

## EJERCICIOS

1. Ordena, de menor a mayor los siguientes números reales, sin utilizar la calculadora:

$$-3, \sqrt{6}, -3\sqrt{2}, \pi, -\Phi, \sqrt{45}, 3,19, -0,0\widehat{2}$$

2. Clasifica los siguientes números en naturales, enteros, racionales, irracionales y/o reales.

$$0, 3,027, \frac{-2}{35}, \sqrt[3]{0,000\ 000\ 1}, 54,23, \frac{13}{32}, -\sqrt[4]{256}, \pi^3, (\sqrt{2}+1)^2$$

3. Si  $a, b > 0$  y  $a < b$ , ¿qué relación de desigualdad existe entre  $\frac{1}{a}$  y  $\frac{1}{b}$ ?

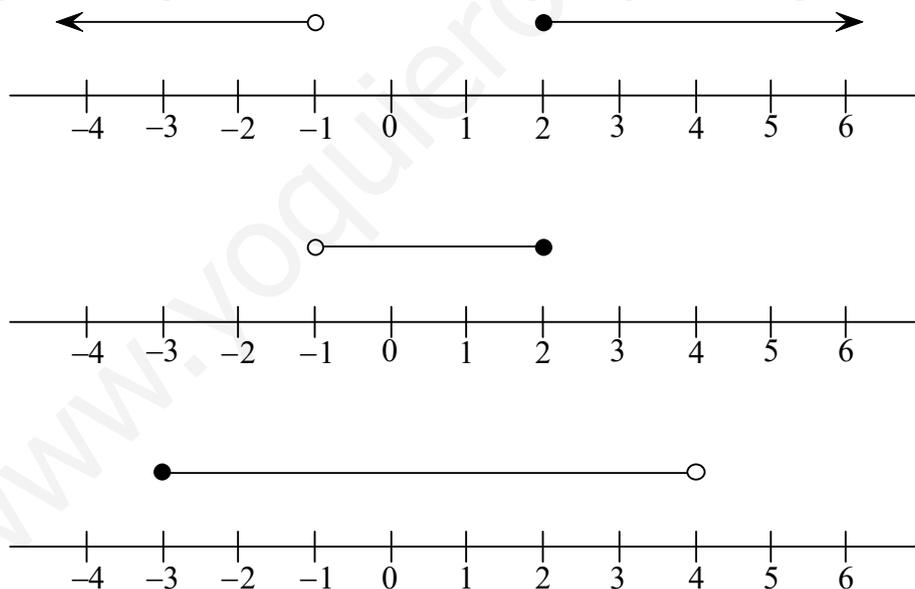
4. Si  $a < 0$  y  $b > 0$ , ¿qué relación de desigualdad existe entre  $\frac{1}{a}$  y  $\frac{1}{b}$ ?

5. Representa los siguientes intervalos, semirrectas y rectas, y exprésalos mediante desigualdades:

a)  $(-3, 2)$       b)  $[3, 5)$       c)  $[-4, -1]$       d)  $(-4, 0]$       e)  $(-\infty, 4)$   
 f)  $[4, +\infty)$       g)  $(-\infty, +\infty)$       h)  $\mathbb{R}$       i)  $[0, 7]$

6. Indica qué intervalos o conjuntos numéricos están representados, y representa los que faltan:

$$(-3, 4], (-\infty, -1) \cup [2, +\infty), \{x / -3 < x \leq 4\}, \mathbb{R} - [-1, 2), [-3, 4), (-1, 2], \{x / -1 < x \leq 2\}$$



7. Escribe mediante intervalos, los valores que puede tener  $x$  para que se pueda calcular la raíz cuadrada en cada caso:

a)  $\sqrt{x-4}$       c)  $\sqrt{2x+1}$       e)  $\sqrt{-x}$   
 b)  $\sqrt{3-2x}$       d)  $\sqrt{-x-1}$       f)  $\sqrt{1+\frac{x}{2}}$

8. Halla:  $|-11|$ ,  $|\pi|$ ,  $|\Phi|$ ,  $|-\sqrt{5}|$ ,  $|\sqrt[3]{-27}|$ ,  $|0|$ ,  $|3-\pi|$

9. Averigua para qué valores de  $x$  se cumplen las siguientes relaciones:

a)  $|x| = 5$       b)  $|x| \leq 5$       c)  $|x-4| = 2$       d)  $|x-4| \leq 2$       e)  $|x-4| > 2$

10. Expresa mediante desigualdades y conjuntos las siguientes expresiones:

a)  $|x| < 7$       b)  $|2x| < 8$       c)  $|x-1| \leq 6$       d)  $|x+2| > 9$   
 e)  $|x-5| \geq 1$       f)  $|x-2| = 5$       g)  $|x-4| \leq 7$       h)  $|x+3| \geq 6$

11. Dados los radicales:  $\sqrt{36}$ ,  $\sqrt{-36}$ ,  $-\sqrt{\frac{4}{9}}$ ,  $\sqrt{-81}$ ,  $\sqrt[3]{8}$ ,  $\sqrt[3]{27}$ ,  $\sqrt[3]{-8}$ ,  $\sqrt{5}$ . ¿Cuáles tienen solución en  $\mathbb{Q}$ ? ¿Cuáles no tienen solución en  $\mathbb{R}$ ?

12. Calcula:

a)  $\sqrt{100}$       b)  $\sqrt[4]{10\,000}$       c)  $\sqrt[3]{1\,000\,000}$       d)  $\sqrt[6]{1\,000\,000}$   
 e)  $\sqrt{2^2}$       f)  $\sqrt[3]{27}$       g)  $\sqrt[4]{2^4}$       h)  $\sqrt[4]{81}$

13. Escribe en forma de potencia:

a)  $\sqrt[3]{5^2}$     b)  $\sqrt{5^3}$       c)  $\sqrt{a^3}$       d)  $\sqrt[4]{a}$       e)  $\sqrt[3]{a^{-2}}$

14. Escribe en forma de raíz:

a)  $8^{\frac{1}{3}}$       b)  $9^{\frac{1}{2}}$       c)  $32^{\frac{2}{5}}$       d)  $256^{\frac{3}{4}}$       e)  $4^{\frac{3}{2}} + 16^{-\frac{1}{2}}$

15. Indica las igualdades que son verdaderas y las que son falsas. En éstas, indica dónde está el error:

a)  $\sqrt[3]{-2} = \sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[6]{4}$       b)  $\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[6]{2^2} = -\sqrt[6]{4}$       c)  $\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}$   
 d)  $\sqrt{3} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt[4]{9}$       e)  $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64}$       f)  $\sqrt{-4} = \sqrt[4]{(-4)^2} = \sqrt[4]{16}$

16. Escribe dos radicales equivalentes a cada uno de los siguientes:

a)  $\sqrt[3]{5^2}$     b)  $\sqrt{5}$       c)  $\sqrt[3]{-5}$       d)  $\sqrt[7]{-2}$       e)  $\sqrt[4]{11}$

17. Simplifica los siguientes radicales:

a)  $\sqrt[34]{a^{17}}$       b)  $\sqrt[39]{a^{13}}$       c)  $\sqrt[42]{a^{14}}$       d)  $\sqrt[108]{a^{54}}$       e)  $\sqrt[360]{a^{240}}$

18. Simplifica los siguientes radicales y reduce a índice común:  $\sqrt[120]{a^{80}}$ ,  $\sqrt[27]{a^9}$ ,  $\sqrt[4]{a^{36}}$

19. Señala verdadero o falso, justificando la respuesta:

$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$	
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$	
$\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$	
$\sqrt{a^2 \cdot b^2} = a \cdot b$	

$\sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{a}{b}$	
----------------------------------------	--

20. Calcula:

a)  $\frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{256}}$     b)  $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{16}}$     c)  $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt[3]{-125}}$     d)  $\sqrt[3]{8a^3}$     e)  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27} \cdot \sqrt[3]{81}$

21. Calcula y simplifica:

a)  $\sqrt[4]{32} : \sqrt[6]{2}$     b)  $(\sqrt[4]{2^3})^2$     c)  $\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[4]{2}$   
d)  $\sqrt[3]{2a} \cdot \sqrt[3]{4a^2}$     e)  $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$

22. Calcula:

a)  $\sqrt{2^6 \cdot a^4 \cdot b^6}$     b)  $\sqrt{2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^2}$     c)  $\sqrt{2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^2}$

23. Utiliza la descomposición factorial y extrae factores:

a)  $\sqrt[3]{216}$     b)  $\sqrt[3]{3375}$     c)  $\sqrt[4]{1296}$     d)  $\sqrt[5]{7776}$

24. Efectúa:

a)  $3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 7\sqrt{5}$     b)  $6\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2}$   
c)  $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{32}$     d)  $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16}$

25. Expresa como potencia de exponente fraccionario:

a)  $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$     b)  $\sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x}}$     c)  $\sqrt[3]{x\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}}$

26. Extrae factores de los radicales y realiza las siguientes operaciones:

a)  $\sqrt[6]{8} + \sqrt[4]{4} - 7\sqrt{72}$   
b)  $\sqrt{75} - \frac{1}{3}\sqrt{18} + \frac{3\sqrt{12}}{4} - \sqrt{\frac{2}{25}}$   
c)  $\frac{1}{3}\sqrt{108} - 5\sqrt{75} + \sqrt{243} - \sqrt{\frac{27}{121}}$   
d)  $\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{7\sqrt{108}}{4} + \sqrt{648} - \frac{2}{3}\sqrt{1875}$   
e)  $3 - \sqrt{288} + \sqrt{363} - \frac{1}{3}\sqrt{800} + \frac{17}{2}\sqrt{\frac{27}{289}}$

27. Simplifica las siguientes expresiones:

a)  $5\sqrt{4x} - 3\sqrt{36x} + 3\sqrt{25x} - 4\sqrt{9x} + 6\sqrt{x}$   
b)  $3\sqrt{8x^3} - 4\sqrt{72x^3} + 2\sqrt{32x^3} + 4\sqrt{128x^3} - \sqrt{288x^3}$   
c)  $6 \cdot \sqrt[3]{x^7} + x^2 \cdot \sqrt[3]{x} - 5x \cdot \sqrt[3]{x^4} - 3x^2 \cdot \sqrt[3]{27x}$

**28.** Efectúa las siguientes operaciones, simplificando todo lo posible los resultados:

a)  $(\sqrt{3} + 2\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3})$

b)  $(2 + \sqrt{2}) \cdot (3 - \sqrt{2}) \cdot (4 - \sqrt{2})$

c)  $(1 + \sqrt{2}) \cdot (1 - \sqrt{2}) \cdot (2 + \sqrt{2}) \cdot (2 - \sqrt{2})$

d)  $(\sqrt{72} - \sqrt{20} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{5} + 2\sqrt{8} - 7\sqrt{2})$

**29.** Racionaliza y simplifica:

a)  $\frac{3}{\sqrt{3}}$

b)  $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$

c)  $\frac{6}{\sqrt[15]{a^7}}$

**30.** Racionaliza y simplifica las siguientes expresiones fraccionarias:

a)  $\frac{1}{2\sqrt{5}}$

b)  $\frac{2}{\sqrt{3}}$

c)  $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{5}}$

d)  $\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{3}}$

e)  $\frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}}$

f)  $\frac{3}{2 + \sqrt{2}}$

g)  $\frac{4}{3 - \sqrt{3}}$

h)  $\frac{\sqrt{15} - \sqrt{6}}{\sqrt{35} - \sqrt{14}}$

i)  $\frac{3}{3\sqrt{3} + 4}$

j)  $\frac{11}{3\sqrt{5} - 2\sqrt{7}}$

**31.** Racionaliza y efectúa:

a)  $\frac{3}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

b)  $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} - \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$

**32.** Opera y simplifica:

$$\frac{1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}} + \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}}$$

**33.** Calcula:

1)  $\log_2 1024$

2)  $\log 0,001$

3)  $\log_2 \frac{1}{64}$

4)  $\ln 1$

5)  $\ln e^2$

6)  $\log_2 \sqrt{8}$

7)  $\log_3 3\sqrt{3}$

8)  $\log_3 \frac{\sqrt{3}}{3}$

9)  $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}$

10)  $\ln \frac{1}{e}$

11)  $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{128}$

12)  $\log_{\frac{1}{2}} 8$

13)  $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$

14)  $\log_5 625$

15)  $\log_5 (625)^3$

16)  $\log_2 \frac{1}{32}$

17)  $\log 1000$

18)  $\log 100\,000$

19)  $\log 0,01$

20)  $\log \frac{1}{10}$

21)  $\log 10^8$

22)  $\log \sqrt{10}$

23)  $\log 10^{-7}$

24)  $\log \sqrt[3]{0,001}$

**34.** Aplicando la definición de logaritmo resuelve los siguientes ejercicios:

1)  $2^x = 16$

2)  $2^x = 32$

3)  $3^{\frac{1}{x}} = 9$

- 4)  $\log_2 64 = x$                       5)  $\log_3 81 = x$                       6)  $\log_{101} 10\ 201 = x$   
7)  $\log_{16} 0.5 = x$                       8)  $\log_{10} 10^{-5} = x$                       9)  $\log_x 125 = \frac{3}{2}$   
10)  $\log_x \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$                       11)  $\log_{125} \frac{1}{\sqrt{5}} = x$                       12)  $\log_{343} \sqrt{7} = x$   
13)  $\log_{\frac{2}{3}} \frac{81}{16} = x$                       14)  $\log_{\frac{5}{3}} \frac{27}{125} = x$                       15)  $\log_8 \sqrt[4]{2} = x$

35. Si  $z = \sqrt[5]{\frac{a^3 b}{c^2}}$  y  $\log a = 1,5$ ,  $\log b = 2,5$  y  $\log c = -1,2$ , ¿cuánto valdrá  $\log z$ ?

36. Si sabemos que  $\log a = -2$ , ¿cuánto valdrá el logaritmo decimal de  $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}}$ ?

37. Calcula:

- a)  $\log_2 \frac{1}{64} + \log_2 1 + \log_3 81 + \log_{11} 121$   
b)  $\log_2 \sqrt{2} + \log_2 \sqrt{8} - \log_2 \sqrt[3]{2}$   
c)  $\ln 1 + \ln e + \ln e^2 + \ln \sqrt{e} + \ln \frac{1}{e}$   
d)  $\log_5 625 - \log_3 243 + \log_4 256$   
e)  $\log_3 1 + \log_2 64 + \log_3 9 + \log_7 49$   
f)  $\log_2 4 + \log_3 81 - \log_6 216 + \log_4 64$   
g)  $\log_3 \frac{1}{9} - \log_5 0,2 + \log_6 \frac{1}{36} - \log_2 0,5$

38. Halla el valor de  $x$  en los siguientes casos:

- a)  $\log_7 x = 2$                       b)  $\log_2 x = 0$                       c)  $\log_8 x = \frac{1}{3}$   
d)  $\log_2 64 = x$                       e)  $\log_{49} \sqrt{7} = x$                       f)  $\log_8 \sqrt[4]{2} = x$   
g)  $\log_x 10 = \frac{1}{4}$  h)  $\log_2 \frac{1}{16} = x$  i)  $\log_x 0,00001 = -6$

39. Averigua el valor numérico de las siguientes expresiones:

- 1)  $\log_a a^2 \sqrt{a}$                       2)  $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{64}$                       3)  $\log_{10} \left( \frac{100}{5^2} \right)$   
4)  $\log_a 1$                       5)  $2^{\log_a a^2}$                       6)  $\log_{10} \left( 10^{10 \log_{10} 10} \right)$   
7)  $\log_x \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$                       8)  $10^{\log_a \sqrt{a}}$                       9)  $\log_2 \sqrt[3]{64}$   
11)  $10^{\log_a \sqrt{a} \cdot a^3}$                       12)  $\log_{10} (\log_{10} 10^{10})$                       13)  $\log_5 (625)^3$

40. Sabiendo que  $\log_{10} 2 \approx 0,301030$  halla los logaritmos decimales de:

- a)  $\sqrt[3]{0,002}$                       b)  $\frac{1}{\sqrt[3]{16}}$                       c) 0,25  
 d)  $\sqrt{\frac{0,0025}{16}}$                       e)  $\sqrt[4]{\frac{1}{0,008}}$                       f) 1 024

41. Halla la base de los logaritmos en las siguientes igualdades:

- 1)  $\log_a 4 = 2$                       4)  $\log_a 243 = 5$                       7)  $\log_a 0,001 = -3$   
 2)  $\log_a 9 = 2$                       5)  $\log_a 256 = 8$                       8)  $\log_a 0,015625 = 3$   
 3)                      6)  $\log_a 0,125 = 3$                       9)  $\log_a 1 = 0$

42. Si el logaritmo de A en base 3 es x, expresar en función de x los siguientes logaritmos:

- 1)  $\log_3 27A$                       2)  $\log_3 \frac{A}{81}$                       3)  $\log_3 3^6 A$   
 4)  $\log_3 \frac{27}{A}$                       5)  $\log_3 \sqrt{A}$

43. Opera y expresa en notación científica:

- a)  $9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-5}}{(2 \cdot 10^{-4})^2}$                       b)  $6,672 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{3,2 \cdot 10^{-3} \cdot 5,96 \cdot 10^{24}}{(6,37 \cdot 10^6)^2}$   
 c)  $2,54 \cdot 10^{-3} \cdot 4,2173 \cdot 10^{-5}$                       d)  $\frac{2 \cdot 3,76 \cdot 10^4 + \frac{4}{5} \cdot 1,9654 \cdot 10^2}{7,4321 \cdot 10^{-5}}$   
 e)  $\frac{6,45 \cdot 10^{-23}}{8,65 \cdot 10^{-25}} \log_a 625 = 4$

44. Halla:

- a) El error absoluto y relativo en que se incurre al aproximar  $\frac{354}{233}$  por 1,519.  
 b) El error máximo que se comete al aproximar  $\sqrt{7}$  por 2,64.

45. Los tiempos de utilización de una red de comunicaciones se redondean por exceso a cuartos de hora. Aproxima de esta forma los siguientes tiempos: 39 min; 83 min; 118 min.

46. Al medir la longitud de una calle, obtuvimos 1 500 m, con un error absoluto menor que 2 m. Al medir la altura de una habitación, obtuvimos 2,80 m, con un error absoluto menor que 2 cm. ¿Qué medida se hizo con más precisión?

47. a) Completa la siguiente tabla de aproximaciones de  $\sqrt{6}$  :

Por defecto	2			
Por exceso	3		2,45	

- b) Calcula el error máximo y acota el error relativo que se produce al tomar  $\sqrt{6} = 2,449$ .

48. Completa la tabla:

	$\sqrt{3}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{3} + \sqrt{7}$	Error	$\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}$	Error
Por defecto	1,732					
Por exceso		2,646				

49. ¿Qué error absoluto cometemos al aproximar el resultado de  $45,96 + 203,7 + 0,823$  por el número 250,49?

50. Si aproximamos 10,469 por 10,5, ¿qué error absoluto se comete? ¿Y si lo aproximamos por 10,4? ¿Cuál es la mejor aproximación? Razónalo.

51. ¿Se puede escribir  $\pi = \frac{355}{113}$ ? Justifica la respuesta y di cuál es el orden de error cometido.

52. Las antiguas civilizaciones ya conocían aproximaciones del número  $\pi$ . Así, los babilonios tomaban 3 como valor de  $\pi$ , los egipcios 3,1604 y Arquímedes estableció las siguientes desigualdades:

$$\frac{221}{71} < \pi < \frac{22}{7} \quad \text{y} \quad \frac{221\,872}{67\,441} < \pi < \frac{195\,882}{62\,351}$$

En 1.600, Otho dio una de las mejores aproximaciones a través de la fracción que aparece en el ejercicio anterior ( $\frac{355}{113}$ ). Calcula el error absoluto que se comete con cada una de las aproximaciones anteriores.

53. A partir del S. XVII y con el nacimiento y desarrollo del Cálculo Infinitesimal es cuando se obtienen numerosas expresiones de  $\pi$  en función de sumas o productos infinitos. Algunas de éstas son:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \dots$$

$$\frac{\pi}{4} = \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \left(1 - \frac{1}{7^2}\right) \left(1 - \frac{1}{9^2}\right) \dots$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \dots}$$

Calcula la aproximación de  $\pi$  en cada expresión, utilizando los números que se dan en cada una y que son previos a los puntos suspensivos.

54. A una persona se le estima una estatura de 180 cm, siendo en realidad de 187 cm; a uno de sus primos le asignan una estatura de 140 cm, cuando es de 147 cm.

- Calcula el error absoluto y relativo de cada medida.
- ¿Cuál de las dos mediciones es más precisa? Razona la respuesta.

55. La expresión decimal del número  $e$  es:

$$e = 2,718\,281\,828\,445\,904\,523\,536\dots$$

Una forma de obtenerlo de forma aproximada, es utilizando fracciones continuas. Su expresión debida a Euler es:

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5 + \dots}}}}}$$

Calcula las cuatro primeras aproximaciones al número  $e$ .

**56.** Si se quiere obtener  $\pi \cdot \sqrt{7}$  con cuatro cifras exactas, ¿qué aproximaciones debemos tomar para  $\pi$  y  $\sqrt{7}$ ?

**57.** ¿Cuántas cifras exactas tendrá una aproximación de  $\frac{45}{22}$  para que el error relativo que se comete no exceda del 1%?

**58.** Se quiere obtener el resultado de  $\pi + \sqrt{12}$  y  $\pi \cdot \sqrt{12}$  con una precisión de milésimas, es decir, con incertidumbre menor que media milésima. ¿Cuántas cifras exactas se deben tomar en las aproximaciones de  $\pi$  y  $\sqrt{12}$ ?

**59.** Se desea calcular la capacidad de un depósito cilíndrico. Se toman las siguientes medidas: diámetro del depósito:  $95 \pm 1$  cm, altura:  $180 \pm 1$  cm. Calcula su capacidad en litros y expresa el resultado indicando su incertidumbre.

**60.** Una habitación rectangular mide 4,57 m por 7,32 m. Se han realizado las medidas con una cinta métrica que aprecia 1 cm. Calcula su área y exprésala correctamente.