPADAS.

$$a) P[5] = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$b) P[\text{NO CABALLO}] = \frac{36}{40} = \frac{9}{10} = 0,9$$

$$c) P[\text{OROS O COPAS}] = \frac{20}{40} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$d) P[\text{NO ESPADAS}] = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} = 0,75$$

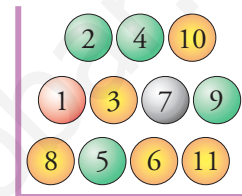
16 De esta urna extraemos una bola y observamos su número y color. Halla las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) Obtener bola verde con número par.

b) Obtener bola roja con número par.

c) Obtener bola amarilla o roja.

d) Obtener una bola con número mayor que 7.



$$a) P[\text{VERDE CON NÚMERO PAR}] = \frac{2}{11} \text{ (son las bolas 2 y 4)}$$

$$b) P[\text{ROJA Y PAR}] = 0 \text{ (no hay ninguna roja con número par)}$$

$$c) P[\text{AMARILLA O ROJA}] = \frac{6}{11}$$

$$d) P[\text{NÚMERO} > 7] = \frac{4}{11}$$

17 Lanzamos una moneda y un dado y observamos los resultados obtenidos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener CRUZ y CINCO?

b) ¿Y la de obtener CARA y NÚMERO PAR?

	1	2	3	4	5	6
C	C1	C2	C3	C4	C5	C6
+	+1	+2	+3	+4	+5	+6

$$a) P[\text{CRUZ Y 5}] = \frac{1}{12}$$

$$b) P[\text{CARA Y PAR}] = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

18 En un libro de 120 páginas, hemos contado el número de erratas en cada una de las páginas. Los resultados se resumen en esta tabla:

N.º ERRATAS	N.º PÁGINAS
0	58
1	42
2	16
3	3
4	1

Al elegir una página al azar:

- ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga ninguna errata?
- ¿Cuál es la probabilidad de que tenga exactamente dos erratas?
- ¿Y la de que tenga alguna errata? ¿Y la de que tenga más de tres?

$$a) P[\text{NINGUNA ERRATA}] \approx f_r[\text{NINGUNA ERRATA}] = \frac{58}{120} = 0,48$$

$$b) P[\text{DOS ERRATAS}] \approx f_r[\text{DOS ERRATAS}] = \frac{16}{120} = 0,13$$

$$c) P[\text{ALGUNA ERRATA}] \approx f_r[\text{ALGUNA ERRATA}] = \frac{62}{120} = 0,52$$

$$P[\text{MÁS DE TRES ERRATAS}] \approx f_r[\text{MÁS DE TRES ERRATAS}] = \frac{1}{120} = 0,01$$

PÁGINA 282

19 ■■■ El número total de adultos y niños que viven con el virus del VIH en el mundo en el año 2006 era de, aproximadamente, 39 600 000 personas.

Dentro de este total, 24 700 000 eran del África Subsahariana; 740 000, de Europa Occidental; 1 400 000, de América del Norte y el resto, de otros lugares del planeta.

Si elegimos al azar una persona que vive con el VIH:

- ¿Cuál es la probabilidad de que proceda del África Subsahariana?
- ¿Y de que sea de Europa Occidental?
- ¿Y de América del Norte?

$$a) P[\text{ÁFRICA SUBSAHARIANA}] = \frac{24\,700\,000}{39\,600\,000} = 0,62$$

$$b) P[\text{EUROPA OCCIDENTAL}] = \frac{740\,000}{39\,600\,000} = 0,02$$

$$c) P[\text{AMÉRICA DEL NORTE}] = \frac{1\,400\,000}{39\,600\,000} = 0,04$$

20 ■■■ Si lanzamos una moneda cuatro veces, ¿cuál es la probabilidad de obtener exactamente dos caras? ¿Y la de obtener al menos dos caras?

CCCC +CCC

CCC+ +CC+

CC+C +C+C

CC++ +C++

C+CC ++CC

C+C+ ++C+

C++C +++C

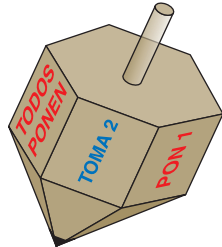
C+++ ++++

$$P[\text{EXACTAMENTE DOS CARAS}] = \frac{6}{16}$$

$$P[\text{AL MENOS DOS CARAS}] = \frac{11}{16}$$

13 Soluciones a los ejercicios y problemas

- 21 ■■■ La *perinola* es un juego infantil en el que cada jugador tiene un montón de fichas. También hay un montón común en el centro. Cada uno, en su turno, hace girar la perinola, que tiene los siguientes casos referidos a las fichas en juego: {Pon 1, Pon 2, Toma 1, Toma 2, Toma todo, Todos ponen una}.



Al girar la perinola uno de los jugadores, calcula la probabilidad de que:

- Le toque llevarse todas las fichas del montón central (“Toma todo”).
- Le toque poner alguna ficha.
- El resultado afecte a otros jugadores (“Todos ponen”).

a) $P[\text{TOMA TODO}] = \frac{1}{6}$

b) $P[\text{PONE ALGUNA FICHA}] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

c) $P[\text{TODOS PONEN}] = \frac{1}{6}$

- 22 ■■■ Encima de una mesa tenemos estas cuatro cartas de una baraja española:



Sacando al azar otra carta del mazo y fijándonos en su número, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de las puntuaciones de las cinco cartas (las cuatro de la mesa y la extraída del mazo) sea 15? ¿Y el 16?

$5 + 1 + 4 + 2 = 12$ son los puntos de las que ya hay. Para que la suma sea 15, la nueva carta debe ser un 3. Quedan los 4 “treses” en las 36 cartas restantes.

Por tanto, $P[\text{SUMA 15}] = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = 0,111$

Para que la suma sea 16, la nueva carta debe ser “cuatro”. Quedan 3 “cuatros” entre las 36 cartas sin repartir.

Por tanto, $P[\text{SUMA 16}] = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = 0,083$

24 ■■■ Extraemos una ficha de dominó. Halla la probabilidad de que:

- a) La suma de puntos sea menor que 4.
 b) La suma de puntos sea múltiplo de 3.
 c) Sea una ficha “doble”.
- a) Suma menor que 4: 0-3, 1-2, 0-2, 1-1, 0-1, 0-0

$$P[\text{SUMA} < 4] = \frac{6}{28} = \frac{3}{14} = 0,21$$

- b) 0-0, 0-3, 1-2, 0-6, 1-5, 2-4, 3-3, 3-6, 4-5, 6-6

$$P[\text{SUMA MÚLTIPLO 3}] = \frac{10}{28} = \frac{5}{14} = 0,36$$

- c) 0-0, 1-1, 2-2, 3-3, 4-4, 5-5, 6-6

$$P[\text{DOBLE}] = \frac{7}{28} = \frac{1}{4} = 0,25$$

25 ■■■ Lanzamos dos dados. Calcula la probabilidad de que:

- a) El producto de las puntuaciones sea 5.
 b) El producto de las puntuaciones sea 6.
 c) El producto de las puntuaciones sea 4.

👁️ Haz una tabla con todos los casos posibles.

a) 1 y 5, 5 y 1 $P[\text{PRODUCTO} = 5] = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

b) 1 y 6, 2 y 3, 3 y 2, 6 y 1 $P[\text{PRODUCTO} = 6] = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

c) 1 y 4, 2 y 2, 4 y 1 $P[\text{PRODUCTO} = 4] = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

PÁGINA 283

26 ■■■ Una botella contiene 20 bolas de colores negro, rojo y verde. No sabemos cuántas de cada color, ni podemos verlo, porque la botella es opaca. Solo podemos ver, cuando la tumbamos, el color de la bola que queda junto al tapón, que es transparente.

Durante unos días hacemos 1 000 veces la experiencia de *agitar, inclinar la botella y anotar el color de la bola que se ve*. Hemos obtenido estos resultados:

$$f(\text{●}) = 461 \quad f(\text{●}) = 343 \quad f(\text{●}) = 196$$

Podemos averiguar, con cierta seguridad, cuántas bolas hay de cada color. Hagámoslo con las negras:

$$f_r(\text{●}) = \frac{461}{1000} = 0,461$$

$$P[\text{●}] = \frac{n}{20} \quad (n \text{ es el número de bolas negras})$$

Como $f_r(\bullet) \approx P[\bullet]$, hacemos:

$$0,461 \approx \frac{n}{20} \rightarrow n \approx 20 \cdot 0,461 = 9,22$$

Estimamos que el número de bolas negras es 9.

¿Cuántas bolas de cada color hay en la botella?

• Bolas rojas: $0,343 \approx \frac{n}{20} \rightarrow n \approx 20 \cdot 0,343 = 6,86 \rightarrow n = 7$

• Bolas verdes: $0,196 \approx \frac{n}{20} \rightarrow n \approx 20 \cdot 0,196 = 3,92 \rightarrow n = 4$

Por tanto, estimamos que hay 9 bolas negras, 7 rojas y 4 verdes.

27 ■■■ Elisa, para estudiar el comportamiento de un dado chapucero, lo ha lanzado 1 200 veces, obteniendo estos resultados:

CARAS	1	2	3	4	5	6
N.º DE VECES	248	355	175	180	126	116

a) Halla la frecuencia relativa de cada una de las seis caras, expresando los resultados en forma de fracción y de decimal con tres cifras decimales.

b) Justifica que es razonable decir que las probabilidades de las caras son, aproximadamente:

$$P[1] = 0,2 \quad P[2] = 0,3 \quad P[3] = 0,15$$

$$P[4] = 0,15 \quad P[5] = 0,1 \quad P[6] = 0,1$$

$$a) f_r(1) = \frac{248}{1\,200} = 0,207 \quad f_r(2) = \frac{355}{1\,200} = 0,296 \quad f_r(3) = \frac{175}{1\,200} = 0,146$$

$$f_r(4) = \frac{180}{1\,200} = 0,15 \quad f_r(5) = \frac{126}{1\,200} = 0,105 \quad f_r(6) = \frac{116}{1\,200} = 0,097$$

b) $0,207 \approx 0,2$; $0,296 \approx 0,3$; $0,146 \approx 0,15$; $0,105 \approx 0,1$; $0,097 \approx 0,1$

Por tanto, a la vista de la experiencia, sí es razonable afirmar que las probabilidades son las que se nos dice.

R REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

28 ■■■ Responde verdadero o falso a estas afirmaciones:

- La probabilidad es un número comprendido entre 0 y 1.
- Al lanzar un dado correcto, es más probable obtener un 2 que un 5.
- Si un suceso es muy probable, su probabilidad es próxima a 1.
- Si al lanzar una moneda seis veces nos ha salido CARA en los seis casos, la próxima vez es más probable que salga CRUZ.

13 Soluciones a los ejercicios y problemas

- a) Verdadero, porque la probabilidad de un suceso se define mediante la ley de Laplace como:

$$P[S] = \frac{\text{n.º casos favorables}}{\text{n.º casos posibles}}$$

y el numerador es menor o igual que el denominador.

- b) Falso. Si el dado es correcto $P[2] = P[5] = \frac{1}{6}$.

- c) Verdadero, porque si el número de casos favorables es muy grande respecto al de casos posibles, $P[S] \approx 1$.

- d) Falso, la probabilidad es la misma en cualquier lanzamiento.

$$P[C] = P[+] = \frac{1}{2}$$

PROFUNDIZA

- 29 ■■■ Se han hecho análisis de sangre a 200 personas para determinar su grupo sanguíneo, así como el Rh. Los resultados se resumen en esta tabla:

	GRUPO A	GRUPO B	GRUPO AB	GRUPO O	TOTALES
RH +	74	12	6	70	162
RH -	18	3	1	16	38
TOTALES	92	15	7	86	200

Este tipo de tabla se llama tabla de contingencia.

- a) Si elegimos al azar una persona de entre esas 200, ¿cuál es la probabilidad de que su grupo sanguíneo sea A? ¿Y de que sea O? ¿Y de que tenga Rh+?
- b) Si elegimos una persona del grupo sanguíneo B, ¿cuál es la probabilidad de que tenga Rh+?

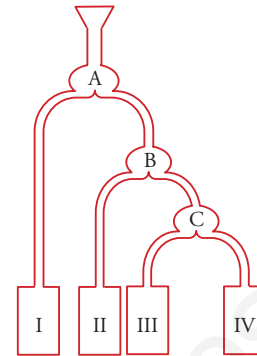
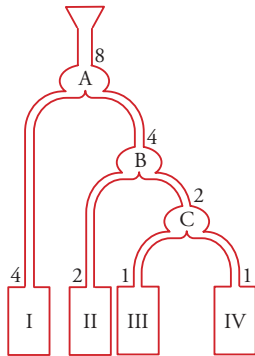
a) $P[A] = \frac{92}{200} = 0,46$ $P[O] = \frac{86}{200} = 0,43$ $P[\text{Rh}+] = \frac{162}{200} = 0,81$

b) Si elegimos alguien con grupo B: $P[\text{Rh}+] = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0,8$

30 ■■■ Dejamos caer una bola en el embudo de este aparato.

Calcula la probabilidad de que caiga en cada uno de los depósitos I, II, III y IV.

Si tirásemos 8 bolas y se repartieran equitativamente:



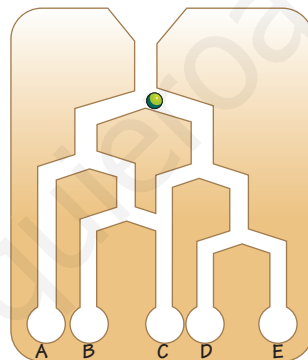
$$P[\text{I}] = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P[\text{II}] = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

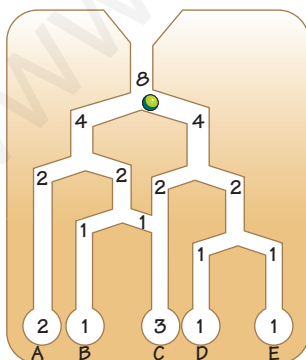
$$P[\text{III}] = \frac{1}{8}$$

$$P[\text{IV}] = \frac{1}{8}$$

31 ■■■ ¿Cuál es la probabilidad de que una bola caiga en cada uno de los depósitos?



Si tirásemos 8 bolas:



$$P[\text{A}] = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P[\text{B}] = \frac{1}{8}$$

$$P[\text{C}] = \frac{3}{8}$$

$$P[\text{D}] = \frac{1}{8}$$

$$P[\text{E}] = \frac{1}{8}$$