

13 Áreas y perímetros

Egipcios y babilonios demostraron una cierta destreza calculando áreas de polígonos y volúmenes de algunos cuerpos (a esto lo llamaban *cubatura de montones*). Para hallar las áreas de polígonos regulares, a partir de las longitudes de sus lados, utilizaban fórmulas obtenidas experimentalmente. Por ejemplo, los babilonios calculaban el área de un pentágono regular multiplicando el cuadrado de su lado por $1 + 43/60$, que es una buena aproximación.

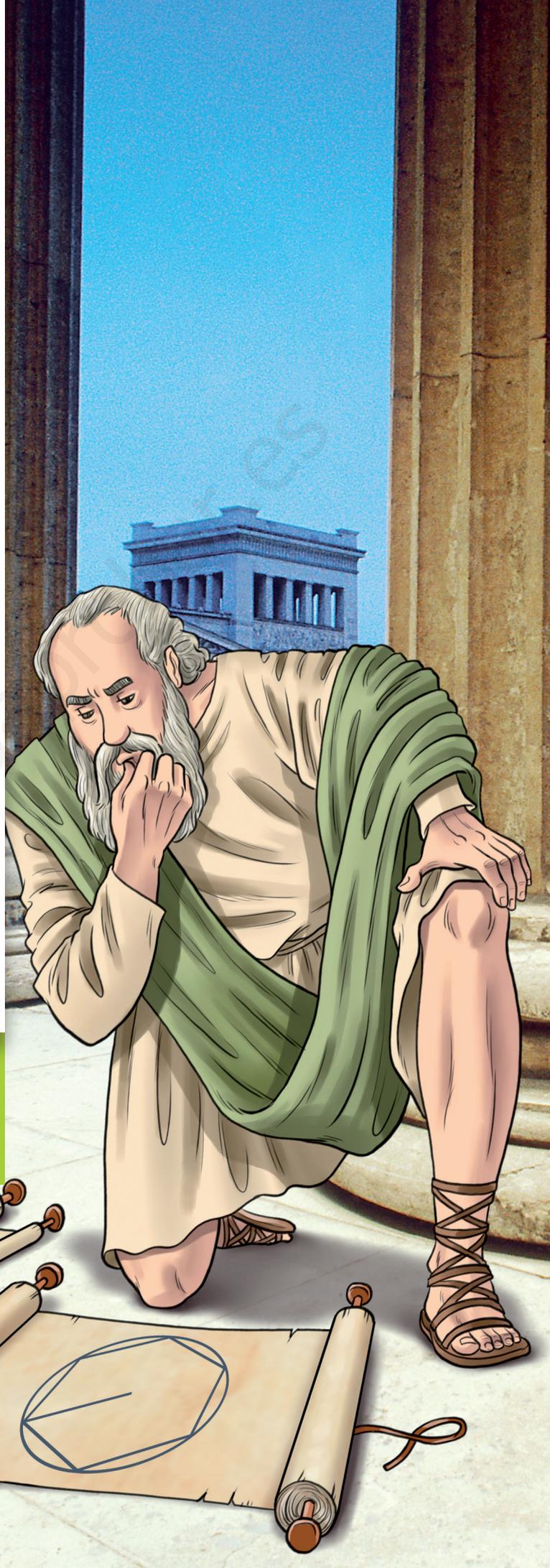
Los griegos, sin embargo, obtuvieron fórmulas para el cálculo de áreas y volúmenes mediante un proceso deductivo. La culminación llegó con **Arquímedes**, que supo obtener áreas y volúmenes de figuras curvas mediante un método muy sofisticado.

Es interesante cómo fue variando el valor asignado a π (la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro): los egipcios estimaron para π el valor 3,16; los babilonios, $3 + 1/8 = 3,125$; y Arquímedes lo situó entre $3 + 10/71$ y $3 + 10/70$, es decir, aproximadamente 3,141.

¿Por qué se le llamó así, π , a este número? Viene de la palabra *perifereia* que, por ser griega, empieza por la letra π (la correspondiente a nuestra P). Esta palabra significa circunferencia (la periferia de un círculo). Pero el nombre π no se lo dieron los griegos, sino que se empezó a usar a comienzos del siglo XVIII.

DEBERÁS RECORDAR

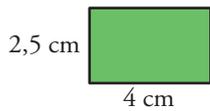
- Qué son mediciones directas e indirectas.
- No existe relación entre el perímetro y el área de una figura.



Medidas en los cuadriláteros

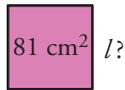
Cálculo mental

Di el área de este rectángulo:



Cálculo mental

¿Cuál es el lado de este cuadrado cuya área conocemos?



Rectángulo

Tanto el área como el perímetro de un rectángulo son muy conocidos.



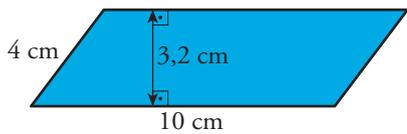
Cuadrado

Un cuadrado es un rectángulo con todos los lados iguales. Por tanto:

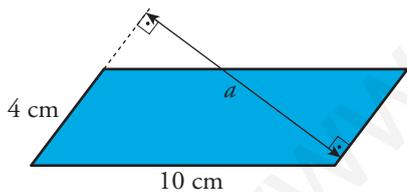


Cálculo mental

Halla el área de este paralelogramo:

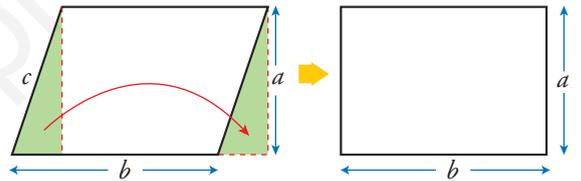


Y ahora, ya que conoces el área, ¿sabrías calcular la otra altura? Es decir, la distancia entre los otros dos lados.

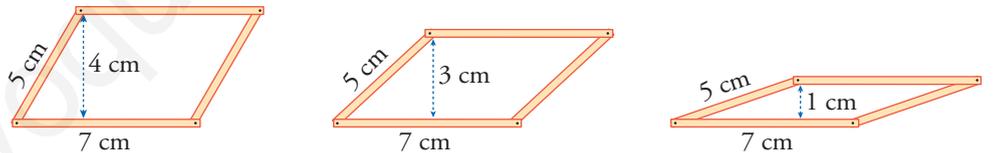


Paralelogramo cualquiera

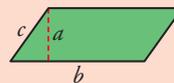
Al suprimir en el paralelogramo el triángulo de la izquierda y ponerlo a la derecha, se obtiene un rectángulo de dimensiones $a \times b$.



El perímetro, $P = 2b + 2c$, no guarda relación con el área. Hay muchos paralelogramos con el mismo perímetro, pero con distinta área:



PARALELOGRAMO DE LADOS b Y c Y ALTURA a

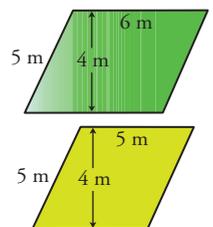


ÁREA $A = a \cdot b$
 PERÍMETRO $P = 2b + 2c$

Actividades

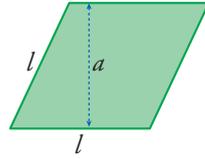
- Calcula el perímetro y el área de una habitación rectangular de dimensiones 6,4 m y 3,5 m.
- Mide las dimensiones de una página de este libro. ¿Cuántos metros cuadrados de papel se necesitan para hacer el libro completo, sin contar las tapas?
- ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado de 225 cm² de área?

- Halla la altura de un rectángulo de 47 m² de superficie y 4 m de base.
- Halla el área y el perímetro de estos dos paralelogramos. Observa que, aunque el segundo es un rombo, su área se puede calcular como la de un paralelogramo cualquiera.



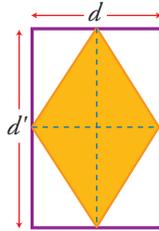
Rombo

Puesto que el rombo es un paralelogramo, su área se puede calcular como se ha descrito en el apartado anterior:



$$A = l \cdot a \quad (a \text{ es la distancia entre dos lados opuestos}).$$

También se puede calcular conociendo sus diagonales.



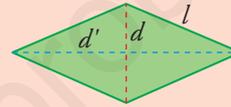
$$\text{Área del rectángulo morado: } A_{\text{RECTÁNGULO}} = d \cdot d'$$

$$\text{Área del rombo: } A_{\text{ROMBO}} = \frac{A_{\text{RECTÁNGULO}}}{2}$$

Cálculo mental

- Las diagonales de un rombo miden 6 cm y 10 cm. ¿Cuál es su área?
- La diagonal de un cuadrado mide 4 dm. ¿Cuál es su área?

ROMBO DE LADO l
Y DIAGONALES d Y d'



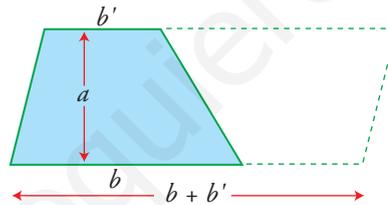
$$\text{ÁREA} \quad A = \frac{d \cdot d'}{2}$$

$$\text{PERÍMETRO} \quad P = 4l$$

Trapezio

Cálculo mental

Las bases de un trapezio miden 13 cm y 7 cm. Su altura, 10 cm. ¿Cuál es su área?



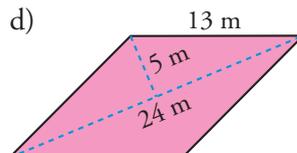
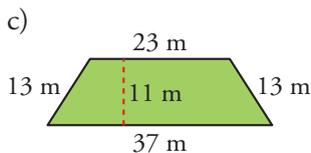
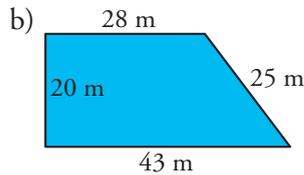
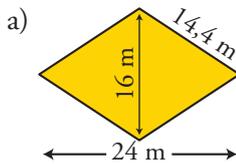
A los lados paralelos de un trapezio se les llama **bases** (b base mayor, b' base menor). A la distancia entre las bases se le llama altura, a .

Si a un trapezio le adosamos otro igual, se obtiene un paralelogramo de base $b + b'$ y altura a .

$$A_{\text{TRAPEZIO}} = \frac{A_{\text{PARALELOGRAMO}}}{2} = \frac{(b + b') \cdot a}{2}$$

Actividades

6 Halla el área y el perímetro de las siguientes figuras:



7 Una parcela cuadrangular tiene dos lados paralelos de longitudes 37,5 m y 62,4 m. La distancia entre esos lados paralelos es 45 m.

¿Cuál es la superficie de la parcela?

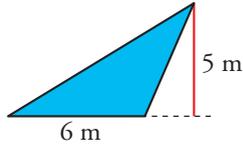
8 Las diagonales de un rombo miden 37 cm y 52 cm. Halla su área.

9 La diagonal de un cuadrado mide 15 cm. Halla su área.

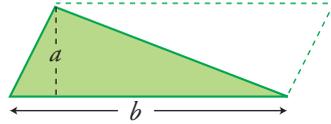
2 Área de un triángulo

Cálculo mental

Halla el área de este triángulo:



Observa: si a un triángulo le adosamos otro igual, se obtiene un paralelogramo. Por tanto, el área del triángulo es la mitad de la del paralelogramo.



$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{A_{\text{PARALELOGRAMO}}}{2} = \frac{b \cdot a}{2}$$

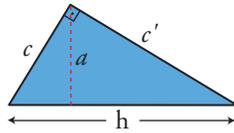
Si el **triángulo** es **rectángulo**, los dos catetos son perpendiculares. Tomando uno de ellos como base, el otro es la altura. Por tanto, el área se puede calcular de dos maneras:

Notación

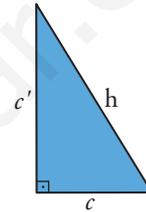
c y c' son los catetos.

h es la hipotenusa.

a es la altura sobre la hipotenusa.



$$A = \frac{h \cdot a}{2}$$



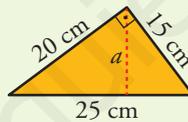
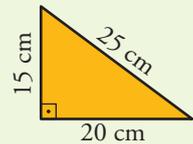
$$A = \frac{c \cdot c'}{2}$$

Ejercicios resueltos

1. Calcular el área del triángulo rectángulo de lados 15 cm, 20 cm y 25 cm. Calcular la altura sobre la hipotenusa.

1. Los dos catetos son los lados menores.

$$\text{El área es, pues: } A = \frac{c \cdot c'}{2} = \frac{15 \cdot 20}{2} = 150 \text{ cm}^2$$



El área también se puede calcular así:

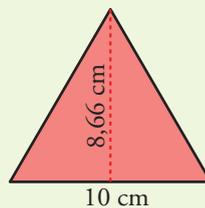
$$A = \frac{25 \cdot a}{2}$$

$$\text{Como } A = 150 \rightarrow \frac{25 \cdot a}{2} = 150 \rightarrow 25 \cdot a = 300 \rightarrow a = \frac{300}{25} = 12 \text{ cm}$$

La altura sobre la hipotenusa mide 12 cm.

2. Hallar el área de un triángulo equilátero de lado 10 cm y 8,66 cm de altura.

- 2.

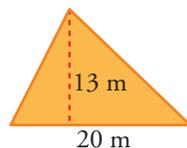


$$A = \frac{10 \cdot 8,66}{2} = 43,3 \text{ cm}^2$$

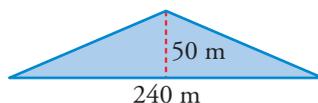
El área es 43,3 cm².

Actividades

- 1 Halla el área de una parcela triangular de la que conocemos un lado, 20 m, y su altura, 13 m.



- 2 Halla el área de este triángulo:



- 3 Halla el área de un triángulo equilátero de 40 m de lado y 34,64 m de altura.

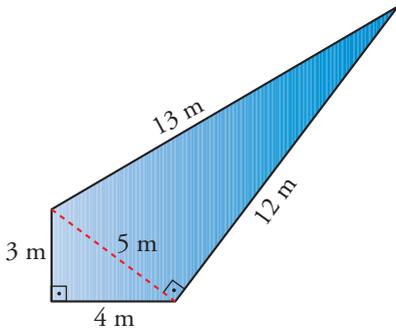
- 4 De un triángulo rectángulo conocemos los tres lados: $c = 18$ cm, $c' = 24$ cm y $h = 30$ cm.

a) Calcula su área.

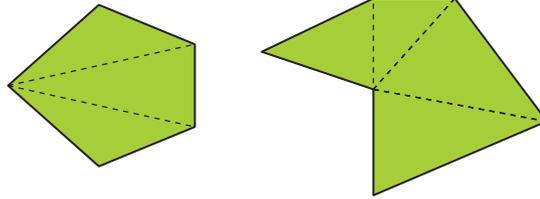
b) ¿Cuánto mide la altura sobre la hipotenusa?

Cálculo mental

Halla el área y el perímetro de este cuadrilátero irregular:

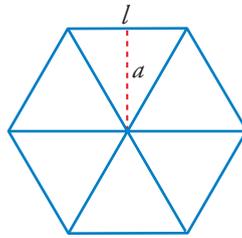


Para hallar el área de un polígono cualquiera, se descompone en triángulos y se calcula el área de cada uno de los triángulos.

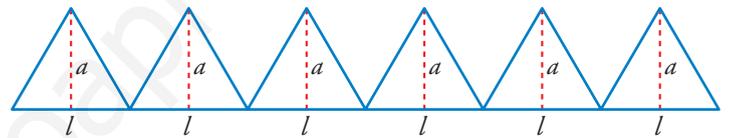


ÁREA DEL POLÍGONO =
= Suma de las áreas de
los triángulos

Sin embargo, para los polígonos regulares se puede proceder de forma más sencilla.

Área y perímetro de un polígono regular

Si el polígono es regular, se puede descomponer en tantos triángulos iguales como lados tiene el polígono.



$$A = n \text{ veces } \frac{l \cdot a}{2} = \frac{\text{Perímetro} \cdot a}{2}$$

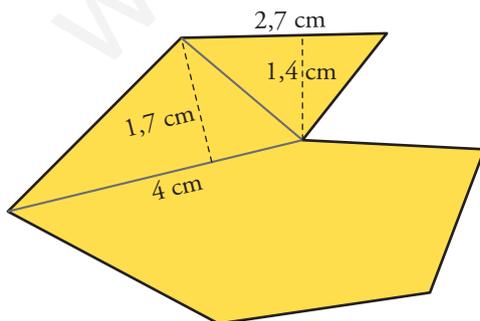
n es el número de lados y, por tanto, $n \cdot l = \text{Perímetro}$.

Notación

a es la apotema del polígono regular.

Actividades

- 1** Copia este polígono, continúa descomponiéndolo en triángulos y toma en ellos las medidas necesarias para calcular sus áreas. Halla, así, el área total.



- 2** El lado de un octógono regular mide 15 cm, y su apotema, 18 cm. Halla su área.

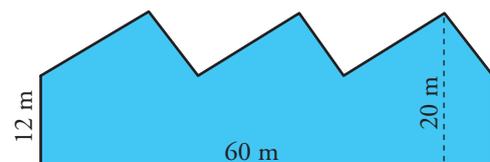
- 3** Recuerda que en el hexágono regular la longitud del lado es igual a la longitud del radio de la circunferencia circunscrita.

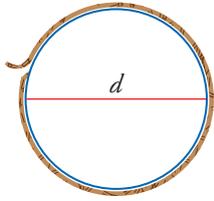
Dibuja un hexágono regular cuyo lado tenga una longitud $l = 4$ cm.

Comprueba que su apotema mide, aproximadamente, 3,5 cm.

Calcula su área.

- 4** Calcula el área de la siguiente figura:



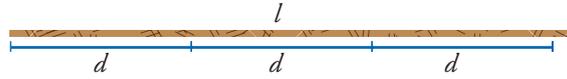


$$l = \pi d = 2\pi r$$

El número π (pi) vale, aproximadamente, 3,14 ó 3,1416.

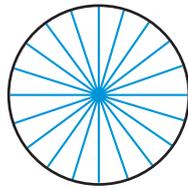
Perímetro del círculo

El perímetro de un círculo es la longitud de su circunferencia. Sabemos que la longitud de una circunferencia es algo más de tres veces su diámetro.

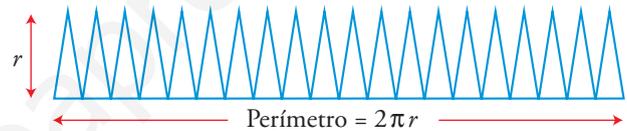


$$\text{Longitud de la circunferencia} = 3,14 \text{ veces su diámetro} \rightarrow l = \pi d = 2\pi r$$

Área del círculo



Descomponemos el círculo en muchos triángulos, como si fuera un polígono regular de muchos lados.



Si los sectores son muy finos, son prácticamente triángulos. Su altura es r .

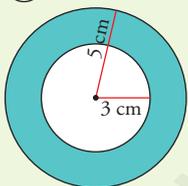
La suma de todas sus bases es el perímetro del círculo, $2\pi r$. Por tanto, su área es:

$$A = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$$

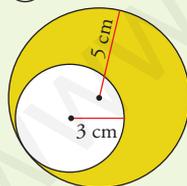
Ejercicio resuelto

Hallar el área y el perímetro de los recintos coloreados.

I



II



I. Estas dos circunferencias se llaman **concéntricas**, porque tienen el mismo centro. La región comprendida entre ellas se llama **corona circular**. Su área es la diferencia de las áreas de los dos círculos.

$$A = \pi \cdot 5^2 - \pi \cdot 3^2 = 16\pi = 50,26 \text{ cm}^2$$

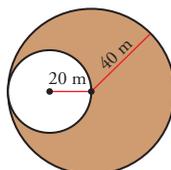
El perímetro del recinto es la suma de las longitudes de las dos circunferencias: $P = 2\pi \cdot 5 + 2\pi \cdot 3 = 16\pi = 50,26 \text{ cm}$

Curiosamente, su área en centímetros cuadrados coincide con su perímetro en centímetros. Es, simplemente, una casualidad.

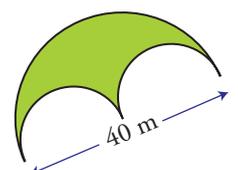
II. Aunque la forma sea distinta, tanto su área como su perímetro coinciden con los del recinto anterior.

Actividades

1 Halla la superficie y el perímetro del recinto marrón:



2 Calcula el perímetro y el área de esta figura:



Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

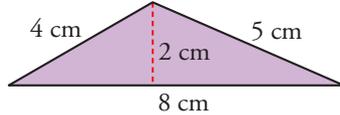
Áreas y perímetros de figuras sencillas

Halla el área y el perímetro de cada una de las figuras coloreadas en los siguientes ejercicios:

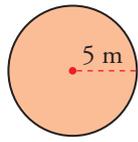
1 ▽ ▽ ▽ a)



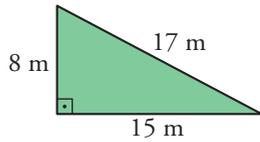
b)



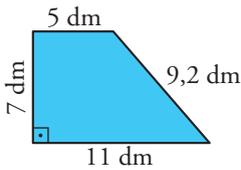
2 ▽ ▽ ▽ a)



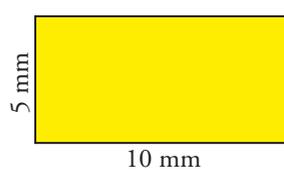
b)



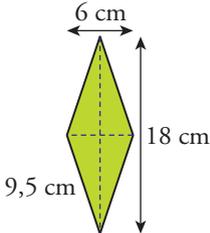
3 ▽ ▽ ▽ a)



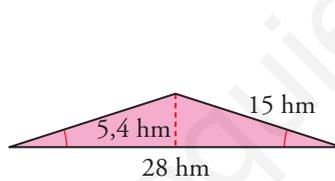
b)



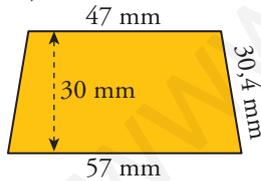
4 ▽ ▽ ▽ a)



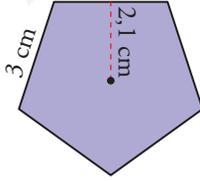
b)



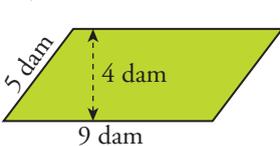
5 ▽ ▽ ▽ a)



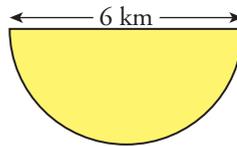
b)



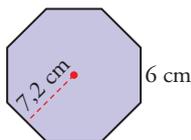
6 ▽ ▽ ▽ a)



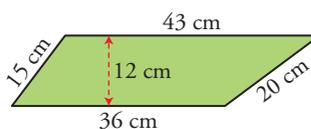
b)



7 ▽ ▽ ▽ a)



b)



8 ▽ ▽ ▽ Averigua cuánto mide la altura de un rectángulo de 40 m^2 de superficie y 5 m de base.

9 ▽ ▽ ▽ Halla el área de un trapecio cuyas bases miden 12 cm y 20 cm, y su altura, 10 cm.

10 ▽ ▽ ▽ Las bases de un trapecio isósceles miden 26 cm y 14 cm; la altura, 8 cm, y otro de sus lados, 10 cm. Calcula el perímetro y el área de la figura.

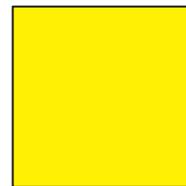
11 ▽ ▽ ▽ Los lados de un triángulo rectángulo miden 15 dm, 8 dm y 17 dm. Calcula su área y la altura sobre la hipotenusa.

12 ▽ ▽ ▽ Calcula el área y el perímetro de un hexágono regular de 6 mm de lado y 5,2 mm de apotema.

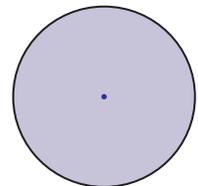
Medir y calcular áreas y perímetros

En cada una de las siguientes figuras coloreadas halla su área y su perímetro. Para ello, tendrás que medir algún elemento (lado, diagonal, radio...).

13 ▽ ▽ ▽ a)



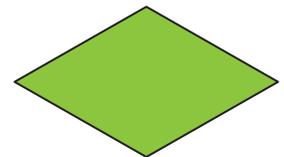
b)



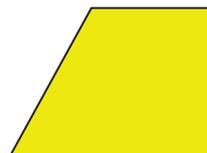
14 ▽ ▽ ▽ a)



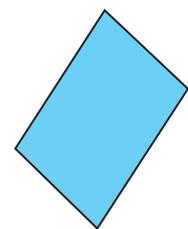
b)



15 ▽ ▽ ▽ a)



b)

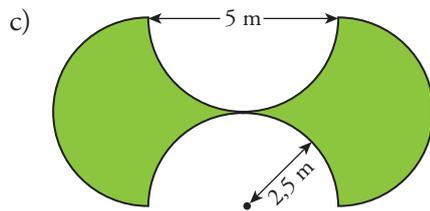
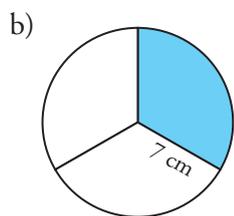
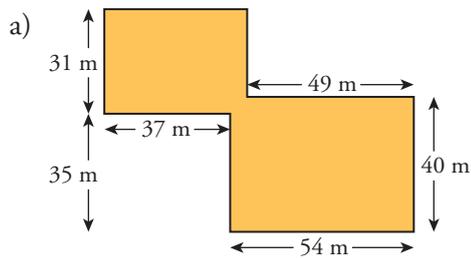


Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

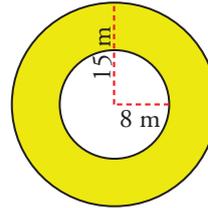
Áreas y perímetros menos sencillos

16 $\nabla\nabla\nabla$ Calcula el área y el perímetro de las figuras coloreadas.

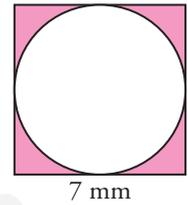


Halla el perímetro y el área de las figuras coloreadas en los siguientes ejercicios:

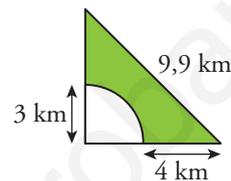
17 $\nabla\nabla\nabla$ a)



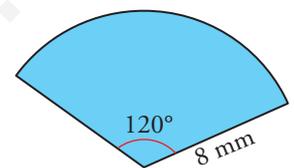
b)



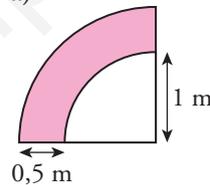
18 $\nabla\nabla\nabla$ a)



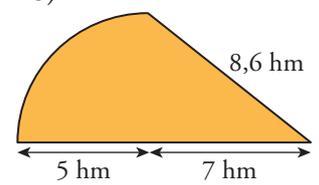
b)



19 $\nabla\nabla\nabla$ a)

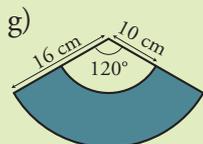
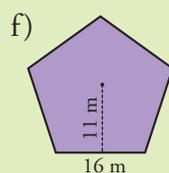
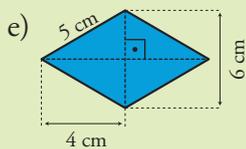
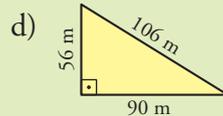
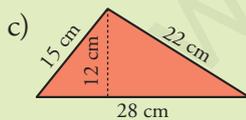
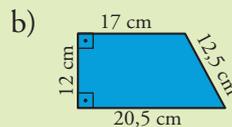
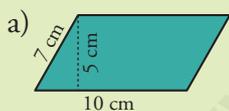


b)



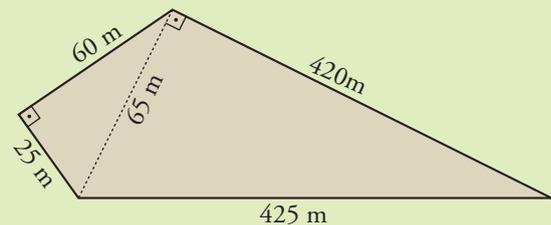
Autoevaluación

1 Calcula el área y el perímetro de cada una de las siguientes figuras:



Ten en cuenta que 120° es la tercera parte de 360° .

2 Halla el área de este campo:



3 Halla el área y el perímetro de cada una de las cuatro parcelas de este jardín circular de 16 m de diámetro:

