Ecuaciones de primer grado

Definición, elementos y solución de la ecuación de primer grado

Una *ecuación de primer grado* es una igualdad del tipo

$$\boxed{ax=b}$$

donde a y b son números reales conocidos, con $a \neq 0$. Al número desconocido x se le llama *incógnita*. A veces, al igual que cuando se trabaja con polinomios, a los números a y b se le llaman *coeficientes de la ecuación de primer grado*. Al número b también se le llama *término independiente*. Al sustituir la incógnita x por su valor se ha de verificar la igualdad. Claramente la incógnita ha de tomar el valor

$$\boxed{x=\frac{b}{a}}$$

ya que

$$ax=a\frac{b}{a}=\frac{\cancel{a}b}{\cancel{a}}=b$$

Observa que la división $\frac{b}{a}$ se puede llevar a cabo porque hemos supuesto que $a \neq 0$.

En realidad, para despejar x, lo que hemos hecho es dividir ambos miembros de la igualdad entre a:

$$ax=b \Rightarrow \frac{\cancel{a}x}{\cancel{a}}=\frac{b}{a} \Rightarrow x=\frac{b}{a}$$

Esta propiedad se aprende, no con demasiada corrección, con la siguiente frase: *"lo que está multiplicando pasa al otro miembro dividiendo"*. En este caso, como a multiplica a x, pasa al otro miembro dividiendo, con lo que $x=\frac{b}{a}$.

Sin embargo hay que tener cuidado con la técnica anterior, y tener en cuenta que en realidad la propiedad que se aplica es: *"si se dividen los dos miembros de una igualdad entre un mismo número distinto de cero, la igualdad no varía"*. Esta propiedad de las igualdades es, de hecho, la misma que esta otra: *"si se multiplican los dos miembros de una igualdad por un mismo número, la igualdad no varía"*. Observa y verás:

$$ax=b \Rightarrow \frac{}{a}\cdot ax=\frac{1}{a}\cdot b \Rightarrow \frac{\cancel{a}x}{\cancel{a}}=\frac{b}{a} \Rightarrow x=\frac{b}{a}$$

Acabamos pues de recordar que dividir entre un número a distinto de cero es lo mismo que multiplicar por $\frac{1}{a}$.

Ejemplo 1

La solución de la ecuación de primer grado $3x=-4$ es $x=\frac{-4}{3}=-\frac{}{3}$, ya que $3\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{12}{3}=-$, con lo que se verifica la igualdad inicial. Observa que, realmente, tal y como se ha comentado anteriormente, para despejar la incógnita x, se han dividido los dos miembros de la igualdad entre 3:

$$3x=-4 \Rightarrow \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}=\frac{-4}{3} \Rightarrow x=-\frac{4}{3}$$

Como conclusión, decir que para resolver cualquier ecuación de primer grado, debemos llegar, mediante un proceso o una serie de pasos, a la igualdad $ax=b$ ya que, en este momento, tendremos la solución: $x=\frac{b}{a}$.

Procedimiento para resolver una ecuación de primer grado

Una ecuación de primer grado no aparece habitualmente en la forma $ax = b$, sino que se presenta como una igualdad entre dos expresiones algebraicas en las que pueden aparecer corchetes, paréntesis y fracciones. Por ejemplo:

$$\frac{2x}{3} - 3\frac{-}{4} + x - 5 = \frac{5(x - \ )}{6} - \frac{x - 3\lfloor x + 1 - 2(x+6) \rfloor}{2} - 3(x+2)$$

Recordemos que la expresión que se encuentra a la izquierda de la igualdad recibe el nombre de *primer miembro de la ecuación* y que la expresión que está a la derecha de la igualdad se llama *segundo miembro de la ecuación*.

Los pasos para resolver una ecuación cualquiera de primer grado son los siguientes:

1. ***Eliminar los corchetes y paréntesis***.
2. ***Eliminar los denominadores***. Para ello se multiplican todos y cada uno de los términos de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores.
3. ***Trasponer términos***. Lo que se quiere decir con esto es que debemos presentar los términos en los que aparece la incógnita en uno de los miembros de la igualdad, y los términos que no tienen incógnita en el otro miembro de la igualdad. Para ello aplicamos la siguiente y conocida propiedad de las igualdades:
   "Si se suma o se resta la misma cantidad a los dos miembros de una igualdad, la igualdad no varía."
4. ***Reducir términos semejantes***. Una vez realizada la trasposición de términos podremos sumar y restar todos los términos de ambos miembros pues serán todos semejantes. De este modo la ecuación aparecerá ya de la forma $ax = b$.
5. ***Despejar la incógnita***. Una vez despejada la incógnita es conveniente simplificarla, caso de que sea posible.

Ilustraremos este proceso con varios ejemplos.

Ejemplo 2

$$2x - 4 + 5x - 3 + 6 = 7x + 1 - 2 - 4 + 4x - 5$$

Esta ecuación no tiene ni corchetes, ni paréntesis y además tampoco aparecen fracciones en ella. Por tanto nos podemos saltar los pasos 1 y 2, y comenzar directamente con el paso 3, es decir, con la trasposición de términos. Para ello vamos a presentar los términos con la incógnita en el primer miembro y los términos sin incógnita en el segundo. Observa que sumando 4, sumando 3 y restando 6 en ambos miembros de la igualdad, tenemos:

$$2x - \cancel{4} + 5x - \cancel{3} + \cancel{6} + \cancel{4} + \cancel{3} - \cancel{6} = 7x + 1 - 2 - 4 + 4x - 5 + 4 + 3 - 6 \ ;$$

$$2x + 5x = 7x + 1 - 2 - 4 + 4x - 5 + 4 + 3 - 6$$

Ahora, si restamos $7x$ y $4x$ en ambos miembros de la igualdad obtenemos:

$$2x + 5x - 7x - 4x = \cancel{7x} + 1 - 2 - 4 + \cancel{4x} - 5 + 4 + 3 - 6 - \cancel{7x} - \cancel{4x} \ ;$$

$$2x + 5x - 7x - 4x = 1 - 2 - 4 - 5 + 4 + 3 - 6$$

La trasposición de términos se aprende con frecuencia mediante la siguiente regla: *"lo que está sumando pasa al otro miembro restando, y lo que está restando pasa al otro miembro sumando"*. Observa que como 4 y 3 estaban restando en el primer miembro, pasan al segundo sumando, y que como 6 estaba sumando en el primer miembro, pasa al segundo miembro restando. De igual modo, como $7x$ y $4x$ estaban sumando en el segundo miembro sumando, pasan al primero restando. No olvides sin embargo que, para ser precisos, esta regla práctica es consecuencia de la propiedad de las igualdades descrita anteriormente:

"Si se suma o se resta la misma cantidad a los dos miembros de una igualdad, la igualdad no varía."

Ahora reducimos términos semejantes y despejamos la incógnita:

$$-4x = -9 \Rightarrow x = \frac{-9}{-4} \Rightarrow x = \frac{-}{4}$$

Ejemplo 3

$$\frac{2x-1}{3}+3x-\frac{x-2}{9}=1-\frac{3x+2}{6}$$

Esta ecuación no tiene ni corchetes ni paréntesis, con lo que podemos ir directamente al paso número 2. Para eliminar los denominadores, multiplicaremos todos los términos por el mínimo común múltiplo de ellos. En este caso $\mathrm{mcm}(3,\ 9,\ 6)=18$. Entonces:

$$18\cdot\frac{2x-1}{3}+18\cdot 3x-18\cdot\frac{x-2}{9}=18\cdot 1-18\cdot\frac{3x+2}{6}\ ;$$

$$6(2x-1)+54x-2(x-2)=18-3(3x+2)$$

Observa que lo que hemos hecho es dividir el mínimo común múltiplo (en este caso 18) entre cada uno de los denominadores, utilizando la siguiente propiedad de las fracciones:

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a}{c}\cdot b$$

En nuestro caso, fíjate lo que se ha hecho en el primer término: $18\cdot\frac{2x-1}{3}=\frac{18}{3}\cdot(2x-1)=6(2x-1)$

Se ha transformado de este modo la ecuación con denominares en una ecuación sin ellos, aunque ahora tenemos paréntesis. Pero estos se eliminan fácilmente:

$$12x-6+54x-(2x-4)=18-(9x+6)\ ;$$

$$12x-6+54x-2x+4=18-9x-6$$

En este paso hay que tener especial cuidado con los signos. Recuerda que un menos delante de un paréntesis cambiará de signo todo lo que va tras él, ya que restar un polinomio es sumar el opuesto del mismo.

Ahora sólo queda trasponer términos, reducir términos semejantes y despejar la incógnita que, aunque parece mucho, es lo más sencillo en el proceso de resolución de una ecuación de primer grado.

$$12x+54x-2x+9x=18-6+6-4\Rightarrow 73x=14\Rightarrow x=\frac{14}{73}$$

Ejemplo 4

$$2\frac{x+1}{5}-\frac{1-3x}{3}=\frac{4x-1}{6}3+2\frac{x}{15}$$

En este caso, parece que no hay paréntesis, pero sí que los hay ya que, por ejemplo $2\frac{x+1}{5}=\frac{2(x+1)}{5}=\frac{2\qquad 2}{5}$. Así que lo primer que haremos es efectuar estos productos y dejar la ecuación solamente con denominadores:

$$\frac{2x+2}{5}-\frac{1-3x}{3}=\frac{12x-3}{6}+\frac{2x}{15}$$

Ahora multiplicamos por 30, que es el mínimo común múltiplo de los denominadores:

$$6(2x+2)-10(1-3x)=5(12x-3)+2\cdot 2x\Rightarrow 12x+12-10+30x=60x-15+4x$$

Por último trasponemos términos, reducimos términos semejantes y despejamos la incógnita:

$$12x+30x-60x-4x=-15-12+10\Rightarrow -22x=-17\Rightarrow x=\frac{-17}{-22}\Rightarrow x=\frac{17}{22}$$

Ejemplo 5

$$\frac{2}{3}\left(\frac{x-1}{2}-\frac{1}{4}\right)-5\frac{2x-3}{3}=x\left(\quad-\frac{2}{3}\right)+\frac{x-1}{4}$$

Eliminemos paréntesis:

$$\frac{2x-2}{6}-\frac{2}{12}-\frac{10x-15}{3}=x-\frac{2x}{3}+\frac{x-1}{4}$$

Eliminemos denominadores multiplicando por el mínimo común múltiplo, que es 12:

$$2(2x-2)-1\cdot 2-4(10x-15)=12x-4\cdot 2x+3(x-1)\Rightarrow 4x-4-2-40x+60=12x-8x+3x-3$$

Trasponemos términos, reducimos términos semejantes y despejamos la incógnita:

$$4x-40x-12x+8x-3x=-3+4+2-60\Rightarrow -43x=-57\Rightarrow x=\frac{-57}{-43}\Rightarrow x=\frac{57}{43}$$

Ejemplo 6

Vamos a finalizar resolviendo la ecuación de primer grado con que se abría esta sección. Observa que no se explican como antes los pasos que se van dando. Debes de identificar cada uno de ellos.

$$\frac{2x}{3}-3\frac{-}{4}+x-5=\frac{5(x-\ )}{6}-\frac{x-3\lfloor x+1-2(x+6)\rfloor}{2}-3(x+2)\ ;$$

$$\frac{2x}{3}-\frac{3x-3}{4}+x-5=\frac{5x\quad 15}{6}-\frac{x-3[x+1-2x-12]}{2}-3x-6\ ;$$

$$\frac{2x}{3}-\frac{3x-3}{4}+x-5=\frac{5x-15}{6}-\frac{x-3x-3+6x+36}{2}-3x-6\ ;$$

$$\frac{2x}{3}-\frac{3x-3}{4}+x-5=\frac{5x-15}{6}-\frac{4x+33}{2}-3x-6\ ;$$

$$4\cdot 2x-3(3x-3)+12x-12\cdot 5=2(5x-15)-6(4x+33)-12\cdot 3x-12\cdot 6\ ;$$

$$8x-9x+9+12x-60=10x-30-24x-198-36x-72\ ;$$

$$8x-9x+12x-10x+24x+36x=-30-198-72-9+60\ ;$$

$$61x=-249\ ;$$

$$x=-\frac{249}{61}$$