OPCIÓN A

1.- Hallar los valores de los números **a** y **b** para que la función definida como

$$f(x)=\begin{cases} ax+5 & si \quad x\le 1 \\ a\sqrt{x}+\dfrac{b}{x} & si \quad x>1 \end{cases}$$ resulte derivable para todos los valores de **x**

Para ser derivable la función tiene que ser, primeramente, continua

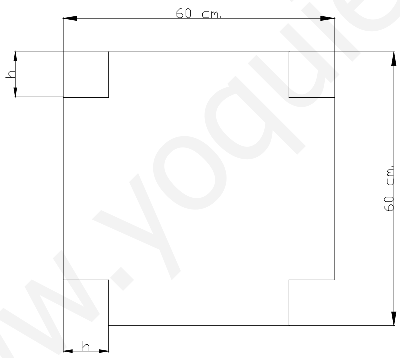
$$\begin{cases} f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=a\cdot 1+5=a+5 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=a\cdot\sqrt{1}+\dfrac{b}{1}=a+b \end{cases} \Rightarrow f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow a+5=a+b\Rightarrow b=5$$

$$f'(x)=\begin{cases} a & si \quad x<1 \\ \dfrac{a}{2\sqrt{x}}-\dfrac{5}{x^2} & si \quad x>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\dfrac{a}{2\sqrt{1}}-\dfrac{5}{1^2} \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)\Rightarrow a=\frac{a}{2}-5\Rightarrow$$

$$a-\frac{a}{2}=-5\Rightarrow \frac{a}{2}=-5\Rightarrow a=-10$$

$$f(x)=\begin{cases} 10x+5 & si \quad x\le 1 \\ 10\sqrt{x}+\dfrac{b}{5} & si \quad x>1 \end{cases}$$

2.- A partir de una cartulina cuadrada de **60 cm.** de lado se va a construir una caja de base cuadrada, sin tapa, a base de recortar cuatro cuadrados iguales en las esquinas de la cartulina y doblando después de la manera adecuada. Un observador indica que la caja de más capacidad se obtendrá si los cuadrados eliminados tiene **10 cm.** de lado. Decidir si la observación es correcta o no.



$$V=(60-2h)^2 h\Rightarrow V'=\frac{dV}{dh}=2(60-2h)(-2)h+(60-2h)^2=(-4)\left(60h-2h^2\right)+3600-240h+4h^2$$

$$V'=-240h+8h^2+3600-240h+4h^2=12h^2-480h+3600=12\left(h^2-40h+300\right)\Rightarrow$$

$$V'=0\Rightarrow 12\left(h^2-40h+300\right)=0\Rightarrow h^2-40h+300=0\Rightarrow \Delta=(-40)^2-4\cdot 1\cdot 300=400>0\Rightarrow$$

$$h=\frac{40\pm\sqrt{400}}{2\cdot 1}\Rightarrow\begin{cases} h=\dfrac{40+20}{2}=30 \\ h=\dfrac{40-20}{2}=10 \end{cases}\Rightarrow V''=\frac{d^2V}{dh^2}=12(2h-40)=24(h-20)\Rightarrow$$

$$\begin{cases} V''(30)=24(30-20)=240\Rightarrow Mínimo \\ V''(10)=24(10-20)=-240\Rightarrow Maximo \end{cases}\Rightarrow h=10\ cm.$$

Tenia razón el observador

3.- Discutir y resolver el siguiente sistema de acuerdo con los valores del parámetro **m**

$$\begin{cases} 5x+4y+2z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ 4x-y+m^2z=m-1 \end{cases}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & m^2 \end{vmatrix}=15m^2+16-4-24+5-8m^2=7m^2-7 \Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow 7m^2-7=0 \Rightarrow$$

$$7\left(m^2-1\right)=0 \Rightarrow m^2-1=0 \Rightarrow m^2=1 \Rightarrow m=\pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-1 \end{cases}$$

$\forall m \in \Re-\{-1\ ,1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A)=3=$ *Número de incognitas* $\Rightarrow$ *Sistema Compatible Determinado*

Soluciones para el Sistema Compatible Determinado para todos los valores de m que lo cumplen

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ m-1 & -1 & m^2 \end{vmatrix}}{7m^2-7}=\frac{4\ (m-1)-6\ (m-1)}{7\ (m-1)(m+1)}=\frac{-2\ (m-1)}{7\ (m-1)(m+1)}=-\frac{2}{7\ (m+1)}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & m^2 & m-1 \end{vmatrix}}{7m^2-7}=\frac{4m^2-5m^2}{7\ (m-1)(m+1)}=-\frac{m^2}{7\ (m-1)(m+1)}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & m-1 \end{vmatrix}}{7m^2-7}=\frac{15\ (m-1)-8\ (m-1)}{7\ (m-1)(m+1)}=\frac{7\ (m-1)}{7\ (m-1)(m+1)}=\frac{1}{m+1}$$

Si $m=-1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ -10 & -15 & -5 & 0 \\ -20 & 5 & -5 & 10 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & 21 & 3 & 10 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right) \Rightarrow 0z=10$$

$z=\frac{10}{0} \Rightarrow$ *Sin solución* $\Rightarrow$ *Sistema Incompatible*

Si $m=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ -10 & -15 & -5 & 0 \\ -20 & 5 & -5 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & 21 & 3 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$ *La tercera es combinación*

lineal de las otras dos $\Rightarrow$ *Sistema Compatible Indeterminado* $\Rightarrow -7y-z=0 \Rightarrow z=-7y \Rightarrow$

$5x+4y+2\cdot(-7y)=0 \Rightarrow 5x-10y=0 \Rightarrow 5x=10y \Rightarrow x=2y \Rightarrow$

Solución $\Rightarrow (x\ ,y\ ,z)=(2\lambda\ ,\lambda\ ,-7\lambda)$

4.- Comprobar si los puntos **(1 , 2 , 3)** , **(1 , -2 , 4)** y **(1 , -3 , 5)**están alineados. En caso negativo, determinar la ecuación del único plano que los contiene.

Si están alineados **A**, **B** y **C,** respectivamente nominados los vectores **AB** y **AC** son iguales o proporcionales

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1\ ,-2\ ,4)-(1\ ,2\ ,3) = (0\ ,-4\ ,1) \\ \overrightarrow{AC} = (1\ ,-3\ ,5)-(1\ ,2\ ,3) = (0\ ,-5\ ,2) \end{cases} \Rightarrow \frac{-4}{-5} \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \textit{No están alineados}$$

Para hallar el plano π que los contiene tenemos los vectores ante dichos **AB** y **AC** y un tercer vector formado por el punto **A** y el punto **G** generador del plano, los tres vectores son coplanarios y el último es combinación lineal de los otros dos y por ello el determinante de la matriz que forman los tres es nulo y la ecuación pedida.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0\ ,-4\ ,1) \\ \overrightarrow{AC} = (0\ ,-5\ ,2) \\ \overrightarrow{AG} = (x\ ,y\ ,z)-(1\ ,2\ ,3) = (x-1\ ,y-2\ ,z-3) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-8\,(x-1)+5\,(x-1)=0 \Rightarrow -3\,(x-1)=0 \Rightarrow \pi \equiv x-1=0$$

OPCIÓN B

1.- Hallar el valor del parámetro **a** sabiendo que el área que limitada por la gráfica **y = x² - ax** y el eje **OX** es $\frac{32}{5}$

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^2 - ax = 0 \Rightarrow (x-a)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - a = 0 \Rightarrow x = a \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\left|\int_0^a (x^2 - ax)\,dx\right| = \frac{32}{5} \Rightarrow \left|\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^a - a\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^a\right| = \frac{32}{5} \Rightarrow \left|\frac{1}{3}\cdot\left(a^3 - 0^3\right) - \frac{a}{2}\cdot\left(a^2 - 0^2\right)\right| = \frac{32}{5} \Rightarrow$$

$$\left|\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2}\right| = \frac{32}{5} \Rightarrow \left|\frac{2a^3 - 3a^3}{6}\right| = \frac{32}{5} \Rightarrow \left|\frac{-a^3}{6}\right| = \frac{32}{5} \Rightarrow \frac{a^3}{6} = \frac{32}{5} \Rightarrow a^3 = \frac{192}{5} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{192}{5}}$$

$$a = \frac{4\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{5^2}}{5} = \frac{4\sqrt[3]{75}}{5}$$

2.- Trazar la gráfica de una función **f(x)** que satisface las siguientes propiedades

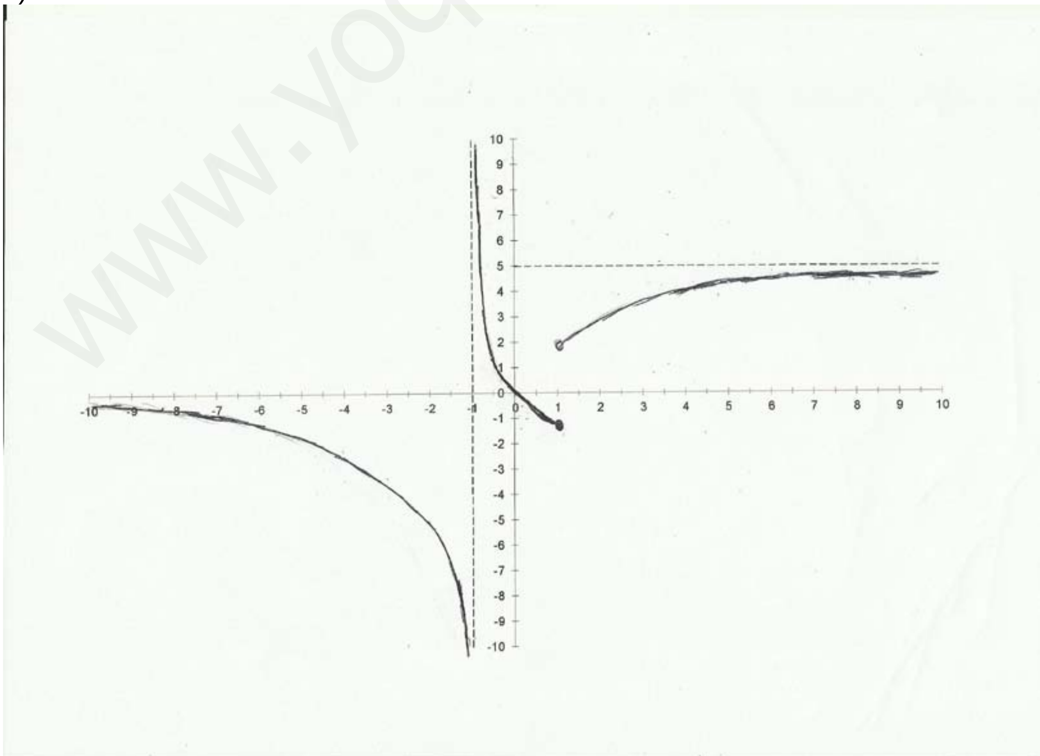
a) Su dominio es $\Re - \{-1\}$

b) **f(0) = 0**

c) No tiene máximos ni mínimos

d) Para $f(x)\xrightarrow{x\to+\infty}5$, $f(x)\xrightarrow{x\to-\infty}0$, $f(x)\xrightarrow{x\to-1^-}\infty$, $f(x)\xrightarrow{x\to-1^+}-\infty$

e) Tiene una discontinuidad evitable en **x = 1**



3.- En este ejercicio son dos matrices A y B desconocidas que hay que hallar. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2A+B=\begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \\ 3A+2B=\begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix} \end{cases}$

$$\begin{cases} -4A-2B=(-2)\cdot\begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \\ 3A+2B=\begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow -A=\begin{pmatrix} -10 & -24 & -14 \\ -8 & -4 & -14 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -14 \\ 12 & 6 & 21 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 14 \\ -12 & -6 & -21 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 6A+3B=3\cdot\begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \\ -6A-4B=(-2)\cdot\begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow -B=\begin{pmatrix} 15 & 36 & 21 \\ 12 & 6 & 21 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -22 & -50 & 0 \\ -40 & -20 & -70 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & -14 & 21 \\ -28 & -14 & -49 \end{pmatrix}=$$

$$B=\begin{pmatrix} 7 & 14 & -21 \\ 28 & 14 & 49 \end{pmatrix}$$

4.- En caso de que las dos rectas siguientes se corten en un punto, hallar las coordenadas del mismo $r\equiv\begin{cases} x=-7+4\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=2 \end{cases}$, $s\equiv\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z}{-2}$

$$\begin{cases} -7+4\lambda=3+2\mu \\ 1-\lambda=-4-3\mu \\ 2=-2\mu \end{cases} \Rightarrow \mu=-\frac{2}{2}=-1\Rightarrow 1-\lambda=-4-3\cdot(-1)\Rightarrow 1-\lambda=-4+3\Rightarrow 1-\lambda=-1\Rightarrow \lambda=2\Rightarrow$$

$$-7+4\cdot 2=3+2\cdot(-1)\Rightarrow 1=1\Rightarrow Sistema\ Compatible\Rightarrow Hay\ \ punto\ P\ de\ corte$$

$$P\begin{cases} x=-7+4\cdot 2 \\ y=1-2 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow P(1\,,-1\,,2)$$