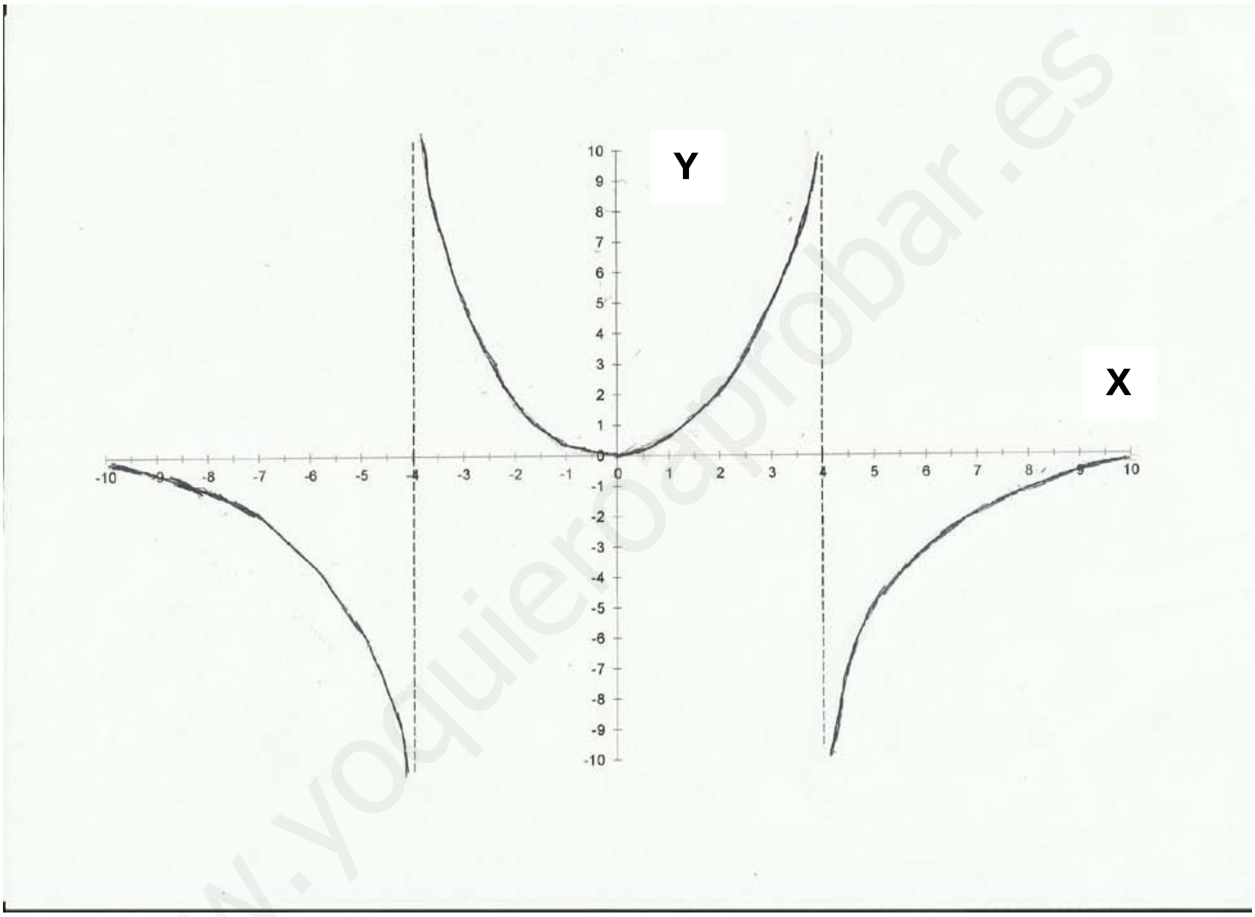
OPCIÓN A

1.- Se pide trazar razonadamente la gráfica de una cierta función **f(x)** sabiendo que tiene las siguientes propiedades

a) Está definida para todo valor de excepto para **x = -4** y **x = 4**

b) Es decreciente cuando **x < 0** y creciente cuando **x > 0**

c) La gráfica pedida es simétrica respecto del eje vertical



2.- Calcular la primitiva siguiente: $\int Ln\left(25+x^2\right)dx$

$$I=\int Ln\left(25+x^2\right)dx = x\ Ln\left(25+x^2\right)-\int x\ \frac{2x}{25+x^2}\ dx = x\ Ln\left(25+x^2\right)-\int \frac{2x^2}{25+x^2}\ dx$$

$$Por\ \ partes \Rightarrow \begin{cases} Ln\left(25+x^2\right)=u \Rightarrow du=\dfrac{2x}{25+x^2}\ dx \\ dx=dx \Rightarrow v=\int dx = x \end{cases}$$

$$\begin{array}{l|l} 2x^2 & x^2+25 \\ \cline{2-2} \underline{-2x^2-50} & 2 \\ \quad -50 & \end{array}$$

$$I=\int Ln\left(25+x^2\right)dx = x\ Ln\left(25+x^2\right)-\int\left(2+\frac{-50}{25+x^2}\right)dx = x\ Ln\left(25+x^2\right)-\int 2\ dx+\int\frac{50}{25+x^2}\ dx$$

$$I=\int Ln\left(25+x^2\right)dx = x\ Ln\left(25+x^2\right)-2x+50\int\frac{dx}{25\left(1+\dfrac{x^2}{25}\right)} = x\ Ln\left(25+x^2\right)-2x+\frac{50}{25}\int\frac{dx}{1+\left(\dfrac{x}{5}\right)^2}$$

$$Cambio\ de\ variable \Rightarrow \frac{x}{5}=t \Rightarrow dx = 5\ dt$$

$$I=\int Ln\left(25+x^2\right)dx = x\ Ln\left(25+x^2\right)-2x+2\int\frac{5\ dt}{1+t^2} = x\ Ln\left(25+x^2\right)-2x+10\cdot arc\ tg\ t$$

$$I=\int Ln\left(25+x^2\right)dx = x\ Ln\left(25+x^2\right)-2x+10\cdot arc\ tg\left(\frac{x}{5}\right)+K$$

3.- En este ejercicio los números **x**, **y**, **z**, **u** son todos distintos de cero. Justificar si hacer su desarrollo, que el determinante siguiente vale **0**: $\begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ u & u & u \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \end{vmatrix}$

$$\frac{xyz}{xyz}\begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ u & u & u \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \end{vmatrix} = \frac{1}{xyz}\cdot\begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ u & u & u \\ \frac{xyz}{x} & \frac{xyz}{y} & \frac{xyz}{z} \end{vmatrix} = \frac{1}{xyz}\begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ u & u & u \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = \left(Dos\ \ filas\ iguales\right) = \frac{1}{xyz}\cdot 0 = 0$$

4.- Se sospecha que el plano definido por el punto **(1, 0 , 5)** y los vectores $\vec{u}=(3\,,1\,,1)$ y $\vec{v}=(-1\,,3\,,2)$ se corta en un punto con la recta cuyas ecuaciones en forma continua son: $\frac{x-2}{3}=\frac{y-7}{10}=\frac{z-2}{-5}$. Decidir razonadamente la cuestión

La recta y el plano puede ser paralelos o cortarse, en el primer caso el producto escalar de los vectores directores, que son perpendiculares entre si, es nulo, de no serlo se cortan.
Para hallar el vector director del plano calcularemos el producto vectorial de los vectores que lo definen

$$\begin{cases}\vec{u}=(3\,,1\,,1)\\ \vec{v}=(-1\,,3\,,2)\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 1 & 1\\ -1 & 3 & 2\end{vmatrix}=2\vec{i}-\vec{j}+9\vec{k}+\vec{k}-3\vec{i}-6\vec{j}=-\vec{i}-\overrightarrow{7j}+10\vec{k}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_\pi}=(-1\,,-7\,,10)\equiv(1\,,7\,,-10)\\ \qquad\overrightarrow{v_r}=(3\,,10\,,-5)\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}\cdot\overrightarrow{v_r}=(1\,,7\,,-10)\cdot(3\,,10\,,-5)=3+70+50=123\neq 0$$

El plano y la recta se cortan en un punto

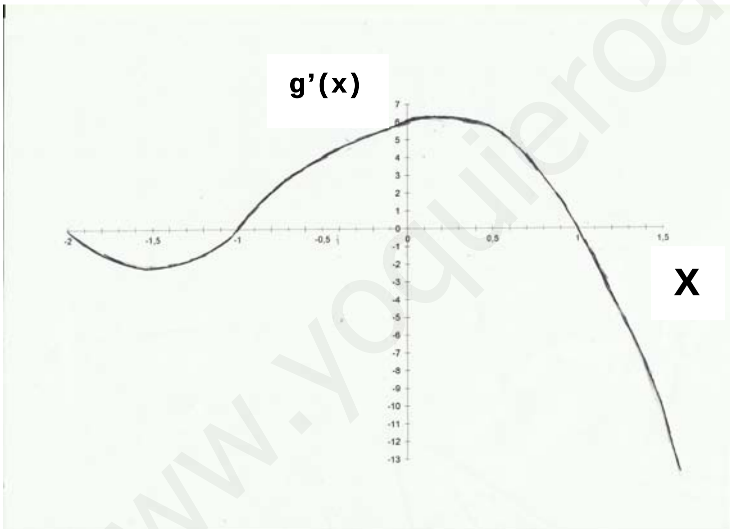
OPCIÓN B

1.- Calcular el valor de los parámetros **a** y **b** para que la función siguiente resulte continua en todos sus puntos $f(x)=\begin{cases} ax-b & si \quad x<-1 \\ ax^2-bx+3 & si \quad -1\le x\le 2 \\ -bx^3+a & si \quad x>2 \end{cases}$

$$\begin{cases} \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=a\cdot(-1)-b=-a-b \\ f(-1)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=a\cdot(-1)^2-b\cdot(-1)+3=a+b+3 \end{cases} \Rightarrow -a-b=a+b+3 \Rightarrow 2a+2b=-3 \\ \begin{cases} f(2)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=a\cdot 2^2-b\cdot 2+3=4a-2b+3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-b\cdot 2^3+a=-8b+a \end{cases} \Rightarrow 4a-2b+3=-8b+a \Rightarrow 3a+6b=-3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -6a-6b=9 \\ 3a+6b=-3 \end{cases} \Rightarrow -3a=6 \Rightarrow a=-\frac{6}{3}=-2 \Rightarrow 2\cdot(-2)+2b=-3 \Rightarrow -4+2b=-3 \Rightarrow 2b=1 \Rightarrow b=\frac{1}{2}$$

2.- La gráfica que aparece en la figura representa la derivada de una cierta función g(x):



Describir a partir de ella los intervalos de concavidad y convexidad de g(x), así como sus puntos de inflexión y máximos y mínimos

Puntos de inflexión x = -1'5 y **x = 0'2**
Concavidad $\forall x\in\Re / -1'5<x<0'2$ (tangente de la tangente geométrica positiva)
Convexidad $\forall x\in\Re / (-2<x<-1'5)\cup(0'2<x<1'5)$ (tangente de la tangente geométrica negativa)
Mínimo relativo en x = -1 de Decrecimiento **(-)**pasa a Crecimiento **(+)**
Máximo relativo en x = 1 de Crecimiento **(+)** pasa a Decrecimiento **(-)**

3.- Discutir el sistema de ecuaciones lineales que viene a continuación según los valores del parámetro **p** $\begin{cases} 2x + py = 0 \\ x + pz = p \\ x + y + 3z = 5 \end{cases}$ Hallar para que valor de **p** es compatible e indeterminado y resolverlo

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & p & 0 \\ 1 & 0 & p \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = p^2 - 2p - 3p = p^2 - 5p \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow p^2 - 5p = 0 \Rightarrow (p-5)p = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 0 \\ p = 5 \end{cases}$$

$$\forall p \in \Re - \{0 , 5\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ \ p = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow La\ \ primera\ es\ combinación\ lineal\ de\ las\ otras\ dos \Rightarrow$$

$Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$

$x = 0 \Rightarrow 0 + y + 3z = 5 \Rightarrow y = 5 - 3z \Rightarrow Solución \Rightarrow (x , y , z) = (0 , 5 - 3\lambda , \lambda)$

$Si\ \ p = 5$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -10 & -10 \\ -2 & -2 & -6 & -10 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & -10 \\ 0 & 3 & -6 & -10 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -6 & -10 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$0z = -4 \Rightarrow z = -\frac{4}{0} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

4.- Hallar la ecuación cartesiana de un plano que contiene al punto **(3 , 0 , 3)** y a la recta cuyas ecuaciones son: $\frac{x}{-2} = y + 1 = \frac{z-3}{3}$

Para determinar la ecuación del plano π tomaremos el vector director de la recta, el vector determinado por el punto **A** y un punto **R** cualquiera de la recta (tomaremos el indicado en su ecuación) y el vector que forman **A** y **G**, siendo este punto el genérico del plano. Estos tres vectores son coplanarios y el último es combinación lineal de los otros dos, por es razón el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación que se pide

$R(0 , -1 , 3)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (-2 , 1 , 3) \\ \overrightarrow{AR} = (0 , -1 , 3) - (3 , 0 , 3) = (-3 , -1 , 0) \equiv (3 , 1 , 0) \\ \overrightarrow{AG} = (x , y , z) - (3 , 0 , 3) = (x - 3 , y , z - 3) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y & z-3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$9y - 2(z-3) - 3(z-3) - 3(x-3) = 0 \Rightarrow -3(x-3) + 9y - 5(z-3) = 0$$

$$\pi \equiv 3x - 9y + 5z - 24 = 0$$