OPCIÓN A

1.- Hacer un esquema de la gráfica de una función **f(x)** que cumple las siguientes propiedades

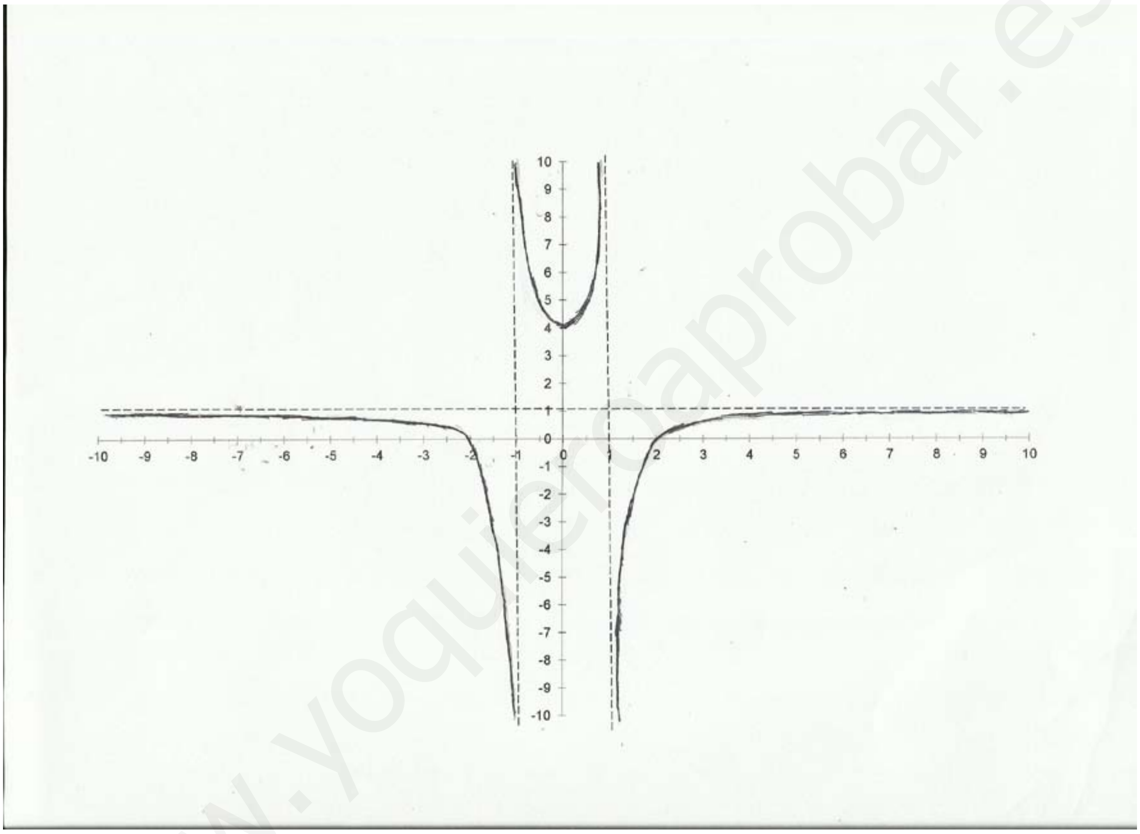
a) Tiene dos asíntotas verticales **x = -1** y **x = 1**

b) Para $x \to \pm\infty$, se cumple **f(x) = 1**

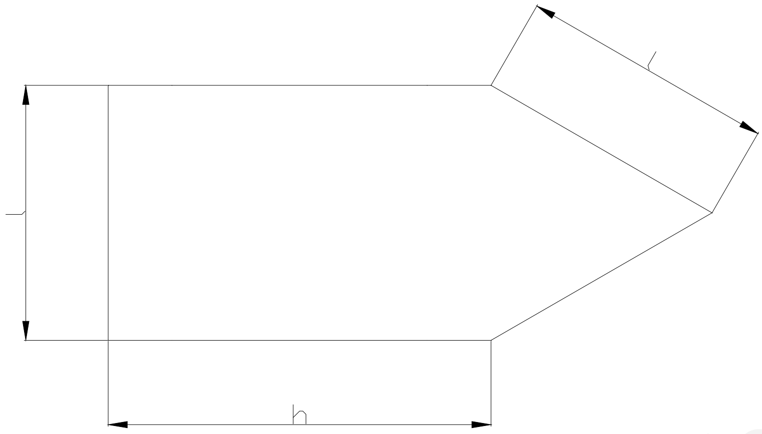
c) **f(-2) = f(2) = 0**

d) Es decreciente en $(-\infty\ ,-1)\cup(-1\ ,0)$ y es creciente en $(0\ ,1)\cup(1\ ,\infty)$

e) **f(0) = 4** y **f'(0) = 0**



2.- Se dispone de un lazo de cuerda de 10 metros de largo, con el cual se dibuja en el suelo una figura formada por una parte rectangular a la que se adosa, en uno de los lados menores un triángulo equilátero:



Sabiendo que la fórmula del área de un triángulo equilátero de lado **l** es $A = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$, hallar las dimensiones de la figura para que su área sea la mayor posible.

$$\left\{\begin{array}{l} 10 = 3l + 2h \Rightarrow 2h = 10 - 3l \Rightarrow h = 5 - \frac{3}{2}l \\ A = hl + \frac{\sqrt{3}}{4}l^2 \end{array}\right. \Rightarrow A = \left(5 - \frac{3}{2}l\right)l + \frac{\sqrt{3}}{4}l^2 = 5l - \frac{3}{2}l^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$$

$$A = 5l + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2}\right)l^2 = 5l + \left(\frac{\sqrt{3}-6}{4}\right)l^2 \Rightarrow A' = \frac{dA}{dl} = 5 + 2\left(\frac{\sqrt{3}-6}{4}\right)l = 5 + \left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right)l \Rightarrow A' = 0 \Rightarrow$$

$$5 + \left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right)l = 0 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right)l = -5 \Rightarrow l = \frac{-10}{\sqrt{3}-6} \Rightarrow l = \frac{10}{6-\sqrt{3}} \Rightarrow A'' = \frac{d^2A}{dl^2} = \frac{\sqrt{3}-6}{2} < 0 \Rightarrow Máximo$$

$$\left\{\begin{array}{l} l = \frac{10}{6-\sqrt{3}} = \frac{10\left(6+\sqrt{3}\right)}{36-3} = \frac{10\left(6+\sqrt{3}\right)}{33}\ m \\ h = 5 - \frac{3}{2}\cdot\frac{10}{\left(6-\sqrt{3}\right)} = 5 - \frac{15}{6-\sqrt{3}} = 5 - \frac{15\left(6+\sqrt{3}\right)}{36-3} = 5 - \frac{15\left(6+\sqrt{3}\right)}{33} = 5 - \frac{5\left(6+\sqrt{3}\right)}{11} = \frac{5\left(5-\sqrt{3}\right)}{11}\ m. \end{array}\right.$$

3.- Estudiar para que valores de λ es invertible la matriz siguiente: $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda+1 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$ y, en caso de ser posible, hallar su inversa para $\lambda = 2$

Para que sea invertible una matriz su determinante tiene que ser distinto de cero. Llamando **A** a la matriz

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda+1 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda\,(\lambda+1)(\lambda-1) \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow \lambda\,(\lambda+1)(\lambda-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda+1=0 \Rightarrow \lambda = -1 \\ \lambda-1=0 \Rightarrow \lambda = 1 \end{cases}$$

$$(Para\ todo)\forall\lambda \in \Re - \{-1\ ,0\ ,1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow (Existe)\,\exists A^{-1}$$

$$Cuando\ \lambda = 2 \Rightarrow |A| = 2\,(2+1)(2-1) = 2\cdot 3\cdot 1 = 6 \neq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot\left(adj\ A^t\right) \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\ A^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.- En el espacio se consideran los puntos **(1 , 2 , -3)** , **(3 , -1 , 0)** y **(5 , -4 , 3)**. Investigar si están alineados. En caso afirmativo, hallar las ecuaciones de la recta que los contiene. En caso negativo, calcular la ecuación del plano que definen.

Si están alineados **A**, **B** y **C,** respectivamente nominados los vectores AB y AC son iguales o proporcionales

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3\ ,-1\ ,0) - (1\ ,2\ ,-3) = (2\ ,-3\ ,3) \\ \overrightarrow{AC} = (5\ ,-4\ ,3) - (1\ ,2\ ,-3) = (4\ ,-6\ ,6) \equiv (2\ ,-3\ ,3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow Están\ alineados$$

$$Ecuación\ de\ la\ recta\ r$$

$$\begin{cases} v_r = \overrightarrow{AB} = (2\ ,-3\ ,3) \\ A(1\ ,2\ ,-3) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ x = 2 - 3\lambda \\ x = -3 + 3\lambda \end{cases}$$

OPCIÓN B

1.- Dada la función f(x) definida por $f(x)=\begin{cases} e^x-1 & (x<0) \\ x^2+ax & (x\geq 0)\end{cases}$ determinar el valor (o los valores) de **a** para que resulte derivable en todos los puntos donde está definida.

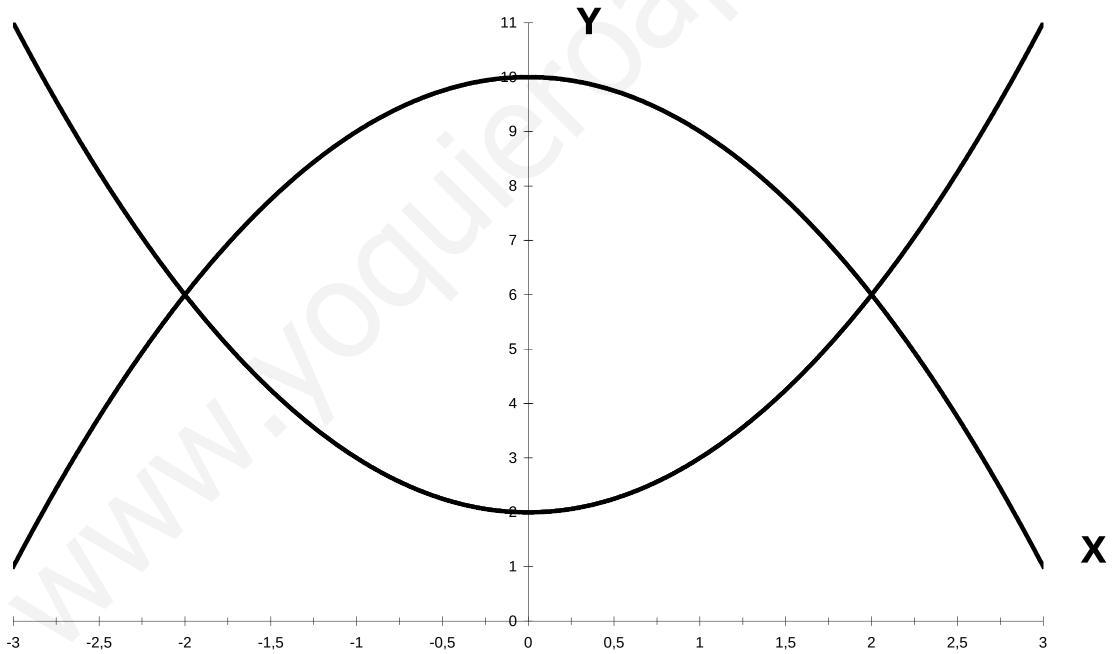
Para ser derivable tiene que ser, primeramente continua

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=e^0-1=1-1=0 \\ f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0^2+a\cdot 0=0 \end{cases} \Rightarrow f(0)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=0 \Rightarrow Es\ continua\ \ para\ todo\ a\in\Re$$

$$f'(x)=\begin{cases} e^x-1 & (x<0) \\ 2x+a & (x>0)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=e^0=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=2\cdot 0+a=a \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f'(x)=1=\lim_{x\to 0^+} f'(x)=a \Rightarrow a=1$$

2.- Dadas las funciones $\mathbf{x^2+2}$ y $\mathbf{-x^2+10}$, se pide:
a) Representar el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones
b) Calcular el área de dicho recinto

a)



$$Puntos\ de\ corte\ entre\ \ funciones \Rightarrow x^2+2=-x^2+10 \Rightarrow 2x^2-8=0 \Rightarrow 2\left(x^2-4\right)=0 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow$$

$$x^2=4 \Rightarrow x=\pm\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases} \Rightarrow Son\ simétricas\ respecto\ a\ OY$$

$$A=2\int_0^2\left(-x^2+10\right)dx-2\int_0^2\left(x^2+2\right)dx=\int_0^2\left(-4x^2+16\right)dx=-4\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^2+16\cdot\left[x\right]_0^2$$

$$A=-\frac{4}{3}\cdot\left(2^3-0^3\right)+16\cdot(2-0)=-\frac{32}{3}+32=\frac{64}{3}\ u^2$$

3.- Discutir el siguiente sistema en función de los valores del parámetro **m** y resolverlo para un valor que lo haga compatible y determinado $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^3 + 1 + 1 - m - m - m = m^3 - 3m + 2 \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow m^3 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow Por\ Ruffini$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ \underline{1} & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & |\underline{0} \end{array} \Rightarrow m^3 - 3m + 2 = (m-1)\left(m^2 + m - 2\right) = 0 \Rightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9$$

$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases} \Rightarrow m^3 - 3m + 2 = (m-1)^2 (m+2)$$

$\forall m \in \Re - \{-2\ , 1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$

$Soluciones\ para\ el\ Sistema\ Compatible\ Deter\min ado\ para\ todos\ los\ valores\ de\ m\ que\ lo\ cumplen$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m & 1 \\ m^2 & 1 & m \end{vmatrix}}{m^3 - 3m + 2} = \frac{m^2 - m^2 - m - m^3 - 1 - m^2}{(m-1)^2 (m+2)} = \frac{-m^3 - m^2 - m - 1}{(m-1)^2 (m+2)} = -\frac{m^3 + m^2 + m + 1}{(m-1)^2 (m+2)} =$$

$$x = -\frac{(m+1)^2 (m-1)}{(m-1)^2 (m+2)} = -\frac{(m+1)^2}{(m-1)(m+2)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & m^2 & m \end{vmatrix}}{m^3 - 3m + 2} = \frac{m^3 + 1 + m^2 - m - m^3 - m}{(m-1)^2 (m+2)} = \frac{m^2 - 2m + 1}{(m-1)^2 (m+2)} = \frac{(m-1)^2}{(m-1)^2 (m+2)} = \frac{1}{m+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 1 & 1 & m^2 \end{vmatrix}}{m^3 - 3m + 2} = \frac{m^4 + m + 1 - m - m^2 - m^2}{(m-1)^2 (m+2)} = \frac{m^4 - 2m^2 + 1}{(m-1)^2 (m+2)} = \frac{(m-1)^2 (m+1)^2}{(m-1)^2 (m+2)} = \frac{(m+1)^2}{m+2}$$

$Si\ m = -2$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & 8 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow 0z = 6 \Rightarrow$$

$$z = \frac{6}{0} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

Continuación del Problema 3 de la Opción B

$$Si\ m = 1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow La\ segunda\ y\ la\ tercera\ son\ combinación\ lineal\ de\ la\ primera \Rightarrow$$

$$Sistema\ Compatible\ Indeterminado$$

4.- Obtener la ecuación del plano que contiene a las dos rectas siguientes:

$$r_1 \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z}{-2} \quad ; \quad r_2 \equiv \{(x\ ,y\ ,z) = (-7\ ,1\ ,2) + \lambda(4\ ,-1\ ,0)\}$$

Para formar un plano las rectas o son paralelas o tienen que cortarse en un punto, son paralelas si sus vectores directores son iguales o proporcionales, de no serlo tienen que tener un punto P común o de corte, que con el punto G, generador del plano forma un vector coplanario con los de las rectas dadas y el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación del plano π pedido.
Si no se cortan se cruzarían y no formarían un plano

$$r_1 \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z}{-2} \quad ; \quad r_2 \equiv \{(x\ ,y\ ,z) = (-7\ ,1\ ,2) + \lambda(4\ ,-1\ ,0)\}$$

$$\begin{cases} v_{r_1} = (2\ ,-3\ ,-2) \\ v_{r_2} = (4\ ,-1\ ,0) \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{4} \neq \frac{-3}{-1} \Rightarrow No\ son\ paralelas$$

$$Punto\ de\ corte$$

$$\begin{cases} 3 + 2\mu = -7 + 4\lambda \\ -4 - 3\mu = 1 - \lambda \\ -2\mu = 2 \end{cases} \Rightarrow -2\mu = 2 \Rightarrow \mu = -1 \Rightarrow 3 + 2\cdot(-1) = -7 + 4\lambda \Rightarrow 4\lambda = 8 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow$$

$$-4 - 3\,(-1) = 1 - 2 \Rightarrow -1 = -1 \Rightarrow Sistema\ Compatible \Rightarrow P\begin{cases} x = -7 + 4\cdot 2 \\ y = 1 - 2 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow P(-1\ ,-1\ ,2)$$

$$\begin{cases} v_{r_1} = (2\ ,-3\ ,-2) \\ v_{r_2} = (4\ ,-1\ ,0) \\ \overrightarrow{PG} = (x\ ,y\ ,z) - (-1\ ,-1\ ,2) = (x+1\ ,y+1\ ,z-2) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z-2 \\ 2 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-8\,(y+1) - 2\,(z-2) + 12\,(z-2) - 2\,(x+1) = 0 \Rightarrow -2\,(x+1) - 8\,(y+1) + 10\,(z-2) = 0 \Rightarrow$$

$$(x+1) + 4\,(y+1) - 5\,(z-2) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + 4y - 5z - 5 = 0$$