

Problemas de divisibilidad

1. Tenemos 24 botellas de agua. Queremos envasarlas en cajas que sean todas iguales sin que sobren ni falten botellas. **Averigua todas las soluciones posibles.**

2. En el almacén tenemos 45 paquetes de 1 kg de arroz. Hay que meterlos en cajas que sean todas iguales sin que sobren ni falten paquetes. **Calcula todas las soluciones posibles.**

3. Un viajero va a Barcelona cada 8 días y otro cada 12 días. Hoy han estado los dos en Barcelona.

¿Dentro de cuantos días volverán a estar los dos a la vez en Barcelona?

4. Un faro se enciende cada 18 segundos, otro cada 36 segundos y un tercero cada minuto. A las 6:30 de la tarde los tres coinciden.

Averigua las veces que volverán a coincidir en los cinco minutos siguientes.

5. Teresa tiene un reloj que da una señal cada 60 minutos, otro reloj que da una señal cada 90 minutos y un tercero que da una señal cada 150 minutos. A las 9 de la mañana los tres relojes han coincidido en dar la señal.

a) ¿Cuántas horas, como mínimo, han de pasar para que vuelvan a coincidir?

b) ¿A qué hora volverán a dar la señal otra vez juntos?

6. Un libro tiene entre 400 y 450 páginas. Si las contamos de 2 en 2 no sobra ninguna, si las contamos de 5 en 5 no sobra ninguna y si las contamos de 7 en 7 tampoco sobra ninguna.

¿Cuántas páginas tiene el libro?

7. En una bodega hay 3 toneles de vino, cuyas capacidades son: 250 litros, 360 litros, y 540 litros. Su contenido se quiere envasar en cierto número de garrafas iguales. **Calcular las capacidades máximas de estas garrafas para que en ellas se pueden envasar el vino contenido en cada uno de los toneles, y el número de garrafas que se necesitan.**

8. Se desean repartir 180 libros, 240 juguetes y 360 chocolates entre un cierto número de niños, de tal modo que cada uno reciba un número exacto de cada uno de esos elementos. **¿Cuál es el mayor número de niños que puede beneficiarse así y qué cantidad recibe cada uno?**

9. Un jardinero desea colocar 720 plantas de violetas, 240 de pensamientos, 360 de jacintos y 480 de claveles en el menor número posible de planteros que contengan el mismo número de plantas, sin mezclar las mismas. **¿Qué cantidad de plantas debe contener cada plantero y cuántos hay?**

Soluciones de los Problemas de divisibilidad

1. Tenemos 24 botellas de agua. Queremos envasarlas en cajas que sean todas iguales sin que sobren ni falten botellas. **Averigua todas las soluciones posibles.**

Como no queremos que sobren ni falten botellas y queremos repartirlas en cajas iguales, este problema se resuelve calculando los divisores de 24:

$$\text{Div}(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

$$\begin{array}{r} 24 \overline{) 11} \\ 00 \quad 24 \end{array} \quad \begin{array}{r} 24 \overline{) 12} \\ 00 \quad 12 \end{array} \quad \begin{array}{r} 24 \overline{) 13} \\ 00 \quad 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 24 \overline{) 14} \\ 00 \quad 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} \cancel{24 \overline{) 15}} \\ \cancel{04 \quad 4} \end{array}$$

Todas las soluciones posibles son:

- 1** caja con **24** botellas
- 2** cajas con **12** botellas cada una
- 3** cajas con **8** botellas cada una
- 4** cajas con **6** botellas cada una
- 6** cajas con **4** botellas cada una
- 8** cajas con **3** botellas cada una
- 12** cajas con **2** botellas cada una
- 24** cajas con **1** botella cada una

2. En el almacén tenemos 45 paquetes de 1 kg de arroz. Hay que meterlos en cajas que sean todas iguales sin que sobren ni falten paquetes. **Calcula todas las soluciones posibles.**

Este ejercicio es igual que el anterior. Calculamos los divisores de 45:

$$\text{div}(45) = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$$

$$\begin{array}{r} 45 \overline{) 11} \\ 00 \quad 45 \end{array} \quad \begin{array}{r} \cancel{45 \overline{) 12}} \\ \cancel{01 \quad 22} \end{array} \quad \begin{array}{r} 45 \overline{) 13} \\ 00 \quad 15 \end{array} \quad \begin{array}{r} \cancel{45 \overline{) 14}} \\ \cancel{01 \quad 11} \end{array} \quad \begin{array}{r} 45 \overline{) 15} \\ 00 \quad 9 \end{array} \quad \begin{array}{r} \cancel{45 \overline{) 16}} \\ \cancel{03 \quad 7} \end{array} \quad \begin{array}{r} \cancel{45 \overline{) 17}} \\ \cancel{03 \quad 6} \end{array}$$

Todas las soluciones posibles son:

- 1** caja con **45** paquetes
- 3** cajas con **15** paquetes cada una
- 5** cajas con **9** paquetes cada una
- 9** cajas con **5** paquetes cada una
- 15** cajas con **3** paquetes cada una
- 45** cajas con **1** paquete cada una

3. Un viajero va a Barcelona cada 8 días y otro cada 12 días. Hoy han estado los dos en Barcelona.

¿Dentro de cuantos días volverán a estar los dos a la vez en Barcelona?

Como un viajero va cada 8 días y otro cada 12 días, se trata de buscar un múltiplo común de 8 y de 12 y para saber cual es la primera vez que se encontrarán calculamos el m.c.m. (8 y 12)

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l} 8 = 2^3 \\ 12 = 2^2 \times 3 \end{array}$$

$$\text{m.c.m.}(8 \text{ y } 12) = 2^3 \times 3 = 24$$

Solución: Se encontrarán dentro de 24 días.

Si hoy es 2 de noviembre volverán a coincidir el 26 de noviembre

4. Un faro se enciende cada 18 segundos, otro cada 36 segundos y un tercero cada minuto. A las 6:30 de la tarde los tres coinciden.

Averigua las veces que volverán a coincidir en los cinco minutos siguientes.

Se trata de buscar un número que sea múltiplo de 18, 36 y 60 (1 minuto). La primera vez que coinciden se sabe calculando el m.c.m.(18, 36 y 60)

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l} 18 = 2 \times 3^2 \\ 36 = 2^2 \times 3^2 \\ 60 = 2^2 \times 3 \times 5 \end{array}$$

$$\text{m.c.m.}(18, 36, 60) = 2^2 \times 3^2 \times 5 = 4 \times 9 \times 5 = 180 \text{ segundos}$$

$$180 \text{ segundos } \underline{1 \ 60}$$

$$00 \quad 3 \text{ minutos.}$$

Solución: Como coincidieron a las 6:30, volverán a coincidir a las 6:33

Por lo tanto en los 5 minutos siguientes sólo coinciden una vez, a los 3 minutos.

5. Teresa tiene un reloj que da una señal cada 60 minutos, otro reloj que da una señal cada 90 minutos y un tercero que da una señal cada 150 minutos. A las 9 de la mañana los tres relojes han coincidido en dar la señal.

- a) ¿Cuántas horas, como mínimo, han de pasar para que vuelvan a coincidir?
b) ¿A qué hora volverán a dar la señal otra vez juntos?

Se trata de buscar un múltiplo común de 60, 90 y 150. La primera vez que suenan las señales a la vez se averigua calculando el m.c.m.(60, 90, 150)

60	2	90	2	150	2	$60 = 2^2 \times 3 \times 5$
30	2	45	3	75	3	$90 = 2 \times 3^2 \times 5$
15	3	15	3	25	5	$150 = 2 \times 3 \times 5^2$
5	5	5	5	5	5	
1		1		1		

$$\text{m.c.m.}(60, 90, 150) = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 = 4 \times 9 \times 25 = 900 \text{ minutos}$$

$$900 \text{ minutos } \underline{1 \ 60}$$

$$300 \qquad \qquad 15 \text{ horas}$$

00

a) Solución: Los tres relojes darán la señal a la vez dentro de 15 horas.

b) Solución: Sonarán a las 12 de la noche $9 + 15 = 24:00 = 12 \text{ de la noche}$

6. Un libro tiene entre 400 y 450 páginas. Si las contamos de 2 en 2 no sobra ninguna, si las contamos de 5 en 5 no sobra ninguna y si las contamos de 7 en 7 tampoco sobra ninguna.

¿Cuántas páginas tiene el libro?

Como las puedo contar de 2 en 2, de 5 en 5 y de 7 en 7, tengo que buscar un múltiplo común de 2, 5 y 7 que esté comprendido entre 400 y 450.

1º Calculamos el m.c.m.(2, 5, 7)

2		2	5		5	7		7	$2 = 2$
1			1			1			$5 = 5$
									$7 = 7$

$$\text{m.c.m.}(2, 5, 7) = 2 \times 5 \times 7 = 70 \text{ páginas}$$

2º Como el número de páginas está entre 400 y 450, calculamos los múltiplos de 70

$$\text{Múltiplos de } 70 = \{0, 70, 140, 210, 280, 350, \mathbf{420}, 490, \dots\}$$

Solución: El número de páginas que tiene el libro son 420

7. En una bodega hay 3 toneles de vino, cuyas capacidades son: 250 litros, 360 litros, y 540 litros. Su contenido se quiere envasar en cierto número de garrafas iguales. **Calcular las capacidades máximas de estas garrafas para que en ellas se pueden envasar el vino contenido en cada uno de los toneles, y el número de garrafas que se necesitan.**

Se trata de repartir (dividir) 250, 360 y 540 litros en garrafas iguales y que sean lo más grandes posibles. Este problema se resuelve calculando el M.C.D.(250, 360, 540)

250		2	360		2	540		2	$250 = 2 \times 5^3$
125		5	180		2	270		2	$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$
25		5	90		2	135		3	$540 = 2^2 \times 3^2 \times 5$
5		5	45		3	45		3	
1			15		3	15		3	
			5		5	5		5	
			1			1			

$$\text{M.C.D. (250, 360, 540)} = 2 \times 5 = 10 \text{ litros}$$

Solución: Las garrafas son de 10 litros.

Para averiguar cuántas garrafas se necesitan sumamos el vino de los tres toneles y lo dividimos entre 10:

$$(250 + 360 + 540) : 10 = 1.150 : 10 = 115 \text{ garrafas}$$

Solución: Se necesitan 115 garrafas de 10 litros cada una

8. Se desean repartir 180 libros, 240 juguetes y 360 chokolatines entre un cierto número de niños, de tal modo que cada uno reciba un número exacto de cada uno de esos elementos. **¿Cuál es el mayor número de niños que puede beneficiarse así y qué cantidad recibe cada uno?**

Este problema es igual que el anterior. Se calcula el M.C.D., de (180, 240 y 360)

180		2	240		2	360		2	$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$
90		2	120		2	180		2	$240 = 2^4 \times 3 \times 5$
45		3	60		2	90		2	$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$
15		3	30		2	45		3	
5		5	15		3	15		3	
1			5		5	5		5	
			1			1			

$$\text{M.C.D. (180, 240, 360)} = 2^2 \times 3 \times 5 = 4 \times 3 \times 5 = 60 \text{ niños}$$

Solución: El mayor número de niños para repartir es 60.

Para saber la cantidad que recibe cada uno, dividimos 180 libros, 240 juguetes y 360 chokolatines entre los 60 niños:

$$180 \text{ libros} : 60 = 3 \text{ libros} \quad 240 \text{ juguetes} : 60 = 4 \text{ juguetes} \quad 360 \text{ choc.} : 60 = 6 \text{ choc.}$$

Solución: Cada niño recibe 3 libros, 4 juguetes y 6 chokolatines.

9. Un jardinero desea colocar 720 plantas de violetas, 240 de pensamientos, 360 de jacintos y 480 de claveles en el menor número posible de planteros que contengan el mismo número de plantas, sin mezclar las mismas. **¿Qué cantidad de plantas debe contener cada plantero y cuántos hay?**

Se trata de repartir (dividir) las plantas en planteros que sean lo mayor posibles sin que sobren ni falten plantas. Hay que calcular el M.C.D., de (720, 240, 360 y 480)

720	2	240	2	360	2	480	2	$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$
360	2	120	2	180	2	240	2	$240 = 2^4 \times 3 \times 5$
180	2	60	2	90	2	120	2	$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$
90	2	30	2	45	3	60	2	$480 = 2^5 \times 3 \times 5$
45	3	15	3	15	3	30	2	
15	3	5	5	5	5	15	3	
5	5	1		1		5	5	
1						1	1	

$$\text{M.C.D. (720, 240, 360, 480)} = 2^3 \times 3 \times 5 = 8 \times 3 \times 5 = 120 \text{ plantas}$$

Solución: En cada plantero caben 120 plantas

Para saber cuántos planteros necesito, sumamos todas las plantas y el resultado lo dividimos entre 120

$$(720 + 240 + 360 + 480) : 120 = 1.800 : 120 = 15 \text{ planteros}$$

Solución: Se necesitan 15 planteros de 120 plantas cada uno.